



## Hriadele

### Úvod do problematiky navrhovania hriadel'ov

Hriadele sú rotujúci časti strojov, zvyčajne kruhového prierezu, používané na prenos sily, krútiaceho momentu alebo rotačného pohybu. Hriadel' poskytuje os rotácie alebo os kývania pre časti strojov ako sú: ozubené kolesá, kladky, zotrvačníky, kľuky, ozubené kolesá a podobne, s možnosťou a riadenia geometrie ich pohybu (zalomené hriadele a pod.). Podľa účelu použitia a podľa funkčnosti môžeme hriadele rozdeliť na:

#### 1. Nápravy a osi

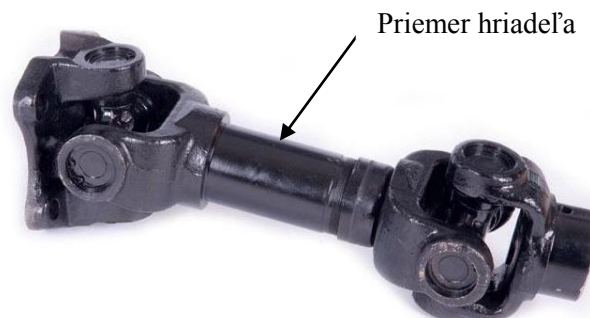
Náprava je nerotujúca strojná časť, ktorá nie je zaťažená žiadnym krútiacim momentom a slúži na podopretie rotujúcich kolies, kladiek a podobne. Široké využitie náprav je aj v oblasti automobilizmu, vlakovej dopravy a iných druhov transportu.



Nerotujúca náprava môže byť ľahko navrhnutá a analyzovaná ako statický nosník kruhového prierezu.

#### 2. Spojovacie hriadele

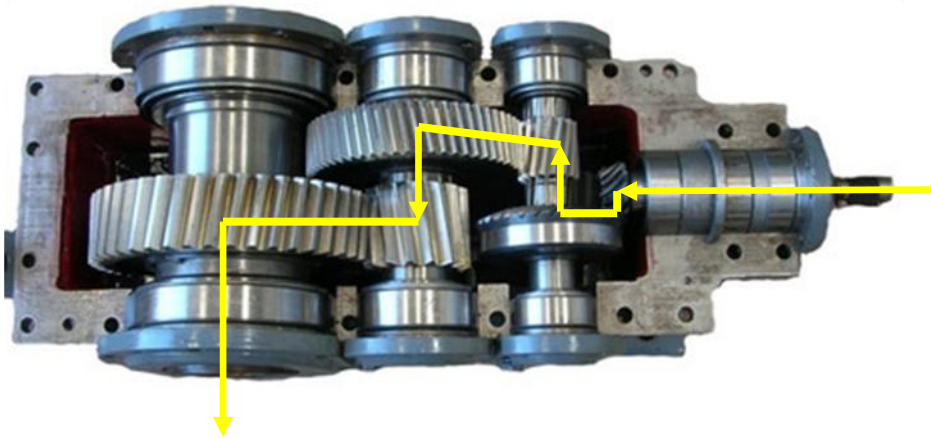
Za spojovacie hriadele sú považované také typy hriadel'ov ktoré slúžia na spájanie rôznych druhov zariadení. Spojovací hriadel' prenáša rotačný pohyb z jedného zariadenia na druhé a je zaťažený len krútiacim momentom. Praktickým príklad spojovacieho hriadel'a je na obr.





### 3. Univerzálne hriadele

Hriadele označované ako univerzálne, majú široké uplatnenie v rôznych typoch zariadení. Jedná sa o hriadele ktoré sú namáhané kombináciou krútiaceho momentu a ohybového momentu. Takýmito hriadelmi sú vstupné, predlohové, výstupné hriadele prevodoviek, rôzne hriadele hnacích (poháňaných) náprav a ďalších mechanizmov a pod.



Obr. Tok výkonu v viachriadeľovej viacstupňovej prevodovke



Obr. Hriadeľ viacstupňovej prevodovky

V prípade návrhu týchto hriadeľov je potrebné sa zamerať predovšetkým na kritické miesta. Kritické miesta budú zvyčajne na vonkajšom povrchu hriadeľov, v miestach axiálneho zaťaženia, v miestach kde je ohybový moment veľký a je kombinovaný s krútiacim momentom a kde existujú koncentrácie napätia (drážky pre pero, prechody, zápichy, závit a pod.). Priamym porovnaním rôznych takýchto miest po dĺžke hriadeľa je možné identifikovať hneď niekoľko kritických miest, na ktorých sa pri návrhu a kontrole hriadeľa treba predovšetkým zamerať na:

- a.) Napät'ovú kontrolu
- b.) Únavovú kontrolu
- c.) Deformačnú kontrolu
- d.) Kontrolu kmitania a kritických otáčok hriadeľa

Kritické miesta pre napät'ovú, únavovú a deformačnú kontrolu hriadeľa nemusia byť totožné.



*1. Návrh a kontrola nápravy, osi* – nerotujúce hriadele namáhané len momentom ohybovým

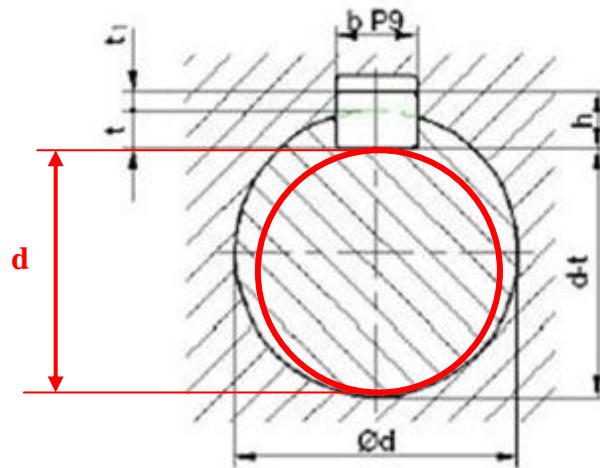


**2. Návrh a kontrola spojovacieho hriadeľa** – rotujúci hriadeľ namáhaný len krútiacim momentom



$\tau_D$  – zvyčajne pre prvé priblíženie volíme 12-30MPa

Následkom použitia tesného pera, alebo iného tvarového prvku na spájanie hriadeľa s nábojom dochádza k zníženiu skutočného priemeru hriadeľa. Pri návrhu je potom potrebné uvažovať s oslabeným prierezom hriadeľa a návrh priemeru bude návrhom oslabeného prierezu hriadeľa. (červená kružnica)



Deformačná podmienka:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p} \leq \varphi_D$$

$\varphi$  - uhol skrútenia [rad]  
 $l$  – dĺžka hriadeľa [m]

Dovolené skrútenie hriadeľa:

$$\varphi_D^{\cap} = \frac{\pi}{180} \cdot \varphi_D^{\circ}$$

$\varphi_D^{\circ}$  - dovolené skrútenie [°] – zvyčajne  $\varphi_D^{\circ} = 0,25^{\circ}/m$



**3. Návrh a kontrola univerzálneho hriadeľa** – kombinácia zaťaženia momentom ohybovým a momentom krútiacim

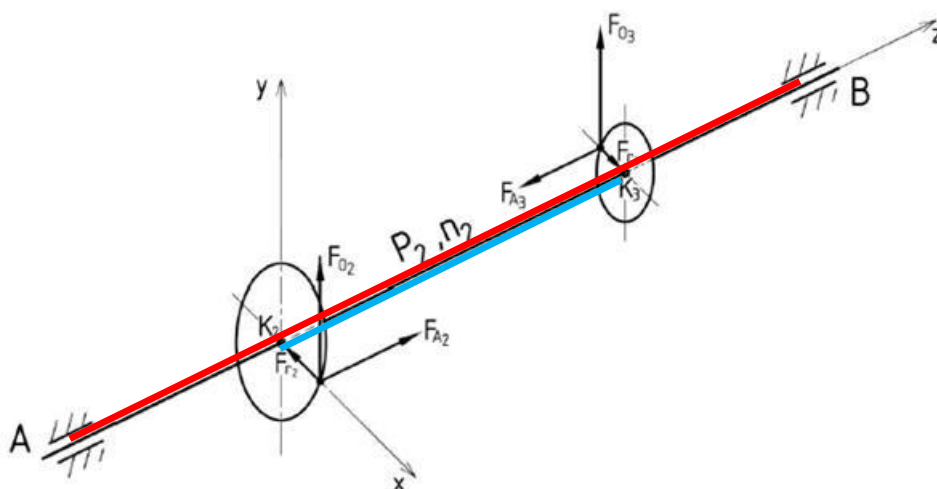
Namáhanie univerzálnych hriadeľov je kombinovaným namáhaním, ohybového momentu, axiálnej sily alebo krútiaceho momentu. Takto namáhaná však nie je celá dĺžka hriadeľa, ale len určité úseky, v závislosti od toku energie (toku prenášaného výkonu). Po vykonaní analýzy toku výkonu je možné identifikovať namáhanie jednotlivých úsekov hriadeľa (viď obr. Úvod).

Hriadele prevodovky budú prenášať krútiaci moment len na určitej časti. Krútiaci moment vstupuje do hriadeľa pri jednom prevodovom stupni a vystupuje z hriadeľa pri druhom prevodovom stupni. Krútiaci moment je pri prevádzke v ustálenom stave často relatívne konštantný. Šmykové napätie v dôsledku krútenia bude namáhať hriadeľ len na úseku kde krútiaci moment vstupuje a vystupuje z hriadeľa.

Ohybové momenty na hriadeľi možno určiť pomocou priebehov posúvajúcich síl a priebehu ohybových momentov. Na väčšine hriadeľov sú osadené ozubené kolesá alebo remenice, ktoré vytvárajú sily v dvoch rovinách, budú priebehy posúvajúcich síl a ohybového momentu všeobecne potrebné v dvoch rovinách. Výsledné momenty sa získajú súčtom momentov ako vektorov v bodoch rovinách pozdĺž osi hriadeľa. Fázový uhol momentov nie je dôležitý, pretože hriadeľ sa otáča. Stabilný ohybový moment vytvorí na rotujúcom hriadeľi úplne obrátený moment, pretože špecifický zaťažujúci prvok bude pri každej otáčke hriadeľa ho striedavo zaťažovať. Normálové napätie v dôsledku ohybových momentov bude najväčšie na vonkajších povrchoch. V situáciách, keď je ložisko umiestnené na konci hriadeľa, nie sú napätia v blízkosti ložiska často kritické, pretože ohybový moment je tam malý.

**a.) Napät'ová kontrola hriadeľa**

Schématické znázornenie predlohového hriadeľa a spôsob jeho zaťaženia



Kde:

$F_o$  – obvodová (tangenciálna sila)

$F_r$  – radiálna sila

$F_A$  – axiálna sila



TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH  
Strojnícka fakulta

**Konštruovanie strojov a strojových súčiastok**

Blok č: 7

Prednášajúci: prof. Ing. Robert Grega, PhD.

---

Priestorové zaťaženie hriadeľa je potrebné riešiť superpozíciou v rovinách, a hľadať riešenie v dvoch rovinách.

Výpočtový model v rovine z-x



TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH  
Strojnícka fakulta

**Konštruovanie strojov a strojových súčiastok**

Blok č: 7

Prednášajúci: prof. Ing. Robert Grega, PhD.

Výpočtový model v rovine z-y





TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH  
Strojnícka fakulta

**Konštruovanie strojov a strojových súčiastok**

Blok č: 7

Prednášajúci: prof. Ing. Robert Grega, PhD.

Pevnostné podmienky

---

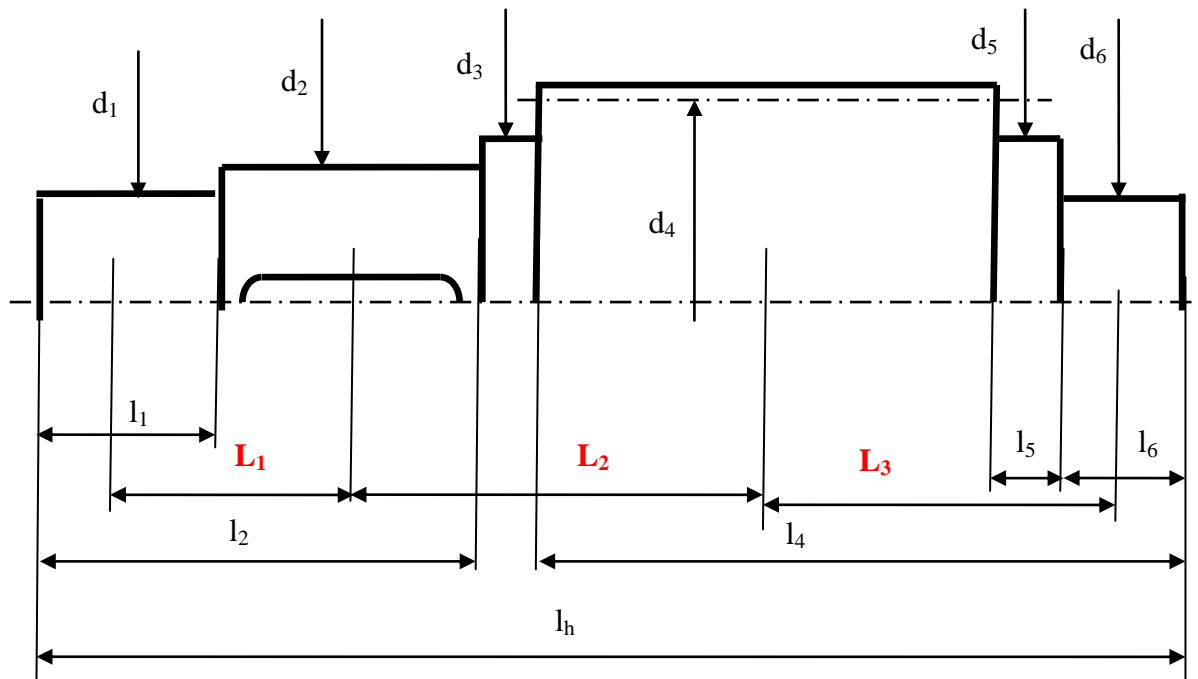


Výpočet priemeru hriadeľa v mieste K<sub>2</sub> a K<sub>3</sub>:

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{2red}}{\pi \cdot \sigma_D}}$$

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{3red}}{\pi \cdot \sigma_D}}$$

Návrh výsledného tvaru hriadeľa



Doporučenie k stanoveniu rozmerov a tvaru hriadeľa

1. Z napätových podmienok vypočítame priemer hriadeľa v kritických miestach (K<sub>2</sub> a K<sub>3</sub>)
2. Od kritických miest postupujeme k miestam reakcií, to jest k miestam kde budú ložiská.
3. Zmenšovanie rozmerov hriadeľa na ostatných úsekoch je potrebné realizovať pozvoľne v zmysle výsledného priebehu ohybového napätia.
4. Miesta kde budú ložiská musia mať hodnoty priemerov zhodné s normalizovanými hodnotami priemerov vnútorných krúžkov ložísk.



Konštruovanie strojov a strojových súčiastok

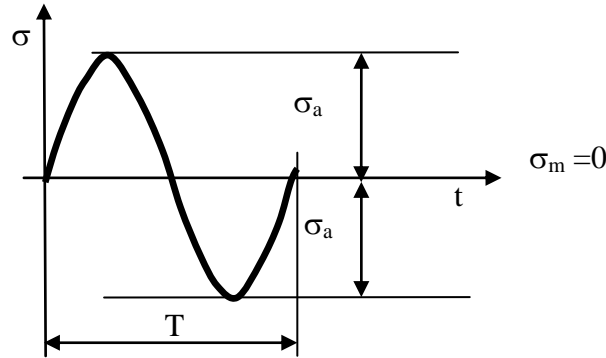
Blok č: 7

Prednášajúci: prof. Ing. Robert Grega, PhD.

b.) Únavová kontrola hriadeľa

V prípade ak vonkajšie zaťaženie spôsobujúce namáhanie hriadeľa na ohyb je konštantné, tak vplyvom otáčania hriadeľa, ten bude namáhaný striedavým ohybovým namáhaním.

Striedavý symetrický priebeh od ohybového napätia



Horné napätie:

$$\sigma_h = \sigma_m + \sigma_a$$

Dolné napätie:

$$\sigma_n = \sigma_m - \sigma_a$$

Stredné napätie:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_h + \sigma_n}{2} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

Amplitúda napätia:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_h - \sigma_n}{2} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

Súčiniteľ asymetrie cyklu:

$$r = \frac{\sigma_n}{\sigma_h}$$

Medzným stavom namáhania hriadeľa je stav kedy stredná hodnota napätia bude konštantná, alebo nulová a bude rásť len amplitúde napätia. Na hodnotu stredného napätia má vplyv nevyváženosť hriadeľa na amplitúdové napätie má vplyv vonkajšie zaťaženie hriadeľa. Pre stanovenie miery bezpečnosti použijeme známy postup vid' Smithové diagramy.

V prípade namáhania hriadeľov je bežným prípadom, že pri rastúcom amplitúdovom napätí rastie aj stredné napätie tak, že sa nemení ich pomer  $\sigma_a / \sigma_m$ . Pre stanovenie miery bezpečnosti použijeme známy postup vid'. Smithové diagramy.

Kde:

Po zohľadnení uvedených faktorov bude medza únavy pre reálnu súčiastku:

Pre striedavý ohyb:

$$\sigma_c^* = \frac{\sigma_c \cdot \nu_\sigma \cdot \epsilon_p}{\beta_\sigma}$$

Pre striedavý krut:

$$\tau_c^* = \frac{\tau_c \cdot \nu_\tau \cdot \epsilon_p}{\beta_\tau}$$



Miera bezpečnosti pre ohyb:

$$k_o = \frac{\sigma_c}{\sigma_a}$$

Miera bezpečnosti pre krut:

$$k_k = \frac{\tau_c}{\tau_a}$$

Výsledná miera bezpečnosti:

$$k = \frac{k_o \cdot k_k}{\sqrt{(k_o^2 + k_k^2)}}$$

Doporučené minimálne hodnoty celkovej bezpečnosti:

$k = 1,3 - 1,5$  - pri veľmi presne stanovenej napätosti, špecifických podmienkach výroby a presne dodržaných podmienkach použitia

$k = 1,5 - 1,8$  - pri menej presne stanovenej napätosti, menej presné podmienky výroby a menej presné podmienky použitia

$k = 1,8 - 2,5$  - hrubá presnosť stanovenej napätosti, hrubé podmienky výroby a pre hriadele priemerov viac ako 200mm.

### c.) Deformačná kontrola hriadeľa

V rámci deformačnej kontroly hriadeľa je potrebné sa zamerať na kontrolu priehybu hriadeľa, kontrolu naklopenia hriadeľa a kontrolu skrútenia hriadeľa. Deformačná kontrola hriadeľa čo i len v jednom mieste a jednou metódou si vyžaduje úplné informácie o tvare a rozmeroch pre celý hriadeľ. Z tohto dôvodu je žiadúce navrhnúť rozmery na kritických miestach tak, aby vyhovovali napäťovým podmienkam, a pred vykonaním analýzy deformácie doplniť primerané rozmery pre všetky ostatné tvary hriadeľa. Deformácia hriadeľa - priehyb aj naklopenie, by sa malo skontrolovať v mieste ozubených kolies a ložískách. Povolené priehyby budú závisieť od mnohých faktorov a na porovnanie deformácie hriadeľa a stanovenie jej vhodnosti by sa mali použiť hodnoty konkrétnych ložísk a ozubených kolies alebo by sa mali použiť katalógy ložísk a ozubených kolies. Ako hrubé vodítko sú typické rozsahy pre maximálne naklopenia a priečne priehyby osi hriadeľa uvedené nižšie.

Dovolené hodnoty naklopenia ložísk

Jednoradové guľičkové	- 6'..... 0,0017rad
Dvojradowé guľičkové naklápacie	- 3°..... 0,052rad
Jednoradové valčekové	- 6'..... 0,0017rad
Kuželikové	- 2'..... 0,0006rad

Dovolené hodnoty priehybu hriadeľa pod ozubeným kolesom

Ozubené koleso s čelnými zubami	- 0,01.m (mm)
Ozubené koleso kuželové alebo závitovkové	- 0,005.m (mm)
Všeobecný priehyb hriadeľa	- $(2 \cdot 10^{-4}$ až $3 \cdot 10^{-4}) \cdot L$ (mm)

Kde:

m – modul ozubenia (mm)

L – dĺžka hriadeľa (mm)



**Konštruovanie strojov a strojových súčiastok**

Blok č: 7

Prednášajúci: prof. Ing. Robert Grega, PhD.

Kontrola priehybu a naklopenia hriadeľa

Ako už bolo spomínané riešenie a návrh hriadeľa je vzhľadom na pôsobiace zaťaženie priestorovou úlohou. V prípade priestorovej úlohy je aj priehybová čiara hriadeľa priestorová. Výsledný priehyb a výsledné uhly naklopenia je možné stanoviť vektorovým súčtom z čiastkových riešených rovín kolmých na seba nasledovne:

Výsledný priehyb:

$$y_i = \sqrt{y_{izy}^2 + y_{izx}^2}$$

Výsledné naklopenie:

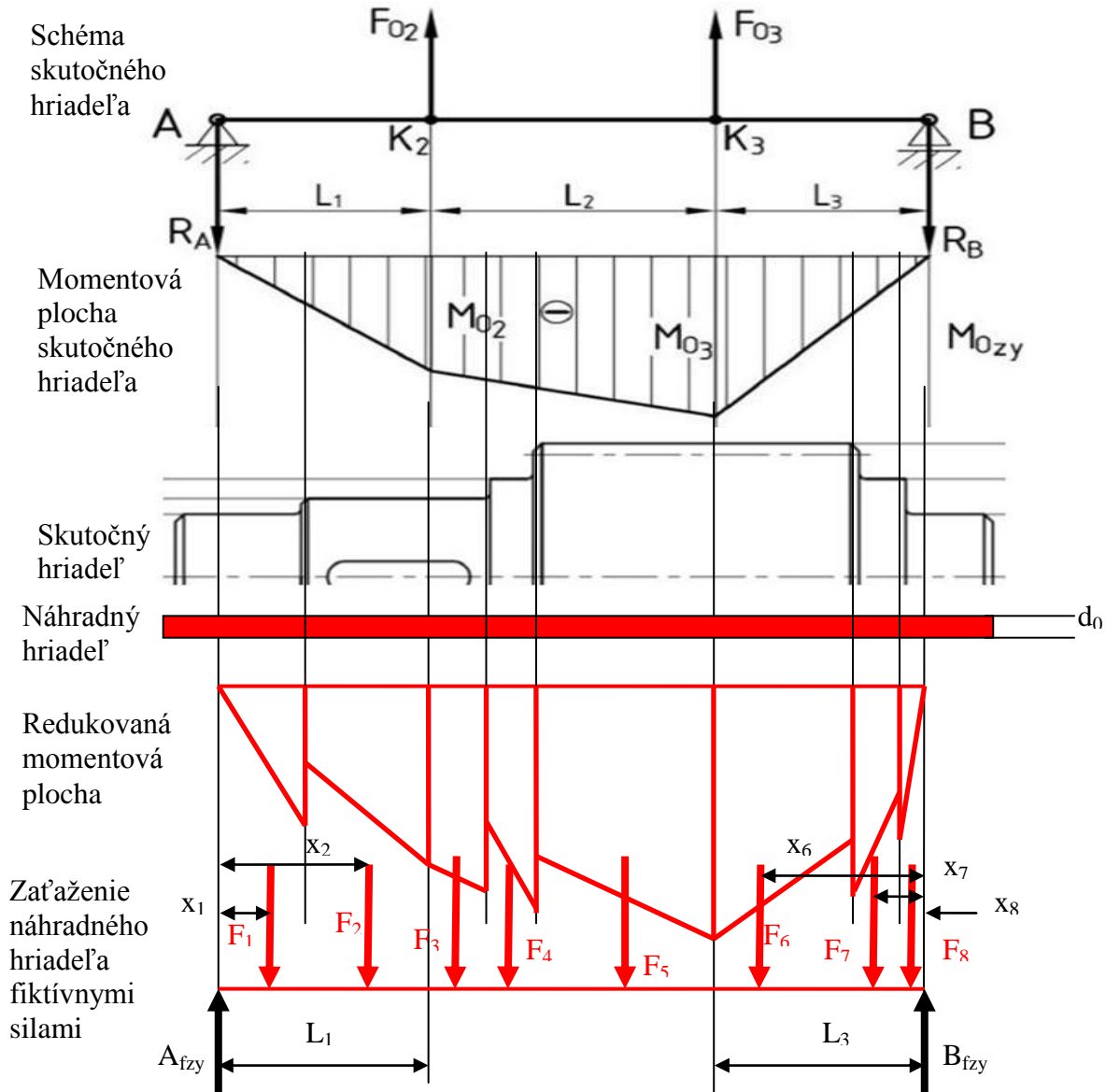
$$\alpha_i = \sqrt{\alpha_{izy}^2 + \alpha_{izx}^2}$$

Numerické riešenie priehybovej čiary v dvoch rovinách je pomerne náročné a preto sa v praxi zaužívalo používanie graficko – analytickej Maxwell – Mohrovej metódy.

Princíp tejto metódy spočíva na princípe nahradenia skutočného tvaru hriadeľa pozostávajúceho z rôznych priemerov, pomocou náhradnej tyče o jednom priemere. Táto náhrada sa uskutoční za predpokladu zachovania deformácie, kedy priehyb náhradnej tyče je totožný priehybu skutočného hriadeľa. Ak má byť splnená táto podmienka, musí dôjsť k redukcií momentovej plochy skutočného hriadeľa ktorá túto deformáciu spôsobuje a jej nahradeniu redukovanou náhradnou momentovou plochou namáhajúcou náhradnú tyč konštantného priemeru.

Postup môžeme zhrnúť do nasledovných krokov:

1. Stanovenie kvadratických momentov na všetkých priemeroch skutočného hriadeľa.
2. Stanovenie kvadratického momentu náhradného hriadeľa – náhradnej tyče.
3. Stanovenie hodnôt redukovaného momentu ohybového.
4. Vykreslenie priebehu redukovaného momentu ohybového na náhradnej tyči.
5. Stanovenie fiktívnych síl vyvolávajúcich priebeh redukovaného momentu ohybového.
6. Určenie pôsobiska fiktívnych síl.
7. Stanovenie fiktívnych reakcií na náhradnej tyči.
8. Určenie fiktívneho momentu ohybového, metódou rezu v kritickom mieste.
9. Stanovenie priehybu z priehybovej rovnice.
10. Stanovenie uhla naklopenia v mieste reakcií.



1. Stanovenie kvadratických momentov na všetkých priemeroch skutočného hriadeľa.  
Kvadratický moment skutočného rozmeru úseku hriadeľa:

$$I_i = \frac{\pi}{64} d_i^4$$

2. Stanovenie kvadratického momentu náhradného hriadeľa – náhradnej tyče.  
Kvadratický moment náhradného (fiktívneho) rozmeru hriadeľa:

$$I_0 = \frac{\pi}{64} d_0^4$$



Z pomeru kvadratických momentov:

$$\frac{I_0}{I_i} = \left(\frac{d_0}{d_i}\right)^4$$

3. Stanovenie hodnôt redukovaného momentu ohybového.

Redukovaný moment náhradného hriadeľa:

$$M_{ozy}' = M_{ozy} \cdot \frac{I_0}{I_i}$$

5. Stanovenie fiktívnych síl vyvolavajúcich priebeh redukovaného momentu ohybového.

Fiktívna sila nahradzujúca redukovanú momentovú plochu stále pôsobí v ťažisku nahradanej plochy a určí sa nasledovne:

Ak je plocha trojuholník:

$$F_i = \frac{1}{2} M_{oizy}' \cdot \frac{I_0}{I_i} \cdot l_i$$

Ak je plocha lichobežník:

$$F_i = \frac{1}{2} (M_{oizyL}' - M_{oizyP}') \cdot \frac{I_0}{I_i} \cdot l_i$$

Kde:

$l_i$  – dĺžka úseku nahradnej redukovanej momentovej plochy

6. Určenie pôsobiska fiktívnych síl.

Pôsobisko fiktívnej sily je v ťažisku plochy z ktorej bola stanovená a určí sa rozmerovou analýzou.

7. Stanovenie fiktívnych reakcií na náhradnej tyči.

Pri určení fiktívnych reakcií vychádzame z momentovej podmienky rovnováhy do bodu A a do bodu B.

$$\sum M_{fiA} = 0$$
$$\sum M_{fiB} = 0$$



Z podmienok rovnováhy

$$B_{fzy} = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3 + \dots + F_n \cdot x_n}{L}$$

$$A_{fzy} = \frac{F_1 \cdot (L - x_1) + F_2 \cdot (L - x_2) + \dots + F_n \cdot (L - x_n)}{L}$$

Musí platiť:

$$A_{fzy} + B_{fzy} = \sum F_i$$

8. Určenie fiktívneho momentu ohybového metódou rezu v kritickom mieste.

$$M_{fizy} = \sum F_i \cdot z_i$$

Fiktívny moment v kritickom mieste K<sub>3</sub>:

$$M_{f3zy} = B_{fzy} \cdot L_3 - F_8 \cdot (L_3 - x_8) - F_7 \cdot (L_3 - x_7) - F_6 \cdot (L_3 - x_6)$$

Fiktívny moment v kritickom mieste K<sub>2</sub>:

$$M_{f2zy} = A_{fzy} \cdot L_1 - F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2$$

9. Stanovenie priehybu z priehybovej rovnice.

$$y_{izy} = \frac{M_{fizy}}{E \cdot I_0}$$

Priehyb v kritickom mieste K<sub>2</sub>:

$$y_{2zy} = \frac{M_{f2zy}}{E \cdot I_0}$$

Priehyb v kritickom mieste K<sub>3</sub>:

$$y_{3zy} = \frac{M_{f3zy}}{E \cdot I_0}$$

10. Stanovenie uhla naklonenia v mieste reakcií.

Uhol naklonenia sa stanoví v mieste reakcií, to jest v mieste uloženia hriadeľa v ložiskách.





Výsledná hodnota fiktívnej reakcie sa určí:

$$A_f = \sqrt{A_{fzy}^2 + A_{fzx}^2}$$
$$B_f = \sqrt{B_{fzy}^2 + B_{fzx}^2}$$

Výsledné uhly naklopenia:

$$\alpha_A = \frac{A_f}{E \cdot I_0}$$
$$\alpha_B = \frac{B_f}{E \cdot I_0}$$

#### Kontrola skrútenia hriadeľa

Skrútenie hriadeľa má zmysel kontrolovať len na časti hriadeľa ktorá je skutočne skrúcaná. To znamená, že kontrolujeme len úsek hriadeľa medzi vstupom a výstupom krútiaceho momentu z hriadeľa.

Deformačná podmienka skrútenia:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p} \leq \varphi_D$$

$\varphi$  - uhol skrútenia [rad]

$l$  – dĺžka hriadeľa [m]

Dovolené skrútenie hriadeľa:

$$\varphi_D^{\cap} = \frac{\pi}{180} \cdot \varphi_D^{\circ}$$

$\varphi_D^{\circ}$  - dovolené skrútenie [°] – zvyčajne  $\varphi_D^{\circ} = 0,25^{\circ}/m$

$\varphi_D^{\circ} = 0,25 \cdot 10^{-2}$  rad/m – rázové zaťaženie

$\varphi_D^{\circ} = 0,5 \cdot 10^{-2}$  rad/m – premenlivé zaťaženie

$\varphi_D^{\circ} = (1-2) \cdot 10^{-2}$  rad/m – statické zaťaženie