



MODELOVANIE ČASOVÝCH RADOV

MODELLING TIME SERIES

Eva OSTERTAGOVÁ

Abstract

In the paper are presented some methodological treatments for time series analysis. Time series analysis is one of the key methods of examination of chronologically arranged data, which are generated in all areas of scientific investigation. In the paper is prepared a theoretical base for calculation and application of time series and regression and correlation analysis. The paper is on the more detailed description of the method of decomposition of time series.

Key words: time series analysis, decomposition, trend component, prediction, mean absolute percentage error, mean squared error, index determination

Úvod

Dôležitými štatistickými údajmi, pomocou ktorých môžeme skúmať dynamiku javov v čase, sú tzv. časové rady. Majú základný význam pre analýzu príčin, ktoré na tieto javy pôsobili a ovplyvňovali ich chovanie v minulosti, ako aj pre predvídanie ich budúceho vývoja.

Časovým radom rozumieme postupnosť vecne a priestorovo porovnateľných pozorovaní (dát) kvantitatívneho ukazovateľa, ktoré sú jednoznačne usporiadané z hľadiska času v smere minulosť – prítomnosť (budúcnosť).

Analýzou časových radov sa rozumie súbor metód, ktoré slúžia k opisu týchto radov. Tieto metódy sa stále vyvíjajú. Z historického hľadiska sa ako prvé sledovali rady astronomických a meteorologických pozorovaní. V súčasnosti sa aplikácie zameriavajú predovšetkým do ekonomickej oblasti. Taktiež dochádza k rozvoju výpočtovej techniky a štatistického softvéru, ktorý pomohol prekonať úskalia súvisiace s overovaním metód v praxi.

Cieľom analýzy časových radov je väčšinou konštrukcia vhodného modelu. Pokiaľ budeme schopní zostrojiť dobrý model, umožní nám to pochopiť mechanizmus, na základe ktorého vznikajú hodnoty časového radu a taktiež pochopiť podmienky, ktoré vznik týchto hodnôt ovplyvňujú. To nám umožní tieto podmienky ovplyvňovať a v niektorých prípadoch ovplyvniť aj vývoj časového radu. Ďalším veľmi častým cieľom je konštrukcia predpovedí (prognóz).

Základné koncepcie modelovania časových radov

Najjednoduchšou koncepciou modelovania časových radov je *jednorozmerný model*, ktorý je známy z jednorozmernej regresnej analýzy. V prípade časových radov je založený na predpoklade, že jediným faktorom dynamiky ukazovateľa v časovom rade je čas.

Tento model je možné zapísať v tvare $y = f(t) + \varepsilon$, kde y je hodnota ukazovateľa, t je čas, ε je náhodná (reziduálna) zložka (používa sa aj názov *náhodná chyba*) a funkciu f nazývame *regresná funkcia*. Regresná funkcia predstavuje *deterministickú zložku*.



O náhodných chybách ε_i sa predpokladá, že sú to náhodné veličiny, ktoré majú normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a so smerodajnou odchýlkou $\sigma > 0$. Teda platí $\varepsilon_i \sim \text{norm}(0, \sigma)$, pre každé $i = 1, 2, \dots, n$.

Podmienka, že stredná hodnota $E(\varepsilon_i) = 0$ pre $\forall i = 1, 2, \dots, n$ znamená, že náhodná zložka nepôsobí systematickým spôsobom na hodnoty vysvetľovanej premennej Y .

Rozptyl $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$ pre každé $i = 1, 2, \dots, n$; t.j. rozptyl náhodnej zložky je konštantný. Táto podmienka vyjadruje, že variabilita náhodnej zložky nezávisí na hodnotách vysvetľujúcej premennej, t.j. na čase t .

Ďalej sa predpokladá, že $K(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pre $\forall i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$; t.j. kovariancia náhodnej zložky je nulová. Teda hodnoty náhodnej zložky sú nekorelované a z toho vyplýva aj nekorelovanosť rôznych dvojíc pozorovaní vysvetľovanej premennej Y .

Nech $\hat{y}_i$ je teoretická (vypočítaná, vyrovnaná) hodnota premennej Y . Rozdiel empirickej (pozorovanej) a teoretickej hodnoty $e_i = y_i - \hat{y}_i$ nazývame *rezíduum*. Rezíduum predstavuje bodový odhad náhodnej chyby ε_i .

Rozptyl $D(\varepsilon_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n$; obvykle nepoznáme a musí byť tiež odhadnutý z dát, ktoré sú k dispozícii.

Štatistika $SS_R = \sum_{i=1}^n e_i^2$ sa nazýva *reziduálny súčet štvorcov*. Pomocou reziduálneho súčtu štvorcov je možné stanoviť *výberový reziduálny rozptyl* $s_R^2 = \frac{SS_R}{n-2}$, ktorý predstavuje bodový odhad rozptylu σ^2 . Bodovým odhadom smerodajnej odchýlky σ je *výberová reziduálna smerodajná odchýlka* $s_R = \sqrt{s_R^2}$.

Reziduálny rozptyl vyjadruje, ako veľmi sa v priemere teoretická hodnota $\hat{y}$ veličiny Y líši od empirickej hodnoty y . Udáva teda, ako sú hodnoty veličiny Y rozptýlené okolo regresnej funkcie.

Medzi základné metódy a postupy pre analýzu časových radov patrí dekompozičná metóda. *Klasická dekompozičná metóda* vychádza z predpokladu, že každý časový rad môže obsahovať tieto štyri zložky:

- trendovú zložku T ,
- sezónnu zložku S ,
- cyklickú zložku C ,
- náhodnú zložku ε .

Vykonanie *rozkladu (dekompozície) časového radu* na tieto zložky je motivované nádejou, že v jednotlivých zložkách rozkladu sa ľahšie podarí identifikovať pravidelné správanie sa radu ako v pôvodnom nerozloženom rade.

Trendová zložka (trend) vyjadruje dlhodobú tendenciu vo vývoji hodnôt analyzovaného ukazovateľa v čase. Trend môže byť rastúci, klesajúci alebo stagnujúci.

Sezónna zložka vyjadruje pravidelné kolísanie hodnôt okolo trendu s periódou, ktorá je kratšia alebo rovná jednému roku (napr. týždeň, mesiac, rok). Sezónne zmeny sú zapríčinené



takými faktormi, akými sú napr. striedanie ročných období, vianočné a veľkonočné sviatky, prázdniny, dovolenky a pod.

Cyklická zložka vyjadruje kolísanie hodnôt okolo trendu spôsobené cyklickými vplyvmi (cyklus ekonomických kríz, výrobný cyklus, atď.) s periódou, ktorá je dlhšia ako jeden rok. Používa sa skôr v makroekonomických úvahách. Pre cykly je charakteristické, že nie je isté, kedy nastanú, aká bude ich intenzita a dĺžka ich trvania.

Náhodná (reziduálna) zložka je zložka, ktorá ostane v časovom rade po odstránení trendu, sezónnej aj cyklickej zložky. Vyjadruje náhodné výkyvy, ktoré nemajú systematický charakter. Toto náhodné kolísanie je vyvolané pôsobením faktorov náhodného charakteru, ktoré nie je možné predvídať (napr. zemetrasenie, štrajk, veľké suchá, rôzne epidémie a pod. alebo rôzne neidentifikovateľné vplyvy).

Súhrn sezónnej a cyklickej zložky predstavuje *periodickú zložku* časového radu $P = S + C$.

Klasický matematický model časového radu môže byť *aditívny* a *multiplikatívny*. Najčastejšie sa pri analýze časového radu predpokladá aditívny model opisu chovania časového radu. U tohto modelu je hodnota ukazovateľa v i -tom období daná súčtom:

$$y_i = T_i + P_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ak má časový rad tento tvar, tak hovoríme o *periodickom časovom rade*. V mnohých praktických úlohách je periodická zložka P_i reprezentovaná len sezónnou zložkou S_i , t.j. model môžeme zapísať v tvare $y_i = T_i + S_i + \varepsilon_i$ a príslušný časový rad nazývame *sezónne zaťaženým časovým radom*. Ak platí $P_i = 0$, hovoríme o *neperiodickom časovom rade*. Pokiaľ je trendová zložka konštantná, t.j. $T_i = \text{konst.}$, hovoríme o *stacionárnom časovom rade*.

Analýza trendovej zložky časového radu

Hlavnou úlohou analýzy časových radov je vystihnúť základnej tendencie ich vývoja, teda stanovenie ich trendu. Trend sa určuje metódami, ktoré sa súhrnne nazývajú *vyrovnávanie*, resp. *vyhladzovanie časových radov*, t.j. nahradenie časového radu empirických hodnôt $y_1, y_2, \dots, y_n$ radom hodnôt bez periodického a náhodného kolísania.

V tomto príspevku sa budeme zaoberať *neperiodickými časovými radmi*, t.j. časovými radmi tvaru $y_i = T_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$. Pri ich spracovaní sa snažíme nájsť ich trendovú zložku očistenú od náhodných vplyvov. Vyrovnané hodnoty budeme vo všeobecnosti označovať $\hat{y}_i$. Podobne môžeme vyrovnať aj periodický časový rad, keď jeho hodnoty očistíme od periodickej a náhodnej zložky.

Vyrovnávanie časových radov sa realizuje najčastejšie grafickou metódou, analytickou metódou a adaptívnymi metódami. Sústreďme sa na *metódu analytického vyrovnávania*, ktorá je založená na existencii závislosti hodnôt časového radu (závislá premenná) od časového faktora (nezávislá premenná). Potom je na vyrovnanie časového radu možné použiť matematickú funkciu, ktorá najlepšie opisuje jeho priebeh. Otázkou je, aká matematická funkcia je najvhodnejšia. Pri jej výbere je nutné vychádzať z dôkladnej grafickej analýzy časového radu a z logického rozboru vývoja sledovaného ukazovateľa.

Na *predikciu (prognózovanie)* je možné použiť napr. jednoduchú *metódu extrapolácie* hodnôt časového radu z obdobia pozorovania do budúcnosti. Vychádza sa z logickej väzby



medzi minulosťou a budúcnosťou. Ak ide o neperiodický časový rad s trendom, využíva sa k opisu trendu analytická funkcia $T = F(t)$, kde t je časová premenná. *Bodový odhad ukazovateľa* pre uvažované obdobie potom získame jednoducho dosadením zodpovedajúcej hodnoty za časovú premennú t do funkcie $F(t)$.

Základom správnej predikcie pri extrapolácii trendovej funkcie je vhodná voľba analytickej funkcie charakterizujúcej doterajší vývoj sledovaného ukazovateľa. Na rozdiel od vyrovnávania časových radov, keď chceme analytickou funkciou čo najlepšie vyjadriť doterajší vývoj sledovaného javu, opísať charakter a veľkosť prípadných odchýlok od hlavnej vývojovej tendencie, je pri prognózovaní pomocou extrapolácie časového radu úloha trochu zložitejšia. Ak chceme použiť pre predikciu jednoduchú extrapoláciu časového radu, musí skúmaný jav spĺňať niektoré špeciálne podmienky a musí mať určité vymedzené vlastnosti.

Predovšetkým je potrebné, aby bol časový rad primerane dlhý, aby závery o budúcom vývoji neboli založené na krátkodobých výkyvoch a odchýlkach od základnej vývojovej tendencie alebo aby neboli týmito výkyvmi príliš silno ovplyvnené. Časový rad by mal mať jednoznačný trend, ktorý sa dá aproximovať čo najjednoduchšou funkciou (funkciou s čo najmenším počtom parametrov). Ak sa k vyrovnávaniu časového radu používajú zložité funkcie, môžu sa extrapoláciou preniesť do prognózy aj niektoré väčšie, aj napriek tomu náhodné výkyvy alebo iné periodické výkyvy s krátkou periódou (analytické funkcie s väčším počtom parametrov môžu niektoré tieto výkyvy zahrnúť i do trendu).

Pre *analýzu aj predikciu časových radov* sa v praxi najčastejšie používajú tieto trendové funkcie $T = F(t)$:

- *lineárna (priamka)* $T = a_0 + a_1 \cdot t$,
- *parabolická (2. a 3. stupňa)* $T = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$, $T = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3$;
- *exponenciálna* $T = a_0 \cdot a_1^t$, resp. $T = a_0 \cdot e^{a_1 \cdot t}$;
- *modifikovaná exponenciálna* $T = k + a_0 \cdot a_1^t$,
- *logistická* $T = \frac{k}{1 + a_0 \cdot a_1^t}$,
- *Gompertzova krivka* $T = k \cdot a_0^{a_1^t}$ ($\ln T = \ln k + a_1^t \cdot \ln a_0$).

Analýza sa u metódy analytického vyrovnávania časových radov realizuje v podstate pomocou *klasickej regresnej analýzy*. Časovú premennú tu môžeme vcelku ľubovoľne vyjadriť v akýchkoľvek časových jednotkách s ľubovoľným začiatkom. Pre odhad parametrov trendovej funkcie sa používa *metóda najmenších štvorcov* známa z regresnej analýzy (jedná sa vlastne o regresný model, kde v úlohe nezávislej premennej vystupuje čas). To sa týka pochopiteľne len funkcií lineárnych z hľadiska parametrov, resp. takých, ktoré je možné na tento typ upraviť vhodnou transformáciou, ako napr. exponenciálnu funkciu. V ostatných prípadoch sa používajú zložitejšie metódy odhadu. Tie sú však väčšinou aj tak podmienené štatistickým softvérom.

Pri metóde najmenších štvorcov požadujeme, aby súčet štvorcov odchýlok jednotlivých hodnôt časového radu od trendu $SS_R = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ bol minimálny, kde y_i , $i = 1, 2, \dots, n$; sú empirické (pozorované) hodnoty daného časového radu a $\hat{y}_i = \hat{T}_i$,



$i=1,2,\dots,n$; sú teoretické (odhadnuté) hodnoty sledovanej veličiny, počítané pomocou trendovej funkcie.

V prípade veľmi frekventovaného *lineárneho trendu* $T = a_0 + a_1 \cdot t$ získame aplikáciou metódy najmenších štvorcov pre bodové odhady $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ neznámych parametrov a_0 , a_1 sústavu normálnych rovníc v tvare

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 \cdot n + \hat{a}_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ \hat{a}_0 \cdot \sum_{i=1}^n t_i + \hat{a}_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 &= \sum_{i=1}^n t_i \cdot y_i,\end{aligned}$$

kde t_i , $i=1,2,\dots,n$; je označenie časových období.

Odhad lineárneho trendu je $\hat{y} = \hat{T} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \cdot t$.

Bodové odhady $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ a $\hat{a}_2$ neznámych parametrov a_0 , a_1 a a_2 *kvadratickej trendovej funkcie* (paraboly 2.stupňa) $T = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$ získame opäť metódou najmenších štvorcov riešením sústavy normálnych rovníc:

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 \cdot n + \hat{a}_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i + \hat{a}_2 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ \hat{a}_0 \cdot \sum_{i=1}^n t_i + \hat{a}_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 + \hat{a}_2 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^3 &= \sum_{i=1}^n t_i \cdot y_i, \\ \hat{a}_0 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 + \hat{a}_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^3 + \hat{a}_2 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^4 &= \sum_{i=1}^n t_i^2 \cdot y_i.\end{aligned}$$

Odhad kvadratického trendu je $\hat{y} = \hat{T} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \cdot t + \hat{a}_2 \cdot t^2$.

Pre odhad parametrov *exponenciálneho trendu* $T = a_0 \cdot a_1^t$ metódou najmenších štvorcov je nutné realizovať logaritmicke transformáciu $\ln T = \ln a_0 + t \cdot \ln a_1$. Po tejto transformácii potom vyrovnávame logaritmy hodnôt daného časového radu priamkou. Dostaneme túto sústavu normálnych rovníc:

$$\begin{aligned}\ln \hat{a}_0 \cdot n + \ln \hat{a}_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i &= \sum_{i=1}^n \ln y_i, \\ \ln \hat{a}_0 \cdot \sum_{i=1}^n t_i + \ln \hat{a}_1 \cdot \sum_{i=1}^n t_i^2 &= \sum_{i=1}^n t_i \cdot \ln y_i.\end{aligned}$$

Odhad exponenciálneho trendu je $\hat{y} = \hat{T} = \hat{a}_0 \cdot \hat{a}_1^t$.

Miery presnosti zvolenej trendovej funkcie

Ak sme zostavili model trendovej funkcie časového radu a odhadli jej parametre, zaujíma nás ďalej aj úroveň kvality tohto modelu, t.j. skúmame charakter rozdielov skutočných (empirických) hodnôt $y_1, y_2, \dots, y_n$ a vyrovnaných (teoretických) hodnôt $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ (akoukoľvek metódou). Vo všeobecnosti sa za najlepší považuje ten model, ktorý dáva najmenšie rezíduá $e_i = y_i - \hat{y}_i$, $i=1,2,\dots,n$.



Pre posúdenie presnosti zvolenej trendovej funkcie máme k dispozícii *reziduálne charakteristiky*, ktoré je možné zovšeobecniť pre ľubovoľný model časového radu, teda nie len pre trendové funkcie. Medzi najdôležitejšie reziduálne charakteristiky patria:

- *Priemerná absolútna percentuálna chyba (Mean Absolute Percentage Error)*

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|e_i|}{y_i} \cdot 100 \, \%.$$

- *Priemerná kvadratická chyba (Mean Squared Error)* $MSE = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n e_i^2$, kde k je počet odhadovaných parametrov danej trendovej funkcie.

- *Index determinácie (R-Square)* $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$, kde $\bar{y}$

je aritmetický priemer empirických hodnôt časového radu $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Charakteristiku *MAPE* vyjadrujeme v percentách. Používame ju vtedy, keď chceme zdôrazniť veľkosť prognózovanej premennej a pomer medzi veľkosťou chyby a veľkosťou prognózovanej premennej. Keďže ide o relatívnu charakteristiku presnosti, môžeme ju využiť aj pre porovnanie presnosti rovnakých alebo rozličných techník na dvoch celkom odlišných časových radoch. Je potrebné poznamenať, že neexistuje žiadna všeobecne prijatá stupnica, ktorá by určovala, aké hodnoty *MAPE* sú v analytickej praxi prijateľné. Ak je hodnota $MAPE \leq 5 \, \%$, je možné daný model hodnotiť ako kvalitný z hľadiska použitia pre tvorbu prognóz. Ak je $5 \, \% < MAPE \leq 10 \, \%$, je daný model k tvorbe prognóz stále použiteľný, ale ich kvalita je nižšia ako v prvom prípade. Ak je hodnota $MAPE > 10 \, \%$, daný model neposkytuje kvalitnú predpoveď.

Charakteristika *MSE* penalizuje veľké odchýlky predpovede, pretože chyba je umocnená na druhú. Na základe tejto charakteristiky preferujeme model, ktorý vykazuje mierne hodnoty chýb predpovede pred takým, ktorý vykazuje veľmi nízke hodnoty chýb a jednu extrémnu chybu predpovede.

Index determinácie R^2 udáva, koľko percent rozptylu vysvetľovanej premennej je vysvetlených modelom a koľko zostalo nevysvetlených. Pre index determinácie platí $0 \leq R^2 \leq 1$. Čím je jeho hodnota bližšia 1, tým uvažovaný model lepšie vystihuje skúmaný jav. Ak sa jeho hodnoty blížila k 0, signalizuje to stále menší súlad modelu s časovým radom.

Za najvhodnejší model pre opis dynamiky časového radu budeme považovať tú trendovú funkciu z daného zoznamu funkcií, ktorá vedie k maximálnej hodnote indexu determinácie. Takáto funkcia totiž najlepšie a najpresnejšie vystihuje reálny vývoj skúmaného javu v minulosti a je možné teda predpokladať, že podobným spôsobom bude vystihovať aj skutočnosť, ktorá nastane v budúcnosti.

Popri indexe determinácie R^2 sa často používa jeho druhá odmocnina, ktorá sa nazýva *index korelácie R*. Interpretácia indexu korelácie v teórii časových radov je celkom analogická ako v bežnej korelačnej analýze. Teda je možné konštatovať, že čím bude hodnota indexu korelácie bližšia 1, tým lepšie uvažovaný model vystihuje zákonitosti vývoja časového radu.



V praxi sa často stáva, že niekoľko trendových funkcií má veľmi blízke hodnoty indexu determinácie, resp. indexu korelácie. V týchto prípadoch dávame prednosť jednoduchšej trendovej funkcii.

Nedostatkom indexu determinácie je, že závisí na počte parametrov trendovej funkcie (jeho hodnota s počtom parametrov rastie). Tento nedostatok odstraňuje *modifikovaný index determinácie* (*Adjusted R-Square*) $R^{*2} = R^2 - \frac{(1 - R^2) \cdot (k - 1)}{n - k}$, kde k je počet parametrov trendovej funkcie. Výrazný rozdiel medzi indexom determinácie a modifikovaným indexom determinácie indikuje, že do modelu bolo zahrnutých príliš veľa parametrov.

Spomínané charakteristiky sú štandardne implementované v najrozšírenejších štatistických programových systémoch, ako sú SAS, STATGRAPHICS, STATISTICA, SPSS.

Súhrn

Skúmanie zmien javov v čase je jednou z najdôležitejších štatistických úloh. Základným prostriedkom štatistickej analýzy dynamiky hromadných javov sú časové rady. Analýza časových radov je hodnotným zdrojom informácií o priebehu skúmaného javu a často poskytuje základ pre úspešnú prognózu. Praktické skúsenosti ukazujú, že modely časových radov sú veľmi vhodné pre veličiny, na ktoré má vplyv mnoho nekontrolovateľných a nepostihnuteľných faktorov. V takýchto situáciách je možné predpokladať, že spoločné pôsobenie faktorov vyvoláva zmeny v úrovni vytvárania veličiny v jednotlivých časových obdobiach, a teda je možné veľkosť veličiny interpretovať ako funkciu času.

Kľúčové slová: analýza časových radov, dekompozícia, trendová zložka, predikcia, priemerná absolútna percentuálna chyba, priemerná kvadratická chyba, index determinácie

Príspevok bol pripravený v rámci riešenia grantového projektu VEGA 1/0464/09 Výskum mechatronických sústav imitujúcich lokomóciu hada v obmedzenom a premenlivom priestore.

Použitá literatúra

- [1] ARLT, J.: *Moderní metody modelování časových řad*. Grada Publishing, Praha, 1999.
- [2] CYHELSKÝ, L., KAŇOKOVÁ, J., NOVÁK, I.: *Základy teorie statistiky pro ekonomy*. SNTL/Alfa, Praha, 1979.
- [3] HANČLOVÁ, J., TVRDÝ, L.: *Úvod do analýzy časových řad*. VŠB-TU, Ostrava, 2003.
- [4] KŘIVÝ, I.: *Analýza časových řad*. Ostravská univerzita, 2006.
- [5] OSTERTAGOVÁ, E.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika v príkladoch*. Elfa, Košice, 2005.
- [6] SVATOŠOVÁ, L., KÁBA, B.: *Statistické metody 2*. PEF ČZU, Praha, 2008.

Kontaktná adresa

PhDr. Eva Ostertagová, PhD.
Technická univerzita v Košiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra matematiky a teoretickej informatiky
Němcovej 32, 040 01 Košice
e-mail: eva.ostertagova@tuke.sk