



NIEKTORÉ TRENDOVÉ FUNKCIE V EKONOMICKÝCH ČASOVÝCH RADOCH

SOME TREND FUNCTIONS IN ECONOMIC TIME SERIES

Eva OSTERTAGOVÁ

Abstract

The paper deals with analysis of trend component in economic time series. Many monotonous time series data can be adequately approximated by a linear function. If there is a clear monotonous nonlinear component, the data first need to be transformed to remove the nonlinearity, usually a logarithmic, exponential, or polynomial function can be used. The logistic and Gompertz trend curves are often applied in forecasting market development.

Key words

Trend component, exponential trend, logistic and Gompertz trend, prediction, mean absolute percentage error.

Úvod

Pri opise dynamiky ekonomických javov vychádzame z ukazovateľov, ktoré sú usporiadané do tzv. časových radov. Hlavnou úlohou analýzy časových radov je vystihnúť základnej tendencie ich vývoja, teda stanovenie ich trendu. Trend sa určuje zvyčajne analytickými metódami, t.j. pomocou trendových funkcií, resp. adaptívnymi metódami, medzi ktoré patrí predovšetkým metóda kľazových priemerov a exponenciálne vyrovňovanie.

Modelovanie trendu pomocou trendových funkcií

Analýza sa u metódy analytického vyrovňovania časových radov realizuje v podstate pomocou klasickej regresnej analýzy. Pre odhad parametrov trendovej funkcie sa používa *metóda najmenších štvorcov* známa z regresnej analýzy. Ide vlastne o regresný model, kde v úlohe nezávislej premennej vystupuje čas. To sa týka pochopiteľne len funkcií lineárnych z hľadiska parametrov, resp. takých, ktoré je možné na tento typ upraviť vhodnou transformáciou. Sú to napr. tieto trendové funkcie $T = F(t)$, kde t je časová premenná:

- *lineárna (priamka)* $T = a_0 + a_1 \cdot t$,
- *parabolická (2. a 3. stupňa)* $T = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$, $T = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3$;
- *exponenciálna* $T = a_0 \cdot a_1^t$, kde $a_1 > 0$.

V ostatných prípadoch sa používajú zložitejšie metódy odhadu. V ekonomickej praxi sa môžeme často stretnúť s tromi základnými nelinearizovateľnými trendovými funkciami, ktoré nie je možné linearizovať žiadnou transformáciou:

- *modifikovaný exponenciálny trend* $T = k + a_0 \cdot a_1^t$, $a_1 > 0$;
- *logistický trend* $T = \frac{1}{k + a_0 \cdot a_1^t}$,
- *Gompertzov trend* $T = k \cdot a_0^{a_1^t}$.



Modifikovaný exponenciálny trend je vlastne zovšeobecnením exponenciálneho trendu. Je to model s asymptotou a bez inflexného bodu. Táto trendová funkcia sa často využíva v marketingu. Dá sa pomocou nej modelovať vývoj javov, ktoré vychádzajú z obmedzených zdrojov rastu a u ktorých existuje určitá hranica nasýtenia, ktorá je daná napr. záujmom o nejaký výrobok. Na odhad parametrov tejto trendovej funkcie sa používa *metóda vybraných bodov* alebo *metóda čiastkových súčtov*.

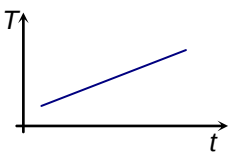
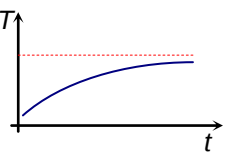
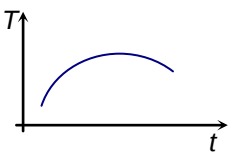
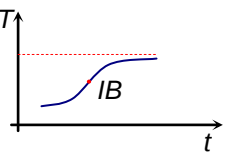
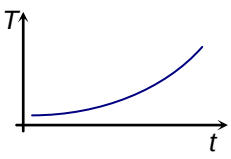
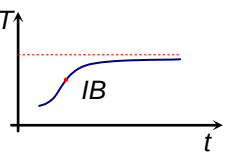
Logistický trend (logistika) sa často uvádza v tvare *Pearl-Reedovej* trendovej funkcie. Jej graf je ohraničený zhora aj zdola, inflexný bod má uprostred. Jej priebeh je typický pre tzv. S-krivky (ich graf pripomína tvar tohto písmena). V ekonomickej oblasti sa logistický trend používa v modeloch dopytu po predmetoch dlhodobej spotreby alebo pri modelovaní vývoja, výroby a predaja niektorých druhov výrobkov. Pomocou tohto modelu sa dá simulovať ekonomická životnosť nového alebo inovovaného výrobku.

Každá S-krivka vymedzuje na časovej osi päť vývojovo odlišných fáz cyklu: 1. fáza – začínajú sa formovať nové progresívne sily; 2. fáza – nové progresívne sily sa začínajú plne presadzovať a rozhodujúcou mierou ovplyvňovať ďalší vývoj; 3. fáza – nové progresívne sily celkom ovládli vývoj, ale už sa objavujú aj opozičné sily tlmiace ich účinok; 4. fáza – vzniknuté opozičné sily nadobúdajú trvalú prevahu nad doterajšími silami, ktoré stratili progresivnosť a v dôsledku toho sa vývojové tendencie podstatne spomaľujú; 5. fáza – opozičné sily nadobudli rozhodujúcu prevahu a celkom utlmili vývoj doterajších síl. Vývoj sa zastavuje až do doby presadenia sa ďalších progresívnych síl.

Pre odhad parametrov logistickej trendovej funkcie môžeme použiť rovnakú procedúru ako v prípade modifikovaného exponenciálneho trendu, keďže „prevrátením“ logistiky $\frac{1}{T} = k + a_0 \cdot a_1^t$ získame modifikovaný exponenciálny trend.

Graf *Gompertzovej trendovej funkcie* má tiež podobu S-krivky. Je ohraničený zhora aj zdola, na rozdiel od logistiky je však asymetrický, pričom väčšina hodnôt sa vyskytuje za inflexným bodom. Parametre tohto modelu sa po logaritmickej transformácii $\ln T = \ln k + \ln a_0 \cdot a_1^t$ odhadujú ako u modifikovaného exponenciálneho trendu.

Na obr.1 je uvedený prehľad grafov najčastejšie používaných trendových funkcií v ekonomickej praxi.

Trend	Grafické zobrazenie	Trend	Grafické zobrazenie
lineárny		modifikovaný exponenciálny	
kvadratický		logistický	
exponenciálny		Gompertzov	

Obr. 1 Grafické zobrazenie trendových funkcií



Aplikácia metódy vybraných bodov na modeli modifikovaného exponenciálneho trendu

Majme časový rad n hodnôt y_i za časové obdobia t_i , pre $i = 0, 1, \dots, m, \dots, 2m$; pričom $m = \frac{n-1}{2}$ je celé číslo. Potom vybrané body sú $[y_0, 0]$, $[y_m, m]$ a $[y_{2m}, 2m]$.

Z podmienky $m \in \mathbb{Z}$ vyplýva, že n musí byť nepárne číslo, t.j. ak má časový rad párný počet období, doplníme ho o jedno ďalšie obdobie. Ak takú možnosť nemáme, potom vynecháme jedno, spravidla najstaršie časové obdobie.

Nech vyrovňavajúcou funkciou je modifikovaná exponenciálna trendová funkcia $T_i = y_i = k + a_0 \cdot a_1^{t_i}$. Po dosadení súradníc vybraných bodov do tejto rovnice dostaneme sústavu troch rovníc o troch neznámych a_0 , a_1 , k :

$$y_0 = k + a_0 \cdot a_1^0, \quad y_m = k + a_0 \cdot a_1^m, \quad y_{2m} = k + a_0 \cdot a_1^{2m}.$$

Riešením tejto sústavy sú odhady parametrov danej trendovej funkcie:

$$\hat{a}_1 = \sqrt[m]{\frac{y_{2m} - y_m}{y_m - y_0}}, \quad \hat{a}_0 = \frac{y_m - y_0}{a_1^m - 1}, \quad \hat{k} = y_0 - a_0.$$

V tab.1 sú údaje o produkcii istého výrobku (y_i) v tisícoch kusov v rokoch 2004 – 2010. Za predpokladu, že sa doterajší charakter analyzovaného časového radu nezmenil, odhadneme pomocou modifikovanej exponenciálnej trendovej funkcie produkciu tohto výrobku v roku 2011.

Tab. 1 Tabuľka vstupných hodnôt

Rok	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
y_i	111	122	135	140	165	181	200

Ukážeme riešenie tejto úlohy použitím MATLABu nasledujúcim spôsobom:

```
y=[111,122,135,140,165,181,200]; n=length(y);
m=(n-1)/2; y0=y(1); ym=y(m+1); y2m=y(2*m+1);
a1=((y2m-ym)/(ym-y0))^(1/m); a0=(ym-y0)/(a1^m-1); k=y0-a0
```

```
a1 =
1.2742
```

```
a0 =
27.1290
```

```
k =
83.8710
```

Teda odhadnutý modifikovaný exponenciálny trendový model má tvar:

$$\hat{y} = \hat{T} = 83,8710 + 27,1290 \cdot 1,2742^t.$$

Po zostavení modelu trendovej funkcie časového radu a odhade jej parametrov nás zaujíma úroveň kvality tohto modelu, t.j. skúmame charakter rozdielov skutočných (empirických) hodnôt $y_1, y_2, \dots, y_n$ a vyrovnaných (teoretických) hodnôt $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ (akoukoľvek metódou). Hodnoty $e_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; sú *reziduá* časového radu. Predstavujú odhady nesystematickej zložky skúmaného časového radu. Pre posúdenie presnosti zvolenej trendovej funkcie máme k dispozícii viaceré reziduálne charakteristiky.



Použijeme *priemernú absolútnu percentuálnu chybu (Mean Absolute Percentage Error)*

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|e_i|}{y_i} \cdot 100 \%$$

Je potrebné poznamenať, že neexistuje žiadna všeobecne prijatá stupnica, ktorá by určovala, aké hodnoty *MAPE* sú v analytickej praxi prijateľné. Ak je hodnota $MAPE \leq 5 \%$, je možné daný model hodnotiť ako kvalitný z hľadiska použitia pre tvorbu prognóz. Ak je $5 \% < MAPE \leq 10 \%$, je daný model k tvorbe prognóz stále použiteľný, ale ich kvalita je nižšia ako v prvom prípade. Ak je hodnota $MAPE > 10 \%$, neposkytuje daný model kvalitnú predpoveď.

```
t=1:7;yM=k+a0*a1.^t;y8=k+a0*a1.^8  
e=y-yM;MAPE=sum((100*abs(e)./y))/n
```

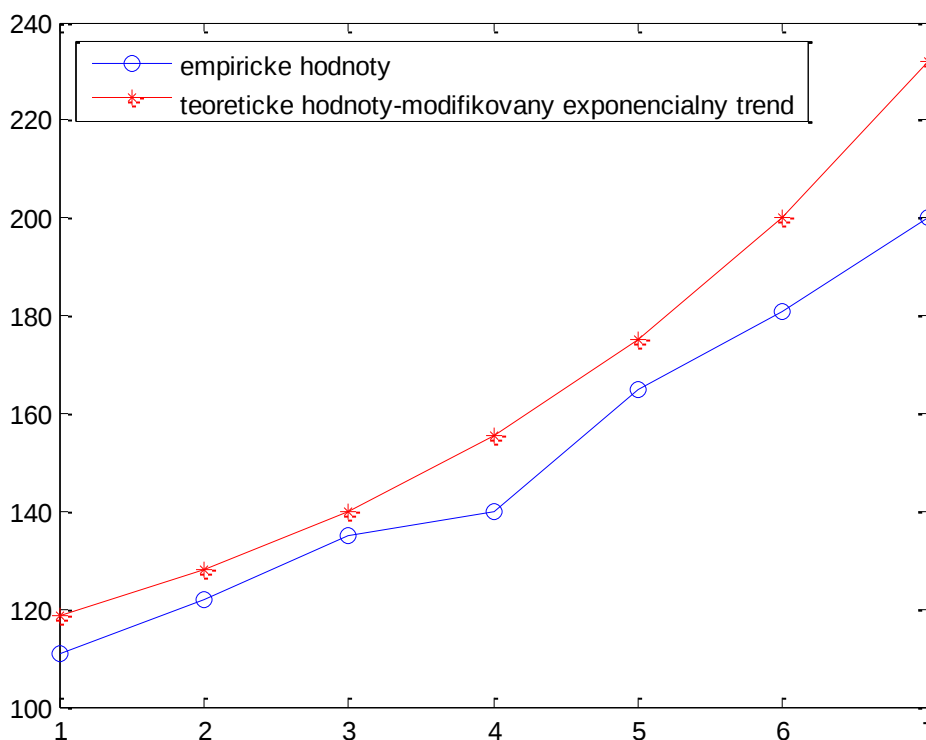
```
y8 =  
272.4281
```

```
MAPE =  
8.3913
```

Teda produkciu uvedeného výrobku v roku 2011 je možné odhadnúť na cca 272 428 kusov. Pretože hodnota $MAPE = 8,3913 \%$, model je použiteľný pre tvorbu prognóz.

Empirické a teoretické hodnoty znázorníme graficky. Výsledný graf je na obrázku 2.

```
plot(t,y,'-o'),hold on,plot(t,yM,'r-*')  
legend('empiricke hodnoty','teoreticke hodnoty-modifikovany  
exponencialny trend'),hold off
```



Obr. 2 Grafické znázornenie empirických a teoretických hodnôt použitím modifikovaného exponenciálneho trendu



Súhrn

Modelovanie trendu pomocou trendových funkcií sa používa v prípade, keď trend zodpovedá určitej funkcii, napr. lineárnej, kvadratickej, exponenciálnej, S-krivky a pod. V prípade, keď je vývoj časového radu v dôsledku silného vplyvu nesystematickej zložky nerovnomerný alebo má extrémne hodnoty, tak je vhodné modelovať trend adaptívnymi metódami.

Ak vývojovú tendenciu v časovom rade vystihuje krivka, ktorej koeficienty nemožno stanoviť metódou najmenších štvorcov, používajú sa iné metódy, napr. metóda vybraných bodov alebo metóda čiastkových súčtov.

Kľúčové slová

Trendová zložka, exponenciálny trend, logistický a Gompertzov trend, predikcia, priemerná absolútna percentuálna chyba.

Príspevok bol pripravený v rámci riešenia grantového projektu VEGA č. 1/0102/11 Metódy a techniky experimentálneho modelovania vnútropodnikových výrobných a nevýrobných procesov.

Použitá literatúra

- [1] BAKYTOVÁ, H., UGRON, M.: *Priklady zo štatistických metód*. SNTL/Alfa, Bratislava, 1972,
- [2] CYHELSKÝ, L., KAŇOKOVÁ, J., NOVÁK, I.: *Základy teorie statistiky pro ekonomy*. SNTL/Alfa, Praha, 1979,
- [3] HANČLOVÁ, J., TVRDÝ, L.: *Úvod do analýzy časových řad*. VŠB-TU, Ostrava, 2003.
- [4] KŘIVÝ, I.: *Analýza časových řad*. Ostravská univerzita, 2006,
- [5] OSTERTAGOVÁ, E.: *Aplikovaná štatistika*. Elfa, Košice, 2011, ISBN 978-80-8086-171-1,
- [6] OSTERTAGOVÁ, E.: *Modelovanie časových radov*. Trendy a inovatívne prístupy v podnikových procesoch: zborník z 13. medzinárodnej vedeckej konferencie. Košice, 2010, s. 1-7, ISBN 978-80-553-0570-7,
- [7] OSTERTAGOVÁ, E.: *Time series modelling*. Modelling of Mechanical and Mechatronical Systems: proceedings of the 4th international conference. Herľany, 2011, p. 366-373,
- [8] OSTERTAGOVÁ, E., OSTERTAG, O.: *The simple exponential smoothing model*. Modelling of Mechanical and Mechatronical Systems: proceedings of the 4th international conference. Herľany, 2011, p. 380-384, ISBN 978-80-553-0731-2,
- [9] OSTERTAGOVÁ, E.: *Aplikácia exponenciálneho vyrovnávania časových radov*. Transfer inovácií 19/2011, s. 68-70, ISSN 1337-7094.

Kontaktná adresa

PhDr. Eva Ostertagová, PhD.
Technická univerzita v Košiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra matematiky a teoretickej informatiky
Němcovej 32, 040 01 Košice
e-mail: eva.ostertagova@tuke.sk