

**TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH  
STROJNÍCKA FAKULTA**

**Tomáš BRESTOVIČ  
Natália JASMINSKÁ**

**NUMERICKÉ METÓDY A  
MODELOVANIE V ENERGETIKE**



**EDÍCIA ŠTUDIJNEJ LITERATÚRY**

**Košice 2015**



TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH  
STROJNÍCKA FAKULTA

**NUMERICKÉ METÓDY A  
MODELOVANIE V ENERGETIKE**

**Košice 2015**

**doc. Ing. Tomáš BRESTOVIČ, PhD.**

Technická univerzita v Košiciach

Strojnícka fakulta

Katedra energetickej techniky

[Tomas.Brestovic@tuke.sk](mailto:Tomas.Brestovic@tuke.sk)

**Ing. Natália JASMINSKÁ, PhD.**

Technická univerzita v Košiciach

Strojnícka fakulta

Katedra energetickej techniky

[Natalia.Jasminska@tuke.sk](mailto:Natalia.Jasminska@tuke.sk)

**Recenzenti:** doc. Ing. Miroslav **RIMÁR**, CSc. – FVT TUKE so sídlom v Prešove  
doc. Ing. Andrej **KAPJOR**, PhD. – Sjf ŽU v Žiline

© **Tomáš BRESTOVIČ**  
**Natália JASMINSKÁ**

ISBN **978-80-553-0223-2**

## **Predhovor**

Numerické modelovanie v energetike je inžinierska disciplína, ktorá sa zaoberá získavaním vedomostí o správaní sa energetických sústav v stacionárnych a nestacionárnych stavoch s využitím matematických postupov. K tomu využíva matematické popisy prenosu hmoty, energie a hybnosti, rešpektujúce základné fyzikálne zákony zachovania hmoty a energie a riešenie zodpovedajúcich rovníc alebo sústav rovníc s použitím výpočtovej techniky.

Vedomosti získané prostredníctvom matematických modelov sú potom využívané pri hľadaní vhodných spôsobov prevádzky energetických sústav najmä v zložitých prevádzkových a havarijných stavoch, pri spracovaní a overovaní návrhov technických projektov, pri riadení prebiehajúcich technologických procesov a pri analýzach bezpečnosti či návrhu bezpečnostných opatrení. V neposlednom rade sú tieto znalosti využívané aj na zabezpečenie hospodárnosti a spoľahlivosti prevádzky energetických sústav.

***Autori***

## Obsah

<b>Úvod</b> .....	<b>5</b>
<b>1 Numerické metódy riešenia prenosu tepla v energetických procesoch</b> <b>6</b>	
1.1 Základné poznatky z oblasti prenosu tepla a hmoty.....	6
1.1.1 Hmotnostná bilancia .....	6
1.1.2 Energetická bilancia .....	7
1.1.3 Tepelná energia.....	8
1.1.4 Prenos tepla .....	8
1.2 Numerické metódy riešenie Fourierovej diferenciálnej rovnice .....	21
1.2.1 Metóda konečných rozdielov .....	21
1.2.2 Metóda konečných diferencií.....	25
1.2.3 Metóda elementárnych bilancií.....	26
<b>2 Aplikácia matematického a fyzikálneho modelovania v energetike</b> ....	<b>32</b>
2.1 Metódy modelovania .....	32
2.1.1 Explicitne riešenie.....	34
2.1.2 Matematické modelovanie.....	34
2.1.3 Počítačové modelovanie .....	35
2.1.4 Fyzikálne modelovanie .....	35
2.2 Priame meranie.....	35
2.3 Verifikácia modelu .....	36
2.4 Tvorba matematických modelov.....	37
2.4.1 Diferenciálny tvar modelu .....	37
2.4.2 Integrálny tvar modelu .....	45
<b>3 Počítačová simulácia</b> .....	<b>48</b>
3.1 Simulačné programy .....	48
3.2 Základné časti simulácie .....	49
3.3 Vstupné údaje pre numerický výpočet.....	50
3.4 Výhody a nevýhody použitia simulácie.....	50
<b>4 Softvérová podpora pre simulačný program ANSYS CFX</b> .....	<b>52</b>
4.1 SPT-VK .....	52
4.2 SPT -NK.....	54
4.3 MPGM .....	54
<b>5 Stacionárne vedenie tepla rovinným rebrom</b> .....	<b>56</b>
5.1 Zadeinovanie úlohy .....	56
5.2 Numerické riešenie úlohy .....	57

5.3	Nastavenie ANSYS CFX-Pre.....	62
5.3.1	Definovanie okrajových podmienok (OP).....	63
5.3.2	Nastavenie riešiča.....	65
5.3.3	Ansyz CFX-Solver.....	67
5.3.4	Vyhodnocovanie výsledkov v ANSYS CFX-Post .....	68
<b>6</b>	<b>MODELOVANIE PRÚDENIA V ZMIEŠAVACEJ NÁDOBE .....</b>	<b>73</b>
6.1	Zadefinovanie úlohy.....	73
6.2	Postup vytvorenia skice a modelu .....	73
6.3	Vytvorenie siete – Meshing.....	76
6.4	Nastavenie ANSYS CFX-Pre („Setup“).....	80
6.5	Pracovné postupy pri vyhodnocovaní výsledkov .....	85
6.5.1	Nastavenie drôtového modelu .....	85
<b>7</b>	<b>DVOJROZMERNÉ PRÚDENIE PRI NÁHLOM ROZŠÍRENÍ PRIEREZU ....</b>	<b>92</b>
7.1	Zadanie.....	92
7.2	Vytvorenie skice a modelu v „Geometry“ .....	92
7.3	Vytvorenie siete v nástroji „Meshing“ .....	93
7.3.1	Nastavenie podmienok jednoznačnosti v časti „Setup“ .....	93
7.3.2	Nastavenie riešiča pre úlohu.....	95
7.4	Zobrazenie výsledkov – „Results“.....	95
<b>8</b>	<b>Prúdenie tekutín cez porézne materiály.....</b>	<b>100</b>
8.1	Zadanie.....	100
8.2	Vytvorenie skice a modelu v „Geometry“ .....	101
8.3	Vytvorenie siete v nástroji „Meshing“ .....	104
8.4	Nastavenie podmienok jednoznačnosti v časti „Setup“ .....	106
8.5	Zobrazenie výsledkov – „Results“.....	108
	<b>LITERATÚRA.....</b>	<b>112</b>



## ÚVOD

V živote každého človeka nastane okamih, kedy je potrebné vyriešiť určitý praktický problém. Aby bolo možné problém čo najjednoduchšie vyriešiť, je potrebné použiť celý rad nástrojov, ktoré to umožnia. Matematika je jedným z efektívnych nástrojov riešenia problémov. Algebra a matematická analýza síce umožňujú rozhodnúť sa o existencii jednoznačnosti riešenia určitého problému, ale iba v niektorých prípadoch dávajú aj konkrétny návod, ako daný problém riešiť. Cieľom numerických metód je preto vytvorenie efektívneho algoritmu pre riešenie najrôznejších matematických problémov. Formulácia úloh a spôsob ich riešenia sú závislé na skutočnosti, že v súčasnosti je potreba pracovať s efektívnym technickým nástrojom, ktorým je v súčasnosti počítač. Práca na počítači si vyžaduje, aby sa na vstupe zadal konečný počet číselných údajov a postupov, prostredníctvom ktorých sa po konečnom počte krokov dosiahne požadovaný výsledok. Ten je daný opäť konečným počtom výstupných číselných údajov. Inými slovami, cieľom riešenia akékoľvek úlohy je vyriešiť pomocou vhodného algoritmu numerickú úlohu.

Rýchly rozvoj počítačovej techniky v 90. rokoch 20. storočia umožnil využitie numerických výpočtových metód, ktoré dovtedy zostávali nástrojom vedeckých pracovníkov v teoretickej rovine, širokou technickou verejnosťou. Najpoužívanejšími metódami v súčasnej dobe, na ktorých je založené množstvo komerčných výpočtových programov, je metóda konečných prvkov, metóda konečných objemov a metóda konečných diferencií.

V minulosti sa v podmienkach praxe pre stanovenie technologických parametrov používali rovnice, odvodené pre zjednodušené podmienky rôznymi autormi. Výsledky, získané podľa jednotlivých teórií, sa niekedy od seba značne líšili, takže poskytovali iba akýsi odhad danej technológie a otvárali široké pole pre rôzne empirické vzťahy, či osobnú skúsenosť s neistým koncom. Tento postup však súčasne predstavoval menšie riziko pre vnesenie chýb do výpočtu, pretože zvyčajne išlo o dosadzovanie tabuľkových hodnôt do vyriešených rovníc. Počítačová simulácia predstavuje užívateľsky náročnejší postup než jednoduché dosadzovanie čísel do rovníc, avšak umožňuje vytvorenie vlastného modelu tzv. „šitého na mieru“. V tomto smere je potrebné mať na pamäti, že táto moderná metóda výpočtu pracuje so známymi fyzikálnymi zákonmi ako sú klasické teórie pružnosti a pevnosti či teórie z oblasti prenosu tepla a hmoty.

Numerické modelovanie je veľmi silným nástrojom pri riešení mnohých fyzikálnych javov v oblasti energetiky, ako je laminárne, prechodové a turbulentné prúdenie stlačiteľnej a nestlačiteľnej, jednofázovej aj viacfázovej tekutiny v jednoduchých i zložitých geometriách, s tým súvisiaci prenos tepla v tuhých látkach, kvapalinách i plynch s uvažovaním prirodzenej aj nútenej konvekcie a radiácie. Matematický model spočíva v definícii rovníc popisujúcich vyššie uvedené deje.

Dobrá znalosť vstupných parametrov, tzv. okrajových podmienok je nevyhnutným predpokladom úspešného zvládnutia simulačného riešenia. Nedôvera, ktorá občas panuje medzi technikmi z praxe voči počítačovému modelovaniu, má väčšinou základ v nesprávnej alebo chybné vykonanej simulácii a interpretácii výsledkov. Prepojenie teórie a praxe nie je teda nikde tak nevyhnutné ako v tomto odbore.

Cieľom skriptu zďaleka nie je podať vyčerpávajúci obraz o metódach numerického riešenia úloh z oblasti energetiky. Jedná sa predovšetkým o isté zoznámenie sa s týmito metódami. Osvojenie si efektívnych postupov by však malo kráčať ruka v ruke so snahou preniknúť do podstaty študovania danej problematiky. Jediné ten, kto si dokáže uvedomiť úskalía, s ktorými sa môže v priebehu výpočtu stretnúť, tak dokáže efektívne využívať softvérové produkty, ktoré sú v súčasnej dobe k dispozícii. Po kapitole 3. sú popísané numerické a analytické spôsoby riešenia problematiky prúdenia tekutín a prenosu tepla. Od kapitoly 4. sa skriptum venuje základom numerického modelovania v nástroji ANSYS CFX.

# 1 NUMERICKÉ METÓDY RIEŠENIA PRENOSU TEPLA V ENERGETICKÝCH PROCESOCH

Pochopenie oblasti prenosu tepla a hmoty je základom pre mnoho inžinierskych oblastí zahŕňajúcich mechanické zariadenia, ako sú motory, čerpadlá a transportné systémy (doprava oleja, chemikálie, potravín atď.), energetické stroje, zariadenia a systémy.

Základom simulačných výpočtov sú hmotnostné a energetické bilancie, bez ktorých by nebolo reálne možné simulovať procesy.

## 1.1 Základné poznatky z oblasti prenosu tepla a hmoty

Hmotnostná, energetická a tepelná bilancia patria medzi základné bilancie, s ktorými je potrebné uvažovať pri riešení najrozmanitejších energetických problémov.

### 1.1.1 Hmotnostná bilancia

Pre hmotnostnú bilanciu je nepochybne najdôležitejším zákonom zákon zachovania hmoty, ktorý uvádza, že hmotnosť v izolovanom systéme zostane vždy konštantná, bez ohľadu na procesy pôsobiace v rámci systému.

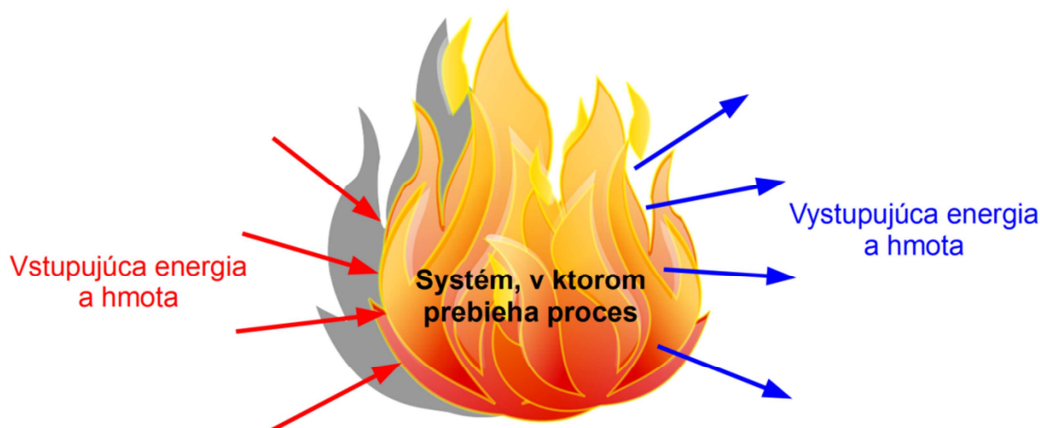
Chemické procesy možno podľa prúdenia hmoty deliť na:

- ✓ *Dávkové* - počas tohto procesu neprúdi vstupná a výstupná hmotnosť naraz.
- ✓ *Plynulé* - pri tomto procese prúdi vstupná a výstupná hmotnosť naraz.
- ✓ *Polodávkové* - tento proces sa nachádza medzi dávkovým a plynulým procesom.

Chemické procesy možno podľa premenlivosti v čase deliť na:

- ✓ *Ustálené* - sú procesy, pri ktorých sa hodnoty premenných procesu (napr. tlaky, teploty, objemy, rýchlosti tokov) nemenia s časom či len nepatrne kolíšu okolo ich strednej hodnoty.
- ✓ *Neustálené* - u týchto procesov sú hodnoty premenných značne závislé na čase. Patria tu dávkové a polodávkové procesy.

Hmotnostné bilancie počítajú s hmotnosťou vstupujúcou a vystupujúcou zo systému. Princíp hmotnostnej bilancie je znázornený na obr. 1.



Obr. 1 Hmotnostná a energetická bilancia

Hmotnostná bilancia sa najčastejšie vyjadruje v tvare:

$$\text{Vstupná hmota} - \text{výstupná hmota} = \text{nahromadená hmota}$$

Pre ustálené procesy platí:

$$\mathbf{Vstupná\ hmota = výstupná\ hmota}$$

Ak je hmotnostná bilancia písaná pre proces obsahujúci chemické reakcie, musí zahŕňať hmotu vytvorených a spotrebovaných látok počas chemickej reakcie.

Hmotnostné bilancie sa delia na:

- Diferenciálne bilancie* - označujú okamžitú zmenu v procese a sú uvažované pre okamžitý čas. Sú využívané predovšetkým u plynulých procesov a ak je to proces ustálený, tak je výsledok diferenciálnych bilancií pre ľubovoľné časy rovnaký. Každý člen diferenciálnej bilancie označuje prúd a hmotnostný prietok procesu a ich jednotkami je množstvo za jednotku času.
- Integrálne bilancie* - sú bilancie popisujúce priebeh zmeny v procese počas periódy, ktorá je ohraničená dvoma časmi. Používajú sa predovšetkým pre popis začiatku a konca dávkových procesov. Každý člen integrálnej bilancie označuje prúd procesu a hmotnosť materiálu a je vyjadrený v množstve.

### 1.1.2 Energetická bilancia

Ďalšou dôležitou súčasťou simulačných výpočtov je energia. Celkovú energiu systému možno rozdeliť na tieto tri zložky:

- Kinetická energia* je druhom mechanickej energie, ktorú má pohybujúce sa teleso a jej veľkosť závisí od hmotnosti a rýchlosti telesa.
- Potenciálna energia* - každé teleso, ktoré sa nachádza v potenciálnom poli určitej sily (napr. gravitačná, elektromagnetická), má potenciálnu energiu. Pre simulačné výpočty často stačí uvažovať iba s potenciálnou energiou v gravitačnom poli zeme.
- Vnútoraná energia* - medzi vnútornú energiu sa zahŕňajú všetky druhy energie okrem kinetickej a potenciálnej energie. Jedná sa predovšetkým o chemickú a elektrickú energiu.
- Energia* sa medzi sústavou a okolím môže prenášať vo forme tepla alebo práce. Teplo je prenášané vďaka teplotnému rozdielu medzi sústavou a okolím a vždy smeruje od teplejšieho telesa ku chladnejšiemu.

Sústavu možno rozdeliť na:

- Uzavretá sústava* - nedochádza u nej k prenosu hmoty z jej oblasti za dobu počas, ktorej dochádza k jej ustáleniu; uzavretou sústavou je dávkový proces.
- Otvorená sústava* - dochádza tu k prenosu energie medzi sústavou a okolím; otvorenou sústavou je polodávkový a plynulý proces.

Základom každej energetickej bilancie je prvý zákon termodynamiky, ktorý uvádza, že v izolovanej sústave zostáva zachované celkové množstvo energie podľa vzťahu:

$$\Delta U = Q - W \tag{1}$$

kde:  $\Delta U$  je zmena vnútornej energie sústavy, ktorej hodnota je závislá iba na stavových veličinách (J),  $Q$  – teplo (J) vyjadruje časť vnútornej energie, ktorú si sústava vymení pri styku s inou sústavou, pričom nedochádza ku konaniu práce; pokiaľ je  $Q > 0$  sústava teplo prijíma a ak je  $Q < 0$  sústava teplo odovzdáva.  $W$  – je práca (J) - jej veľkosť je rovná veľkosti premenenej energie; pokiaľ je  $W > 0$  sústava koná prácu a ak je  $W < 0$  sústava spotrebováva prácu.

### 1.1.3 Tepelná energia

Teplo alebo tepelná energia je vnútorná energia, ktorú teleso prijme, alebo ju odovzdá, pri tepelnej výmene inému telesu. Teplo si vymieňajú iba telesá s rôznou teplotou. Vyjadruje zmenu stavu telesa. Pre výpočet tepla potrebného na zvýšenie teploty telesa za predpokladu, že medzi teplotami nedôjde k fázovej premene platí:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T \quad (2)$$

kde:  $Q$  je teplo (J),  $c$  – merná tepelná kapacita ( $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  $m$  – hmotnosť (kg),  $\Delta T$  – rozdiel teplôt telesa (K). Tepelný tok je možné vypočítať zo vzťahu:

$$P = \frac{dQ}{d\tau} \quad (3)$$

kde:  $P$  je tepelný tok (W). Jeho dosadením do rovnice (1) a úpravou dostávame:

$$P = m \cdot c \cdot \frac{dT}{d\tau} = C \cdot \frac{dT}{d\tau} \quad (4)$$

kde:  $C$  je tepelná kapacita látky ( $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ ).

Tepelná kapacita vyjadruje množstvo tepla, ktoré je potrebné dodať látke, aby sa jej teplota zvýšila o  $1 \text{ }^\circ\text{C}$  (resp. K). Je určená ako podiel tepla dodaného (odobratého) a teplotnej zmeny:

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \quad (5)$$

Tepelnú kapacitu telesa môžeme vyjadriť aj v tvare:

$$C = m \cdot c \quad (6)$$

Teplo sa prenáša z jedného bodu priestoru do druhého vplyvom rozdielu teplôt týchto bodov. Druhá veta termodynamiky určuje smer tepelného toku, ktorý prechádza z miesta s vyššou teplotou do miesta s nižšou teplotou.

### 1.1.4 Prenos tepla

Pre riešenie, resp. navrhovanie energetických systémov je z hľadiska energetických bilancií najdôležitejší prenos tepla. Prenos tepla je spôsobený teplotným rozdielom medzi termodynamickými systémami. Teplo sa prostredím šíri pomocou troch základných spôsobov:

- 1.) **Vedenie tepla (kondukcia)** – k vedeniu tepla dochádza tak, že častice látky v oblasti s vyššou strednou kinetickou energiou odovzdávajú časť svojej pohybovej energie prostredníctvom vzájomného zrážania častíc časticiam, ktoré sa nachádzajú v oblasti s nižšou kinetickou energiou. Častice počas tohto spôsobu kmitajú okolo svojich rovnovážnych osí. Najčastejším prípadom vedenia tepla je výmena tepla medzi dvoma pevnými telesami s rozdielnymi teplotami.
- 2.) **Prúdenie tepla (konvekcia)** - pri tomto spôsobe dochádza k výmene tepla prúdením hmoty o rôznej teplote. K prúdeniu dochádza iba u kvapalín a plynov. Teplo sa medzi rôznymi časťami hmotného útvaru prenáša vďaka premiešavaniu jednotlivých častí hmoty s odlišnou teplotou.
- 3.) **Žiarenie tepla (radiácia)** - teleso vyžaruje teplo do okolia, ak je jeho teplota vyššia ako okolie. V opačnom prípade teleso teplo pohlcuje. Tepelná energia je prenášaná pomocou elektromagnetických vln. Tepelné žiarenie nepotrebuje, na rozdiel od vedenia tepla a prúdenia, látkové prostredie a môže sa tak šíriť aj vo vákuu.

K prenosu tepla dochádza v dôsledku rozdielu teplôt - *teplo si vymieňajú iba telesá s rôznou teplotou*, pričom teplo sa pohybuje z miest teplejších do miest chladnejších.

Prenos tepla je teda závislý od rozdelenia teplôt v danom priestore, ktoré je charakterizované pojmom *teplotné pole*, *teplotný gradient*, *teplotný spád*.

*Každému bodu v priestore odpovedá v danom časovom okamihu určitá hodnota teploty.*

Matematicky je možné teplotné pole popísať funkciou:

$$t = f(x, y, z, \tau) \quad (7)$$

Vo všeobecnosti je možné konštatovať, že teplota sa v teplotnom poli mení v závislosti od súradníc  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a času  $\tau$ . Takého pole sa nazýva *trojrozmerné a nestacionárne*.

**Nestacionárne (neustálené) teplotné pole** – teplotné rozdiely medzi jednotlivými telesami, medzi ktorými sa teplo prenáša, sa postupne vyrovnávajú. Pri neustálenom vedení tepla dochádza k zmene teploty v jednotlivých častiach telesa.

$$\frac{dt}{d\tau} \neq 0 \quad (8)$$

$$\frac{dt}{d\tau} > 0 \quad \text{teplota v danom priestore stúpa (ohrev)} \quad (9)$$

$$\frac{dt}{d\tau} < 0 \quad \text{teplota v danom priestore klesá (ochladzovanie)} \quad (10)$$

Nestacionárny prenos tepla vedením je charakterizovaný diferenciálnou rovnicou vedenia tepla (II. Fourierov zákon):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (11)$$

kde  $a$  je teplotná vodivosť materiálu definovaná podielom tepelnej vodivosti a súčinu hustoty a špecifickej tepelnej kapacity ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ).

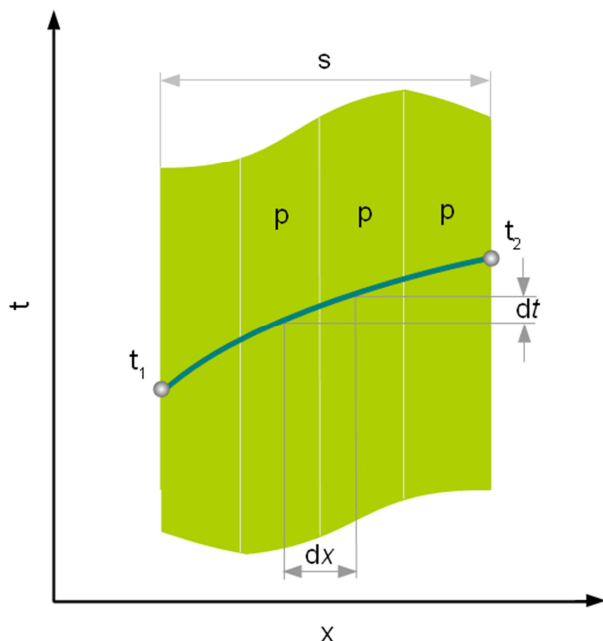
Ak sa teplota s časom v teplotnom poli nemení, jedná sa o *stacionárne pole*.

**Stacionárne (ustálené) teplotné pole** – teplotné rozdiely medzi jednotlivými časťami telesa sa nemenia v čase:

$$\frac{dt}{d\tau} = 0 \quad (12)$$

Podľa počtu súradníc v závislosti, od ktorých sa mení teplota, rozlišujeme teplotné pole *jednorozmerné, dvojrozmerné a trojrozmerné*.

Súhrn bodov v teplotnom poli, ktoré majú rovnakú teplotu tvorí *izotermickú plochu* (Obr. 2). Izotermické plochy sú pri jednorozmernom vedení tepla rovinnou stenou znázornené priamkami  $p$ , ktoré sú v danom prípade rovnobežné s povrchom stien.



Obr. 2 Jednorozmerné stacionárne pole v stene o hrúbke  $s$ , pre ktoré platí  $t = f(x)$

Zmena teploty je v závislosti od polohy (súradníc  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) charakterizovaná *teplotným gradientom*. Prírastok teploty, pripadajúci na jednotku dĺžky v smere kolmom na izotermickú plochu, je gradient teploty.

Pre jednorozmerné teplotné pole platí:

$$\text{grad } t = \frac{dt}{dx} \quad (13)$$

Pri lineárnej zmene teploty v závislosti od súradnice  $x$  platí:

$$\text{grad } t = \frac{dt}{dx} = \frac{t_2 - t_1}{s} \quad (14)$$

kde  $s$  je hrúbka steny (m).

V *nestacionárnom teplotnom poli* je gradient teploty závislý od času. V trojrozmernom poli je teplotný gradient daný vzťahom:

$$\text{grad } t = \frac{dt}{dn} = \frac{dt}{dx} \vec{i} + \frac{dt}{dy} \vec{j} + \frac{dt}{dz} \vec{k} \quad (15)$$

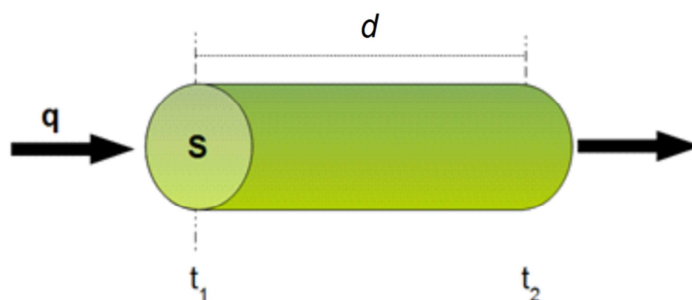
kde:  $n$  – normála k izotermickej ploche a  $i$ ,  $j$ ,  $k$  sú jednotkové vektory v smere osí  $x$ ,  $y$  a  $z$ .

**Gradient teploty** je vektor a jeho kladný smer je volený v smere stúpajúcej teploty, teda proti smeru vedeniu tepla.

**Teplotný spád** je hodnota rovnako veľká ako gradient teploty, má však opačný smer.

*Prenos tepla* v tuhom telese je priamo úmerný gradientu teploty a ploche kolmej na smer toku tepla.

Uvažujme tyč dĺžky  $d$ . Jeden koniec tyče je udržiavaný na teplote  $t_1$  a druhý je udržiavaný na teplote  $t_2$ . Teplotný rozdiel je stály, teplota klesá rovnomerne od teplejšieho konca k chladnejšiemu. Zjednodušene povedané za čas  $\tau$  pretečie prierezom tyče  $S$  tepelný tok veľkosti  $Q$  (Obr. 3).



Obr. 3 Prenos tepla vedením - I. Fourierov zákon

Pre stacionárne jednorozmerné teplotné pole platí rovnica:

$$Q = \lambda \cdot S \cdot \frac{(t_2 - t_1)}{d} \cdot \tau \quad (\text{W}) \quad (16)$$

kde  $\lambda$  je súčiniteľ tepelnej vodivosti ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ).

Hustota plošného tepelného toku je charakterizovaná I. Fourierovým zákonom:

$$q = \frac{Q}{S\tau} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}) \quad (17)$$

Podľa predchádzajúceho vzťahu potom platí:

$$q = \lambda \frac{(t_2 - t_1)}{d} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}) \quad (18)$$

**Tepelná vodivosť** je fyzikálna vlastnosť látky, udávajúca množstvo tepla, ktoré prejde vedením jednotkovou plochou pri jednotkovom teplotnom spáde ( $1 \text{ }^\circ\text{C}/1 \text{ m}$ ).

Tepelná vodivosť látky závisí od jej stavu – štruktúry, hustoty, vlhkosti, tlaku, teploty a pod. Pre teplototechnické výpočty je dôležitá jej závislosť od teploty podľa vzťahu:

$$\lambda = \lambda_0 \pm b \cdot t \quad (19)$$

kde:  $\lambda$  – tepelná vodivosť pri teplote  $t$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  $\lambda_0$  – tepelná vodivosť pri teplote  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  $b$  – konštanta. Hodnoty  $\lambda_0$  a  $b$  sa stanovujú experimentálne.

Ak sa stanovuje tepelný tok medzi teplotami  $t_1$  a  $t_2$ , vo výpočtoch sa používa stredná hodnota tepelnej vodivosti:

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad (20)$$

kde:  $\lambda_1$  je tepelná vodivosť pri teplote  $t_1$ ,  $\lambda_2$  – pri teplote  $t_2$ .

Tepelná vodivosť tuhých látok, ktoré majú kompletnú kryštalickú stavbu, s rastúcou teplotou klesá. Patria sem kovy.

V pórovitých materiáloch tepelná vodivosť s teplotou rastie. Póry, ktoré sú vyplnené vzduchom, tvoria odpor proti prenosu tepla – vzduch má malú tepelnú vodivosť. Tepelná vodivosť vlhkých pórovitých materiálov je väčšia ako suchých.

Podľa veľkosti tepelnej vodivosti sa tuhé látky rozdeľujú do troch skupín:

1. **skupina** - kovy, ktoré majú najväčšiu tepelnú vodivosť. Kovy s veľkou elektrickou vodivosťou majú súčasne veľkú tepelnú vodivosť ( $2,3$  až  $420 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ).
2. **skupina** - žiaruvzdorné a keramické materiály s tepelnou vodivosťou  $0,7$  až  $7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**3. skupina** - minerály a stavebné hmoty, látky ktoré majú veľmi malú tepelnú vodivosť 0,01 až 0,7 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>. Ich tepelná vodivosť je ovplyvnená ich pórovitosťou. Stavebné hmoty s tepelnou vodivosťou < 0,25 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>, sa označujú ako izolačné materiály.

Tepelná vodivosť plynov sa pohybuje v rozmedzí 0,006 až 0,6 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>. S rastúcou teplotou stúpa a nie je závislá od tlaku.

Tepelná vodivosť kvapalín sa pohybuje v rozmedzí 0,09 až 0,7 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup> a s rastúcou teplotou klesá. Len voda a glycerín sú výnimkou.

Najväčšiu tepelnú vodivosť nemá paradoxne kov, ale diamant. Pohybuje sa v rozmedzí 900 až 2300 W·m<sup>-1</sup>·K<sup>-1</sup>.

### Stacionárne vedenia tepla rovinnou stenou

Najčastejším prípadom stacionárneho prenosu tepla vedením je prenos tepla v jednorozmernom teplotnom poli cez rovinnú stenu alebo valcovú stenu.

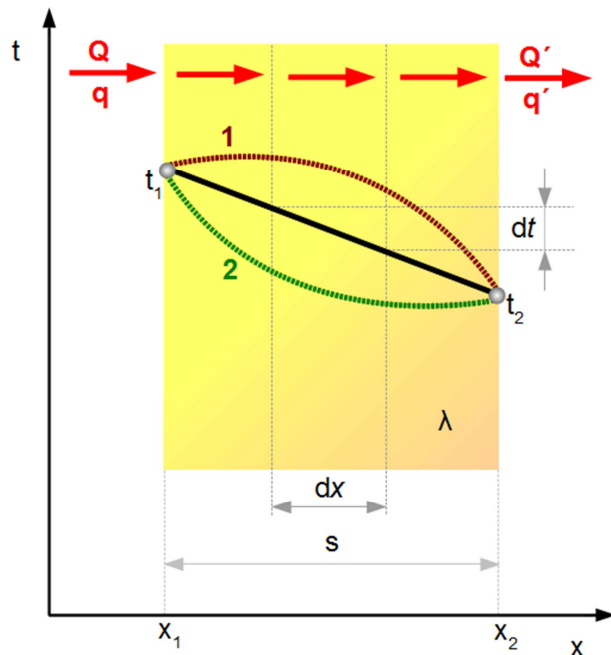
Stacionárny prenos tepla vedením jednorozmerným teplotným poľom charakterizuje I. Fourierová rovnica:

$$dq = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad (21)$$

Pre stanovenie tepelného toku Q platí rovnica:

$$Q = q \cdot S \quad (W) \quad (22)$$

Na obr. 4 je znázornená rovinná stena o hrúbke  $s$  a teplotách na ľavej strane  $t_1$  a na pravej strane  $t_2$ . Hustota plošného tepelného toku  $q$  je v stacionárnom poli konštantná. Plošný tepelný tok postupuje z ľavej strany na pravú stranu. Podľa zákona zachovania hmoty a energie (v izolovanej sústave je celková energia nemenná; energia nevzniká ani nezaniká, len sa premieňa na inú formu. Teda platí podmienka:  $q = q'$ .



Obr. 4 Vedenie tepla v rovinnej stene



V prípade, že je tepelná vodivosť  $\lambda$  konštantná, je priebeh teplôt po hrúbke steny lineárny. Ak  $\lambda$  s rastúcou teplotou stúpa, priebeh teplôt zodpovedá krivke 1 na obr. 4. Ak  $\lambda$  s rastúcou teplotou klesá, priebeh teplôt zodpovedá krivke 2.

Pre zjednodušenie sa predpokladá tepelná vodivosť nezávislá od teploty  $\lambda = \text{konšt.}$  Zo vzťahu vyplýva:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} \rightarrow dt = -\frac{q}{\lambda} dx \quad (23)$$

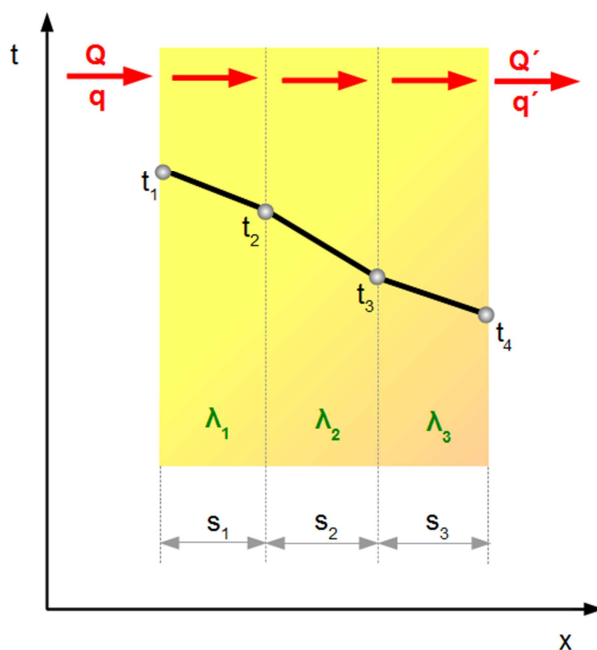
Po integrácii, pre okrajové podmienky  $x = 0, t = t_1, x = s, t = t_2$  platí:

$$q = \frac{\lambda}{s} (t_1 - t_2) \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}) \quad (24)$$

Hustota plošného tepelného toku vedením v rovinnej homogénnej stene je priamo úmerná tepelnej vodivosti a rozdielu teplôt a nepriamo úmerná hrúbke steny.

Výraz  $\lambda/s$  sa nazýva *vodivosť steny* a jeho prevrátená hodnota je *tepelný odpor steny – schopnosť steny „zabraňovať“ tepelným stratám. Vyjadruje tepelnoizolačné vlastnosti konštrukcie. Je priamo úmerný od hrúbky konštrukcie a nepriamo úmerný tepelnej vodivosti. Vyššiu hodnotu odporu dosiahneme zväčšením hrúbky konštrukcie, alebo voľbou materiálu s čo najnižšou  $\lambda$ .*

Steny v priemyselných aplikáciách sú zväčša zložené z viacerých vrstiev s rôznou hrúbkou a tepelnou vodivosťou.



Obr. 5 Vedenie tepla v rovinnej zloženej stene

Na obr. 5 je stena zložená z troch vrstiev o hrúbkach  $s_1, s_2, s_3$ . Predpokladá sa, že jednotlivé vrstvy na seba tesne doliehajú a pre ich tepelnú vodivosť platí:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \quad (25)$$

V stacionárnom stave je tepelný tok  $Q$ , resp. hustota plošného tepelného toku  $q$ , ktorá prechádza jednotlivými vrstvami steny rovnaká.

$$\text{Pre 1. vrstvu platí: } q = \frac{\lambda_1}{s_1} (t_1 - t_2) \quad (26)$$

$$\text{Pre 2. vrstvu platí: } q = \frac{\lambda_2}{s_2} (t_2 - t_3) \quad (27)$$

$$\text{Pre 3. vrstvu platí: } q = \frac{\lambda_3}{s_3} (t_3 - t_4) \quad (28)$$

Úpravou týchto rovníc sa získa vzťah pre vedenie tepla v trojvrstvovej stene:

$$\text{Pre 1. vrstvu: } t_1 - t_2 = q \cdot \frac{s_1}{\lambda_1} \quad (29)$$

$$\text{Pre 2. vrstvu: } t_2 - t_3 = q \cdot \frac{s_2}{\lambda_2} \quad (30)$$

$$\text{Pre 3. vrstvu: } t_3 - t_4 = q \cdot \frac{s_3}{\lambda_3} \quad (31)$$

Sčítaním rovníc pre jednotlivé vrstvy a úpravou získame vzťah pre prenos tepla zloženou rovinnou stenou:

$$q = \frac{t_1 - t_4}{\left( \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} \right)} \quad (32)$$

Pre prenos tepla vedením v stene zloženej z  $n$ -vrstiev platí všeobecný vzťah:

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i}} \quad (33)$$

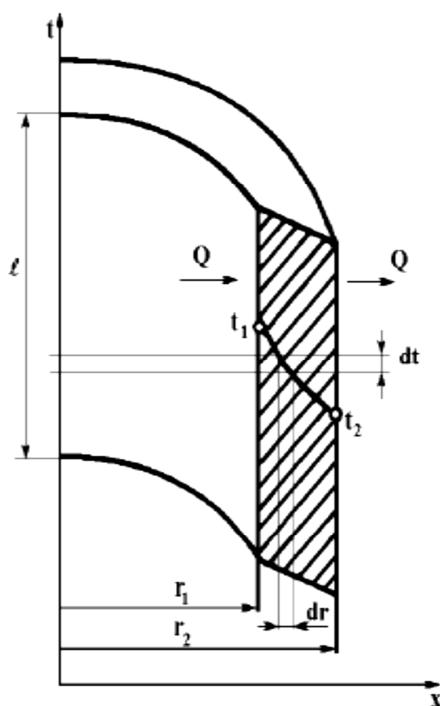
Pri odvodení vyššie uvedených vzťahov sa predpokladá, že vrstvy majú na stykových plochách rovnaké teploty. To znamená, že vrstvy na seba doliehajú.

V mnohých prípadoch sú však medzi vrstvami väčšie alebo menšie medzery, ktoré vznikajú u staršieho muriva uvoľňovaním tehál a malty. Vzniká teda viac alebo menej súvislá vrstva vzduchu v dôsledku drsnosti, či nerovnosti stýkajúcich plôch. Teploty stýkajúcich plôch potom nie sú rovnaké.

Pretože tepelná vodivosť vzduchu je malá ( $\lambda = 0,025 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ), vzduchové medzery zvyšujú tepelný odpor steny. V niektorých prípadoch je medzi murivami úmyselne vytvorená medzera, ktorá vytvára izolačnú vrstvu, cez ktorú teplo prechádza nielen vedením ale aj žiarením a prúdením.

### **Stacionárne vedenia tepla valcovou stenou**

Na obr. 6 je znázornená valcová stena (rúrka) s vnútorným polomerom  $r_1$  a vonkajším  $r_2$  s výškou  $l$ .



Obr. 6 Vedenie tepla v jednoduchej valcovej stene

Predpokladáme, že tepelná vodivosť  $\lambda = \text{konšt.}$  a povrchové teploty  $t_1$  a  $t_2$  sú konštantné. Teplota sa mení len v radiálnom smere  $r$ .

Teplotné pole je teda *jednorozmerné a stacionárne*. Izotermické plochy sú súosové valcové plochy s osou valca. Vo vzdialenosti  $r$  sa vyberie elementárna vrstva  $dr$ . Pre hustotu plošného tepelného toku, ktorá prejde elementárnou vrstvou podľa I. Fourierového zákona platí:

$$dq = -\lambda \frac{dt}{dr} \quad (W) \quad (34)$$

Pre tepelný tok platí rovnica:

$$Q = q \cdot S \quad (W) \quad (35)$$

Pre výpočet povrchu valca platí:

$$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \quad (36)$$

Po dosadení rovnice (34) a (36) do rovnice (35) dostávame vzťah:

$$Q = -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \frac{dt}{dr} \quad (37)$$

Po integrácia pri okrajových podmienkach  $r = r_1, t = t_1, r = r_2, t = t_2$ , platí:

$$Q \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot l \int_{t_1}^{t_2} dt \quad (38)$$

$$Q \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot l (t_2 - t_1) = \lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot l (t_1 - t_2) \quad (39)$$

$$Q = \frac{\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (t_1 - t_2) \quad (40)$$

Podiel  $r_2/r_1$  sa môže nahradit' podielom  $d_2/d_1$ .

Hustota plošného tepelného toku  $q$  sa môže vzťahovať buď na jednotku vnútorného alebo vonkajšieho povrchu valca.

a) na jednotku vnútorného povrchu

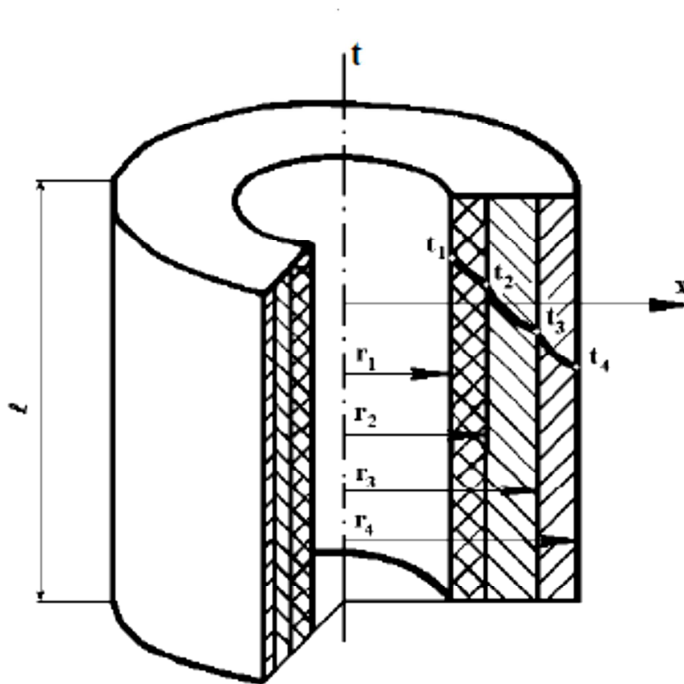
$$q_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{\frac{\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot l}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2)}{\pi \cdot d_1 \cdot l} = \frac{2 \cdot \lambda}{d_1 \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2) \quad (41)$$

b) na jednotku vonkajšieho povrchu

$$q_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{\frac{\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot l}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2)}{\pi \cdot d_2 \cdot l} = \frac{2 \cdot \lambda}{d_2 \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2) \quad (42)$$

Priebeh teplôt v homogénnej valcovej stene pri  $\lambda = \text{konšt.}$  je logaritmický.

Na obr. 7 je znázornená valcová stena skladajúca sa z troch vrstiev. Tepelná vodivosť jednotlivých vrstiev je konštantná a platí podmienka  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$



Obr. 7 Vedenie tepla v zloženej valcovej stene

V stacionárnom stave pre prenos tepla vo valcovej stene pre jednotlivé vrstvy platí:

Pre 1. vrstvu platí:  $Q = \frac{\lambda_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot l}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2) \quad (43)$

$$\text{Pre 2. vrstvu platí: } Q = \frac{\lambda_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot l}{\ln \frac{d_3}{d_2}} (t_2 - t_3) \quad (44)$$

$$\text{Pre 3. vrstvu platí: } Q = \frac{\lambda_3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot l}{\ln \frac{d_4}{d_3}} (t_3 - t_4) \quad (45)$$

Úpravou týchto rovníc sa získa vzťah pre vedenie tepla v trojvrstvovej stene:

$$\text{Pre 1. vrstvu: } t_1 - t_2 = \frac{Q}{\lambda_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot l} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} \quad (46)$$

$$\text{Pre 2. vrstvu: } t_2 - t_3 = \frac{Q}{\lambda_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot l} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} \quad (47)$$

$$\text{Pre 3. vrstvu: } t_3 - t_4 = \frac{Q}{\lambda_3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot l} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3} \quad (48)$$

Sčítaním rovníc pre jednotlivé vrstvy získame vzťah pre prenos tepla zloženou valcovou stenou:

$$t_1 - t_4 = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot l} \cdot \left( \frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3} \right) \quad (W) \quad (49)$$

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot l (t_1 - t_4)}{\frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3}} \quad (W) \quad (50)$$

$$q_1 = \frac{2 \cdot \pi (t_1 - t_4)}{\frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3}} \quad (W \cdot m^{-1}) \quad (51)$$

Pre prenos tepla vedením v stene zloženej z  $n$ -vrstiev platí všeobecný vzťah:

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot l (t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} \quad (W) \quad (52)$$

$$q_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot (t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} \quad (W \cdot m^{-1}) \quad (53)$$

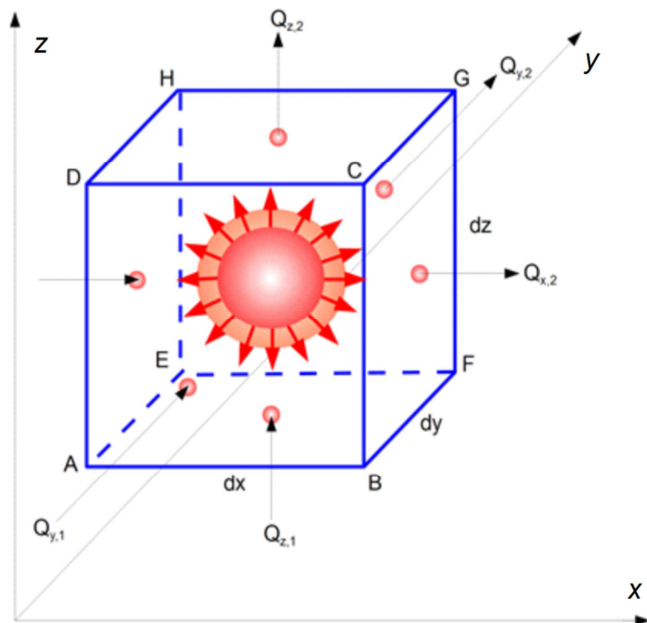
### **Nestacionárny prenos tepla vedením**

Nestacionárny prenos tepla sa vyskytuje pri periodicky opakujúcich sa procesoch, pri ohreve a ochladzovaní a pod. Pri nestacionárnom prenose tepla vedením dochádza ku akumulácii tepla ohrievaného telesa a pri ochladzovaní k znižovaniu jeho entalpie.

Ak sa umiestni teleso o teplote  $t_0$  do prostredia o teplote  $t_{pr}$ , za predpokladu, že  $t_0 < t_{pr}$ , dôjde v dôsledku výmeny tepla ku ohrevu telesa. Spočiatku sa budú ohrievať vrchné vrstvy telesa a neskôr aj vrstvy vo vnútri telesa v dôsledku prenosu tepla vedením. Pri nestacionárnom prenose tepla vedením nastávajú zmeny teplôt v jednotlivých bodoch telesa a množstvo

odovzdaného tepla v závislosti od času. Základným vzťahom určujúcim tieto zmeny je Fourierová diferenciálna rovnica vedenia tepla.

Rovnica je odvodená ako základný zákon zachovania energie pre pohybujúci sa element, ktorý si vymieňa energiu s okolím a pri rovnomerne rozloženom vnútornom tepelnom zdroji. Bilancia pre element je znázornená na obr. 8.



Obr. 8 Vedenie tepla v zloženej valcovej stene

Pri hľadaní rovnice teplotného poľa sa vychádza z energetickej bilancie objemového elementu látky so stranami  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  a objemom  $dV=dx \cdot dy \cdot dz$  podľa obr. 8. Element sa v danom teplotnom poli pohybuje rýchlosťou  $w$ , ktorej priemety do súradnicových osí sú  $w_x$ ,  $w_y$ ,  $w_z$ . Element si s okolím vymieňa energiu vedením tepla  $dQ_v$  a v ňom samotnom vzniká energia (palivový článok, elektrický ohrev a pod.)  $dQ_0$ .

Tepelný tok vstupujúci vedením do elementu v smere osi  $x$  je stanovený podľa I. Fourierovho zákona:

$$Q_{x_1} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dy \cdot dz \quad (54)$$

Z druhej strany elementu vystupuje tepelný tok:

$$Q_{x_2} = Q_{x_1} + \frac{\partial}{\partial x} (Q_{x_1}) dx \quad (55)$$

$$Q_{x_2} = - \left[ \lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) dx \right] dy \cdot dz \quad (56)$$

Rozdiel oboch tokov v smere  $x$  prebieha podľa rovnice:

$$dQ_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) dV \quad (57)$$

V smere osi  $y$  a  $z$  prebieha tok podľa rovníc (58) a (59):

$$dQ_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) dV \quad (58)$$

$$dQ_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) dV \quad (59)$$

Zo všetkých troch smerov bude energia hromadená v elemente (resp. unikajúca z neho) na jednotku elementu:

$$q_v = \frac{dQ}{dV} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-3}) \quad (60)$$

Vektorový zápis:

$$q_v = \text{div}(\lambda \cdot \text{grad } t) = \nabla(\lambda \cdot \nabla t) \quad (61)$$

Ak sa jedná o tekutinu s tepelnou vodivosťou, prejde rovnica do tvaru:

$$q_v = \lambda \left[ \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] = \lambda \nabla^2 t \quad (62)$$

Energia vznikajúca v elemente na jednotku jeho objemu:

$$\frac{dQ_0}{dV} = q_{0,v} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-3}) \quad (63)$$

V dôsledku týchto energetických tokov sa bude meniť energia elementu, ktorú je možné vyjadriť z I. zákona termodynamiky v tvare:

$$dq = di - Vdp \quad (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}) \quad (64)$$

Na jednotku objemu elementu bude pripadať časová zmena energie:

$$\rho \frac{dq}{d\tau} = q_{c,v} = \rho \left( \frac{di}{d\tau} - V \frac{dp}{d\tau} \right) \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-3}) \quad (65)$$

Ak je možné zanedbať tlakové zmeny v prúdiacej tekutine a vyjadriť entalpiu rovnicami (66) a (67):

$$di = c_p \cdot dt \quad (\text{pre plyny}) \quad (66)$$

$$di = c \cdot dt \quad (\text{pre kvapaliny}) \quad (67)$$

získava sa rovnica:

$$q_{c,v} = \rho \cdot c \cdot \frac{dt}{d\tau} \quad (68)$$

Výraz  $dt/d\tau$  vyjadruje substacionálnu zmenu teploty s časom, ale aj s miestom podľa pohybu elementu (úplný diferenciál funkcie závislej od času a miesta):

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\tau} \quad (69)$$

kde:  $(dx/d\tau) = w_x$ ,  $(dy/d\tau) = w_y$ ,  $(dz/d\tau) = w_z$ ,  $\frac{\partial t}{\partial \tau}$  - vyjadruje lokálnu zmenu teploty. Derivácie, ktoré sa vzťahujú na pohybujúcu sa tekutinu sa nazývajú substacionálnymi:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} \quad (70)$$

Konvektívna zložka zmeny teploty je vyjadrená tvarom rovnice:

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} \quad (71)$$

Rovnica energetickej bilancie pre element má tvar:

$$q_{c,v} = q_v + q_{0,v} \quad (72)$$

Po dosadení rovnice (68) do (72) dostávame:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\nabla(\lambda \cdot \nabla t) + q_{0,v}}{\rho \cdot c} \quad (73)$$

Po dosadení za  $q_v$  z rovnice (62) pre  $\lambda = \text{konšt.}$  bude mať rovnice tvar:

$$\frac{dt}{d\tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_{0,v}}{\rho \cdot c} \quad (74)$$

kde  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$  je teplotná vodivosť ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ) ako fyzikálna vlastnosť látky.

Rovnica (74) je Fourier-Kirchhoffova diferenciálna rovnica vedenia tepla pre nestacionárne procesy podľa vyššie uvedených predpokladov. V cylindrických súradniciach ( $r, \theta, z$ ) bude Fourier-Kirchhoffova diferenciálna rovnica bez uvažovania vnútorného zdroja tepla v tvare:

$$\frac{dt}{d\tau} = a \cdot \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] + \frac{q_{0,v}}{\rho \cdot c} \quad (75)$$

V sférických súradniciach ( $r, \psi, \Phi$ ) nadobúda Fourier-Kirchhoffova diferenciálna rovnica tvar:

$$\frac{dt}{d\tau} = a \cdot \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \frac{\partial t}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} \right] + \frac{q_{0,v}}{\rho \cdot c} \quad (76)$$

V pravouhlých súradniciach je výraz  $\nabla^2 t$  rozpísaný v rovnici (62). V prípade teplotného poľa tuhého telesa bez vnútorného zdroja je rýchlosť elementu vzhľadom na zvolený súradnicový systém nulová a Fourierová rovnica nadobúda tvar:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (77)$$

Riešenie diferenciálnej rovnice je zložité a možné len pre niektoré prípady ohrevu, resp. ochladzovania, t.j. za určitých podmienok. Tieto podmienky sa nazývajú okrajové a spolu s geometrickým tvarom telesa charakterizujú jednotlivé konkrétne prípady ohrevu, resp. ochladzovania. Okrajové podmienky možno rozdeliť na počiatkové a hraničné.



### Počiatkové podmienky

Charakterizujú rozloženie teplôt v čase  $\tau=0$ , t.j.  $\tau = f(x, y, z)$ . V najjednoduchšom prípade môže mať táto podmienka tvar  $t = \text{konšt.}$ , t.j. teleso na počiatku ohrevu má v celom objeme rovnakú teplotu.

### Okrajové podmienky (OP)

Charakterizujú teplotné pomery na povrchu telesa počas ohrevu, resp. ochladzovania. Rozdeľujú sa do štyroch skupín:

- 1.) *OP prvého druhu* – známe je rozloženie teplôt na povrchu telesa ako funkcia súradníc a času  $t_p = f(x, y, z, \tau)$  – *Dirichletova podmienka*. Najjednoduchší prípad je konštantná teplota povrchu počas ohrevu, resp. ochladzovania.
- 2.) *OP druhého druhu* – je známy tepelný tok dopadajúci na povrch telesa ako funkcia súradníc a času  $Q = f(x, y, z, \tau)$  – *Neumanová podmienka*. Najjednoduchším prípadom je konštantný tepelný tok, pri ktorom na celý povrch telesa počas ohrevu dopadá, resp. sa z povrchu odoberá rovnaké množstvo tepla za časovú jednotku.
- 3.) *OP tretieho druhu* – je známa teplota prostredia  $t_{pr}$ , ktorá obklopuje teleso a celkový súčiniteľ prestupu tepla  $\alpha$  medzi prostredím a povrchom telesa  $t_{pr} = f(\tau)$ ;  $\alpha = f(x, y, z, \tau)$  – *Fourierová podmienka*.

$$-\lambda_1 \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=+0} = \alpha(t_{pr} - t_{x=0}) \quad (78)$$

- 4.) *Podmienky štvrtého druhu* – predpokladom je, že teleso je v tesnom styku s druhým telesom, ktoré má iné fyzikálne vlastnosti, dotyk telies je dokonalý, teplota oboch dotýkajúcich sa telies je rovnaká.

$$-\lambda_1 \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=+0} = \lambda_1 \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=-0} \quad \text{- Lyková podmienka} \quad (79)$$

Výsledok riešenia diferenciálnej rovnice je reprezentovaná funkciou, ktorá jednoznačne vyhovuje tak diferenciálnej rovnici, ako aj počiatkovým a hraničným podmienkam.

## 1.2 Numerické metódy riešenia Fourierovej diferenciálnej rovnice

Fourierová diferenciálna rovnica sa môže riešiť analytickými alebo numerickými metódami. V nasledujúcej časti bude pozornosť venovaná len numerickým metódam riešenia.

### 1.2.1 Metóda konečných rozdielov

Pre riešenie praktických technických úloh nestacionárneho prenosu tepla vedením sa často používa *Schmidtová metóda konečných rozdielov*. Pri tejto metóde sa hodnoty  $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$  považujú za konštantné a plynulý dej sa nahrádza dejom po skokoch.

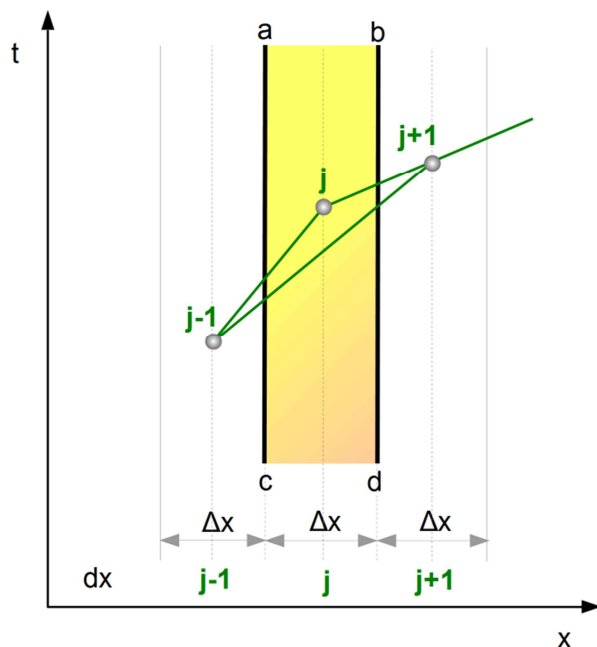
Diferenciálna rovnica pre jednorozmerné teplotné pole bez vnútorného zdroja je definovaná vzťahom:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (80)$$

Diferenčný zápis rovnice (80) je v tvare:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = a \cdot \frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2} \quad (81)$$

Podstata metódy bude vysvetlená na prenose tepla v rovinnej stene. Pri riešení sa rozdelí stena na rovnaké elementárne vrstvy o hrúbke  $\Delta x$ , ktoré sa označia indexmi  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  (Obr. 9). Celková doba prebiehajúceho deja sa rozdelí na elementárne časové úseky  $\Delta \tau$ . Časové úseky sa následne označia indexmi  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ .



Obr. 9 Princíp metódy konečných rozdielov

Teplota každej vrstvy bude označená indexom podľa miesta a času. Teplota elementárnej vrstvy sa vzťahuje k osi elementárnej vrstvy.

V rámci časového úseku  $\Delta \tau$  sa uvažuje stacionárny prenos tepla vedením medzi elementárnymi vrstvami. Pri prechode z jedného časového úseku do druhého sa uvažuje nestacionárny prenos tepla vedením.

Ľavá strana rovnice (81) vyjadruje časovú zmenu teploty elementárnej vrstvy, t.j. nestacionárne vedenie tepla, stacionárny prenos tepla vedením elementárnou vrstvou vyjadruje pravá strana rovnice.

Pri prechode z časového kroku ( $i$ ) do časového kroku ( $i+1$ ) v  $j$ -tej elementárnej vrstve, sa členy rovnice (81) môžu prepísať do tvaru, ktorý charakterizuje nestacionárny prenos tepla vedením  $j$ -tej vrstvy pri prechode z časového kroku ( $i$ ) na časový krok ( $i+1$ ):

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t_j^{i+1} - t_j^i}{\Delta \tau} \quad (82)$$

Nestacionárny prenos tepla vedením z elementárnej vrstvy ( $j-1$ ) do elementárnej vrstvy ( $j$ ) a z elementárnej vrstvy ( $j$ ) do elementárnej vrstvy ( $j+1$ ) v časovom kroku ( $i$ ) je možné zapísať v tvare:

$$\frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2} = \frac{(t_{j-1}^i - t_j^i) - (t_j^i - t_{j+1}^i)}{\Delta x^2} \quad (83)$$

Dosadením rovnice (83) do rovnice (81) dostávame vzťah:

$$\frac{t_j^{i+1} - t_j^i}{\Delta \tau} = a \frac{(t_{j-1}^i - t_j^i) - (t_j^i - t_{j+1}^i)}{\Delta x^2} \quad (84)$$

Po úprave rovnice (84):

$$t_j^{i+1} - t_j^i = \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} \left[ \left( \frac{t_{j-1}^i + t_{j+1}^i}{2} \right) - t_j^i \right] \quad (85)$$

Pre zjednodušenie je vhodné výraz upraviť:

$$\frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2} = 1 \quad (86)$$

V rovnici (86) je časový krok  $\Delta\tau$  závislý na hrúbke elementárnej vrstvy  $\Delta x$ :

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x^2}{2a} \quad (87)$$

Úpravou rovnice (85) sa teplota  $j$ -tej vrstvy v časovom úseku  $(i+1)$  vypočíta podľa vzťahu:

$$t_j^{i+1} = \frac{t_{j-1}^i + t_{j+1}^i}{2} \quad (88)$$

Podľa rovnice (88) sa vypočítajú teploty v 2 až  $(n-1)$  elementárnej vrstve. V prvej elementárnej vrstve a  $n$ -tej sa teploty vypočítajú podľa hraničných podmienok.

**Pri podmienke I. druhu  $t_p = f(\tau)$ :** je známy priebeh povrchových teplôt  $t_{p1}$  v čase, a teda aj v časovom kroku pre prenos tepla vedením cez elementárne vrstvy platí (Obr. 10), že hustota plošného tepelného toku elementárnou vrstvou sa vypočíta z rovnice:

$$q = \frac{\lambda(t_{p,1} - t_1)}{\frac{\Delta x}{2}} \quad (89)$$

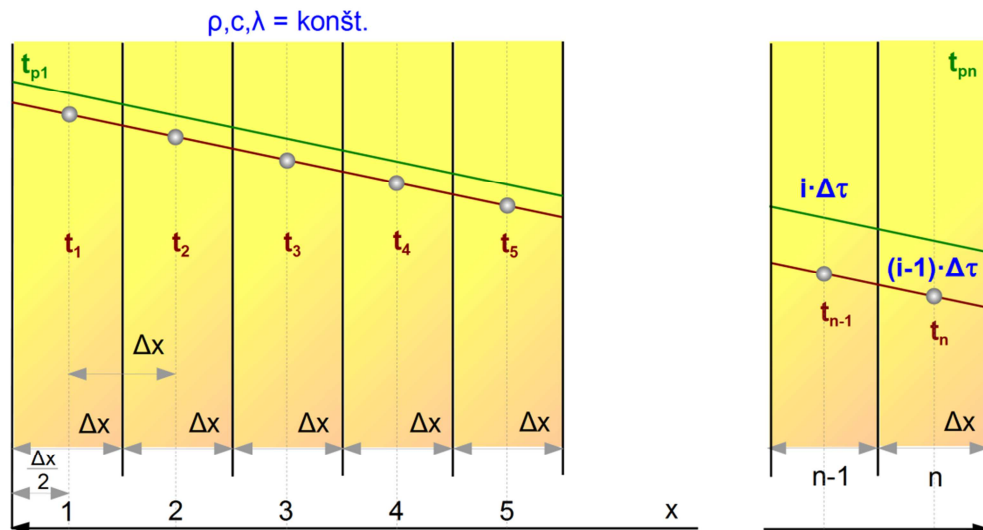
Hustota plošného tepelného toku medzi 1. a 2. elementárnou vrstvou:

$$q = \frac{\lambda(t_1 - t_2)}{\Delta x} \quad (90)$$

Z rovnosti vzťahov (89) a (90) pre výpočet teploty v 1. elementárnej vrstvy platí:

$$t_1 = \frac{2 \cdot t_{p1} + t_2}{3}$$

Obdobným spôsobom sa odvodí výpočet teploty pre  $n$ -tú elementárnu vrstvu.



Obr. 10 Princíp metódy konečných rozdielov podľa hraničných podmienok

**Pri podmienke II. druhu  $\alpha = f(\tau)$  a  $t_{pr} = f(\tau)$ :** je známy celkový súčiniteľ prenosu tepla a teplota prostredia v každom časovom okamihu a v časovom kroku (Obr. 10). Pre hustotu plošného tepelného toku na povrchu steny platí:

$$q = \alpha^i \cdot (t_{pr}^i - t_{p,1}^i) \quad (91)$$

Pre výpočet hustoty plošného tepelného toku cez prvú elementárnu podvrstvu platí:

$$q = \lambda \frac{(t_{p,1}^i - t_1^i)}{\frac{\Delta x}{2}} \quad (92)$$

Hustota plošného tepelného toku medzi prvou a druhou elementárnou vrstvou sa vypočíta zo vzťahu:

$$q = \lambda \frac{(t_1^i - t_2^i)}{\Delta x} \quad (93)$$

Z rovnosti rovníc (91) a (92) vyplýva:

$$\alpha^i (t_{pr}^i - t_{p,1}^i) = 2\lambda \frac{(t_{p,1}^i - t_1^i)}{\Delta x} \quad (94)$$

$$t_{p,1}^i = \frac{t_{pr}^i + \frac{2\lambda}{\alpha^i \Delta x} t_1^i}{\frac{2\lambda}{\alpha^i \Delta x} + 1} \quad (95)$$

Z rovnosti rovníc (92) a (93) vyplýva:

$$t_{p,1}^i = \frac{3 \cdot t_1^i - t_2^i}{2} \quad (96)$$

Hodnota teploty v prvej elementárnej vrstve sa získa riešením rovníc (95) a (96). Obdobne sa odvodí vzťah-pre  $n$ -tú elementárnu vrstvu.

V prípade výpočtu nestacionárneho prenosu tepla vedením v telese tvaru rovinnej steny zloženej z viacerých vrstiev o rôznych parametroch  $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$  je postup riešenia nasledovný.

Prvá vrstva sa rozdelí na elementárne úseky o hrúbke  $\Delta x$  a podľa rovnice (87) sa vypočíta časový krok  $\Delta \tau$ . Vzhľadom nato, že vo vnútri telesa sa teploty elementárnych úsekov počítajú podľa vzťahu (88), musí sa urobiť výpočet s rovnakým časovým krokom vo všetkých vrstvách telesa  $\Delta \tau = \Delta \tau_1$ .

Hrúbky elementárnych úsekov v ostatných vrstvách sa vypočítajú zo vzťahu:

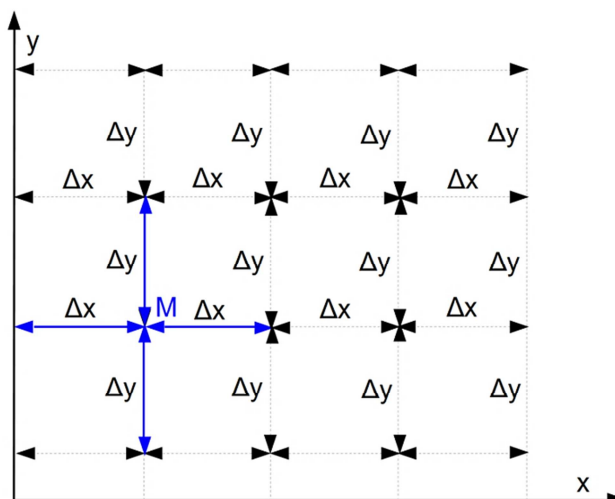
$$\frac{2 \cdot a_1 \Delta \tau}{\Delta x_1^2} = \frac{2 \cdot a_{II} \Delta \tau}{\Delta x_{II}^2} = K = \frac{2 \cdot a_k \Delta \tau}{\Delta x_k^2} \quad (97)$$

kde: I, II,  $k$  – označenie príslušnej elementárnej vrstvy.

Na styčných plochách dvoch vrstiev je aplikovaná podmienka IV. druhu, styčné plochy oboch vrstiev majú rovnaké teploty.

### 1.2.2 Metóda konečných diferencií

Metóda konečných diferencií, nazývaná tiež metóda siete, rieši nestacionárny prenos tepla vedením v dvojrozmernom teplotnom poli. Predpokladá sa že veličiny  $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$  sú konštantné.



Obr. 11 Princíp metódy konečných diferencií

Teleso sa rozdelí na  $n$ -elementárnych úsekov  $\Delta x$  v smere osi  $x$ , ktoré sa označia indexom  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , a  $m$ -elementárnych úsekov  $\Delta y$  v smere osi  $y$ , ktoré sa označia indexom  $q = 1, 2, 3, \dots, m$ . Rozdelením telesa na elementárne úseky vznikne sieť podľa obr. 11.

Teplota vo zvolenom bode  $M [k, q]$  siete s časovým krokom  $(i)$  sa označí  $t_{k,p}^i$ . Teploty v susedných bodoch sa označia:

v smere osi  $x$  – vo vzdialenosti  $-\Delta x$ :  $t_{(k-1),q}^i$

– vo vzdialenosti  $+\Delta x$ :  $t_{(k+1),q}^i$

v smere osi  $y$  – vo vzdialenosti  $-\Delta y$ :  $t_{(q-1),q}^i$

– vo vzdialenosti  $+\Delta y$ :  $t_{(q+1),q}^i$

Teplota v bode M v časovom kroku ( $i+1$ ),  $t_{k,p}^{i+1}$  sa určí tak, že sa diferenciálna rovnica (98) nahradí diferenčným tvarom:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \quad (98)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \doteq \frac{t_{k,q}^{i+1} - t_{k,q}^i}{\Delta \tau} \quad (99)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \doteq \frac{t_{(k-1),q}^i + t_{(k+1),q}^i - 2t_{k,q}^i}{\Delta x^2} \quad (100)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \doteq \frac{t_{k,(q-1)}^i + t_{k,(q+1)}^i - 2t_{k,q}^i}{\Delta y^2} \quad (101)$$

Dosadením rovníc (99) až (101) do rovnice (98) sa získa rovnica pre výpočet teploty v bode M v časovom kroku ( $i+1$ ):

$$t_{k,q}^{i+1} = a \cdot \Delta \tau \left( \frac{t_{(k-1),q}^i + t_{(k+1),q}^i - 2t_{k,q}^i}{\Delta x^2} + \frac{t_{k,(q-1)}^i + t_{k,(q+1)}^i - 2t_{k,q}^i}{\Delta y^2} \right) + t_{k,q}^i \quad (102)$$

Pri zvolení delenia  $\Delta x = \Delta y$  a uvažovaní podmienky  $m = n$  prechádza rovnica (102) do tvaru:

$$t_{k,q}^{i+1} = t_{k,q}^i + \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} [t_{(k+1),q}^i + t_{(k-1),q}^i + t_{k,(q-1)}^i + t_{k,(q+1)}^i - 4t_{k,q}^i] \quad (103)$$

Pri zvolení závislosti medzi časovým krokom  $\Delta \tau$  a delením siete  $\Delta x$  podľa vzťahu:

$$\frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2} = \frac{1}{4} \quad (104)$$

prechádza rovnica (103) do tvaru:

$$t_{k,q}^{i+1} = \frac{1}{4} [t_{(k+1),q}^i + t_{(k-1),q}^i + t_{k,(q-1)}^i + t_{k,(q+1)}^i] \quad (105)$$

Podľa rovnice (105) je možné vypočítať teploty vo vnútri siete v časovom kroku ( $i+1$ ). Na výpočet v okrajových bodoch siete sa musí použiť niektorá s hraničných podmienok. Najčastejšie sa používajú podmienky I. a III. druhu.

### 1.2.3 Metóda elementárnych bilancií

Metóda sa aplikuje pre nestacionárny prenos tepla vedením v trojrozmernom teplotnom poli. Pre metódu elementárnych bilancií platí predpoklad, že teleso, v ktorom sa skúma nestacionárny prenos tepla vedením sa rozdelí na elementárne kvádre o rozmeroch  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ .

Pre celkový objem telesa platí:

$$V = n_x \cdot \Delta x \cdot n_y \cdot \Delta y \cdot n_z \cdot \Delta z \quad (106)$$

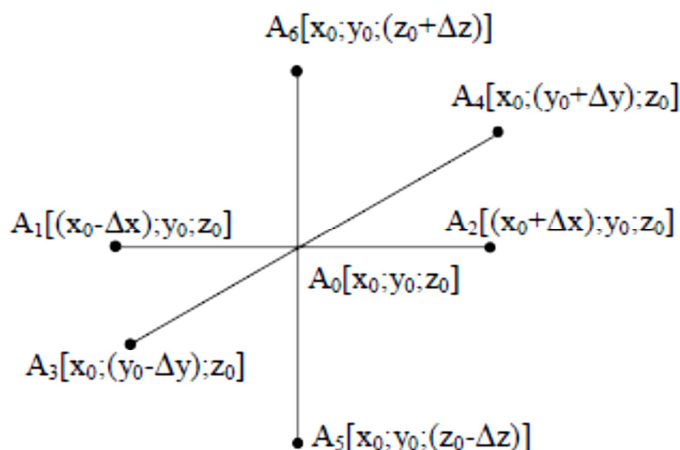
kde:  $n_x$  – počet elementárnych úsekov v smere  $x$  -  $j_x = 1, 2, 3, \dots, n_x$ .

$n_y$  – počet elementárnych úsekov v smere  $y$  -  $j_y = 1, 2, 3, \dots, n_y$ .

$n_z$  – počet elementárnych úsekov v smere  $z$  -  $j_z = 1, 2, 3, \dots, n_z$ .

Pre malé hodnoty  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  a  $\Delta \tau$  sa predpokladajú nasledujúce zjednodušenia:

- Vo vnútri každého elementárneho kvádra sú izotermické plochy rovnobežné a rovnako vzdialené roviny.
- Tepelný tok prechádzajúci v intervale  $(i \cdot \Delta \tau, (i+1) \cdot \Delta \tau)$  určitou plochou je úmerný teplotnému spádu v čase  $(i \cdot \Delta \tau)$ .
- Zmena entalpie elementárneho kvádra je funkciou zmeny teploty v strede elementárneho kvádra.



Obr. 12 Princíp metódy elementárnych bilancií

Lubovoľný elementárny kváder (Obr. 12) je charakterizovaný bodom v strede  $A_0[j_x \Delta x, j_y \Delta y, j_z \Delta z]$  a bodmi v stenách kvádra.

V smere osi  $x$ :

$$A_1 = \left[ \left( j_x - \frac{1}{2} \right) \Delta x, j_y \Delta y, j_z \Delta z \right] \quad (107)$$

$$A_2 = \left[ \left( j_x + \frac{1}{2} \right) \Delta x, j_y \Delta y, j_z \Delta z \right] \quad (108)$$

V smere osi  $y$ :

$$A_3 = \left[ j_x \Delta x, j_y \left( j_y - \frac{1}{2} \right) \Delta y, j_z \Delta z \right] \quad (109)$$

$$A_4 = \left[ j_x \Delta x, j_y \left( j_y + \frac{1}{2} \right) \Delta y, j_z \Delta z \right] \quad (110)$$

V smere osi  $z$ :

$$A_5 = \left[ j_x \Delta x, j_y \Delta y, \left( j_z - \frac{1}{2} \right) \Delta z \right] \quad (111)$$

$$A_6 = \left[ j_x \Delta x, j_y \Delta y, \left( j_z + \frac{1}{2} \right) \Delta z \right] \quad (112)$$

Steny vymedzené bodmi  $A_1$  až  $A_6$  sú spoločné pre susedné elementárne kvádre  $A_1$  až  $A_6$  ležia v prostriedku medzi stredom elementárneho kvádra  $A_0$  a stredmi ostatných susedných

elementárnych kvádrov. Teploty v strede susedných elementárnych kvádrov v časovom kroku ( $i$ ) sa označia:

$$A_0 - A_1 \Rightarrow t_1^i \quad A_0 - A_4 \Rightarrow t_4^i$$

$$A_0 - A_2 \Rightarrow t_2^i \quad A_0 - A_5 \Rightarrow t_5^i$$

$$A_0 - A_3 \Rightarrow t_3^i \quad A_0 - A_6 \Rightarrow t_6^i$$

Nestacionárny prenos tepla vedením v elementárnom kvádri sa môže v intervale  $< i \cdot \Delta \tau, (i+1) \cdot \Delta \tau >$  charakterizovať:

- Zmenou entalpie v dôsledku prenosu tepla vedením medzi susednými elementárnymi kvádrami cez jednotlivé vrstvy elementárneho kvádra so stredom  $A_0$ .
- Zmenou entalpie elementárneho kvádra v dôsledku zmeny teploty v elementárnom kvádri.

Pre prenos tepla vedením stenami elementárneho kvádra platí v smere osi  $x$ :

$$\Delta Q_{x,1} = \lambda(t_0^i) \frac{t_1^i - t_0^i}{\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta \tau \quad (113)$$

$$\Delta Q_{x,2} = \lambda(t_0^i) \frac{t_0^i - t_2^i}{\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta \tau \quad (114)$$

$$\Delta Q_x = \Delta Q_{x,1} - \Delta Q_{x,2} \quad (115)$$

$$\Delta Q_x = \lambda(t_0^i) \frac{t_1^i + t_2^i - 2t_0^i}{\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta \tau \quad (116)$$

Pre osi  $y$  a  $z$ :

$$\Delta Q_y = \lambda(t_0^i) \frac{t_3^i - t_4^i - 2t_0^i}{\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta \tau \quad (117)$$

$$\Delta Q_z = \lambda(t_0^i) \frac{t_5^i - t_6^i - 2t_0^i}{\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta \tau \quad (118)$$

Zmena entalpie elementárneho kvádra v dôsledku prenosu tepla vedením sa teda môže vyjadriť v tvare:

$$\Delta Q = \Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z \quad (119)$$

Zmenu entalpie v dôsledku zmeny teploty v elementárnom kvádri vyjadruje rovnica:

$$\Delta Q = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \int_{t_0^i}^{t_0^{(i+1)}} c(t) dt \quad (120)$$

Pre mernú tepelnú kapacitu platí lineárna závislosť:

$$c = a + b \cdot t \quad (121)$$

Použitím rovnice (121) do rovnice (120) dostávame:

$$\Delta Q = \rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \left[ a \cdot t_0^{(i+1)} + \frac{b}{2} (t_0^{(i+1)})^2 - a \cdot t_0^i - \frac{b}{2} (t_0^i)^2 \right] \quad (122)$$

Z rovnosti rovníc (119) a (122) vyplýva rovnica:



$$\frac{b}{2}(t_0^{(i+1)})^2 + a \cdot t_0^{(i+1)} = a \cdot t_0^i - \frac{b}{2}(t_0^i)^2 + \frac{\Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z}{\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} \quad (123)$$

Po dosadení za  $\Delta Q_x, \Delta Q_y, \Delta Q_z$  a úprave rovnica nadobúda tvar:

$$\begin{aligned} \frac{b}{2}(t_0^{(i+1)})^2 + a \cdot t_0^{(i+1)} = t_0^i \left[ \frac{b}{2} \cdot (t_0^i) + a - 2\lambda(t_0^i) \frac{\Delta\tau}{\rho} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \right] + \\ + \frac{\Delta\tau}{\rho} \cdot \lambda(t_0^i) \left[ \frac{(t_1^i + t_2^i)}{\Delta x^2} + \frac{(t_3^i + t_4^i)}{\Delta y^2} + \frac{(t_5^i + t_6^i)}{\Delta z^2} \right] \end{aligned} \quad (124)$$

Aby bola zaručená stabilita riešenia rovnice (124), musia byť členy na pravej strane rovnice kladné, resp. nulové, teda musí byť splnená podmienka:

$$\frac{b}{2}(t_0^i)^2 + a - 2\lambda(t_0^i) \frac{\Delta\tau}{\rho} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \geq 0 \quad (125)$$

Koeficient tepelnej vodivosti sa môže vyjadriť zo vzťahu:

$$\begin{aligned} \lambda &= r + s \cdot t \\ \lambda(t_0^i) &= r + s \cdot t_0^i \end{aligned} \quad (126)$$

Rovnica (125) vyjadruje vzťah medzi delením telesa na elementárne kvádre o veľkosti  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  s časovým krokom  $\Delta\tau$ .

Ak sú známe teploty vo všetkých uzlových bodoch telesa v čase  $i \cdot \Delta\tau$ , potom v čase  $(i+1) \cdot \Delta\tau$  sa teploty v príslušných bodoch môžu vypočítať podľa rovnice (124). Rovnica (124) je kvadratická a pomocou nej sa môžu stanoviť teploty vo všetkých vnútorných uzlových bodoch telesa. Teplota v uzlových bodoch sa môže stanoviť pomocou hraničných podmienok.

### **Riešenie teplotného poľa vo valcovej stene**

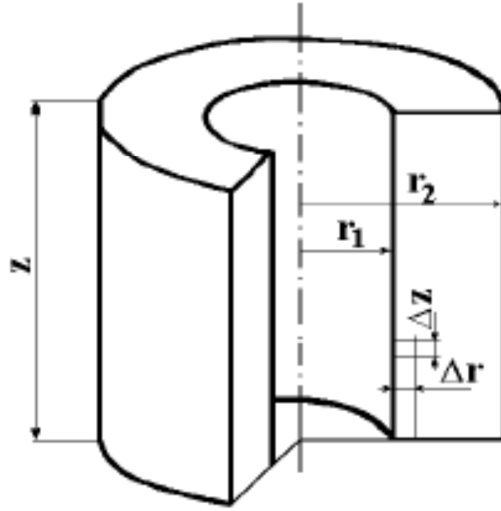
Pre valcovú stenu bez vnútorného zdroja platí diferenciálna rovnica v cylindrických súradniciach:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] \quad (127)$$

Ak sa predpokladá, že sa menia len teploty v smere  $r$  a  $z$  a po obvode valca sa teploty nemenia, rovnica prechádza do tvaru:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left[ \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] \quad (128)$$

Dutý valec podľa obr. 13 o polomere  $r_1$  a  $r_2$  a výške  $z$  sa rozdelí na elementárne valce o hrúbke  $\Delta r$  a výške  $\Delta z$ .



Obr. 13 Princíp metódy elementárnych bilancii pre valcovú stenu

Počet elementárnych úsekov v smere  $r$  a hrúbke  $\Delta r$  je  $n_r$  a označí sa ako:

$$j = 1 \dots n_r; \Delta r = \frac{r_2 - r_1}{n_r} \quad (129)$$

Počet elementárnych úsekov v smere  $t$  a hrúbke  $\Delta z$  je  $n_z$  a označí sa ako:

$$j = 1 \dots n_r; \Delta r = \frac{r_2 - r_1}{n_r} \quad (130)$$

$$k = 1 \dots n_z; \Delta z = \frac{Z}{n_z} \quad (131)$$

Časový krok  $\Delta \tau$  sa označí ako:

$$i = 1 \dots n_\tau \quad (132)$$

Ďalším predpokladom je, že  $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$  sú v závislosti na čase konštantné veličiny. Potom pre jednotlivé členy rovnice (128) platí:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{t_{j,k}^{(i+1)} - t_{j,k}^i}{\Delta \tau} \quad (133)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} = \frac{(t_{(j-1),k}^i - t_{j,k}^i) - (t_{j,k}^i - t_{(j+1),k}^i)}{\Delta r^2} \quad (134)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{t_{(j-1),k}^i - t_{(j+1),k}^i}{2 \cdot \Delta r} \quad (135)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{(t_{j,(k-1)}^i - t_{j,k}^i) - (t_{j,k}^i - t_{j,(k+1)}^i)}{\Delta z^2} \quad (136)$$

Po dosadení do rovnice (128) dostávame rovnicu:

$$\frac{t_{j,k}^{(i+1)} - t_{j,k}^i}{\Delta \tau} = a \left[ \frac{t_{(j-1),k}^i + t_{(j+1),k}^i - 2t_{j,k}^i}{\Delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{t_{(j-1),k}^i - t_{(j+1),k}^i}{2 \cdot \Delta r} + \frac{t_{j,(k-1)}^i + t_{j,(k+1)}^i - 2t_{j,k}^i}{\Delta z^2} \right] \quad (137)$$

Po úprave rovnice (137):

$$t_{j,k}^{(i+1)} = t_{j,k}^i + \frac{a\Delta\tau}{\Delta r^2} \left\{ t_{(j-1),k}^i \cdot \left( 1 + \frac{\Delta r}{2r} \right) + t_{(j+1),k}^i \cdot \left( 1 - \frac{\Delta r}{2r} \right) - 2t_{j,k}^i \cdot \right\} + \frac{a\Delta\tau}{\Delta r^2} \left\{ t_{j,(k-1)}^i + t_{j,(k+1)}^i - 2t_{j,k}^i \right\} \quad (138)$$

Polomer  $r$  sa vypočíta pre každý elementárny úsek z rovnice:

$$r = r_1 + j \cdot \Delta r \quad (139)$$

Podľa rovnice (139) sa vypočítajú teploty vo vnútri valca. Teploty na povrchu valca sa vypočítajú použitím okrajových podmienok riešenia Fourierovej diferenciálnej rovnice, ako napr. v prípade Schmidtovej metódy.

## 2 APLIKÁCIA MATEMATICKÉHO A FYZIKÁLNEHO MODELOVANIA V ENERGETIKE

Konštrukcia a vývoj nového energetického zariadenia, technológie, resp. procesu, je veľmi zdĺhavou a finančne nákladnou záležitosťou. Následná optimalizácia je vo väčšine prípadov uskutočňovaná s ohľadom na cenu, technologické možnosti výroby a parametre zariadenia.

### 2.1 Metódy modelovania

V súčasnej dobe je neoddeliteľnou súčasťou poznávacieho procesu, resp. tvorby fyzikálneho modelu, numerické riešenie odpovedajúcich diferenciálnych, integrálnych či algebrických rovníc. Pri klasických návrhoch z oblasti teórie pružnosti a pevnosti sa uplatňujú metódy konečných prvkov FEM, pre zisťovanie prúdových pomerov sa využívajú metódy konečných objemov CFD, resp. konečných diferencií CFX. Tieto metódy značne zjednodušujú a urýchľujú proces návrhu a optimalizácie energetických zariadení, resp. technológií.

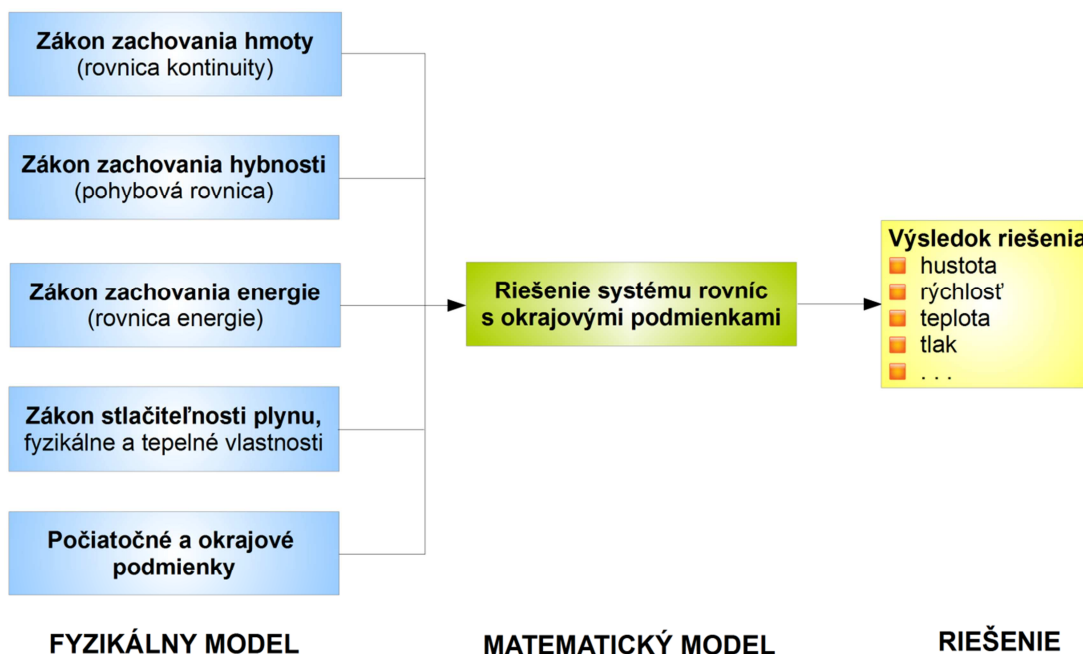
Pre dosiahnutie správneho riešenia je potrebné si zadať rozdiel medzi pojmami modelovanie a simulácia.

**Modelovanie** – je súbor aktivít vedúcich k vývoju matematického modelu, ktorý súčasne reprezentuje štruktúru a chovanie reálneho systému.

**Simulácia** – je súbor aktivít slúžiacich k overeniu správnosti modelu a získaniu nových poznatkov o činnosti reálnych systémov a o ich vlastnostiach.

#### 1.) Vo všeobecnosti možno modely rozdeliť na:

- a) fyzikálne modely,
- b) matematické modely.



Obr. 14 Fyzikálny a matematický model riešenia

## 2.) Z hľadiska časovej závislosti možno model rozdeliť na:

- a) **Stacionárny model** - používa sa vtedy, ak sa skúma jav v čase nemenný a potrebujú sa určiť jeho parametre. V takom prípade sú známe iba okrajové podmienky a inicializačné hodnoty, model vôbec neuvažuje s časovým hľadiskom. Výsledok je dopočítaný potrebným počtom iterácií. Za stacionárny model sa môže považovať aj modelovanie turbulentného prúdenia pomocou tzv. štatistických modelov turbulencie.
- b) **Nestacionárny model** - sa používa vtedy, ak sa skúmajú parametre javu a jeho vývoj v čase. V takom prípade sú známe okrajové podmienky a inicializačné hodnoty parametrov sú zároveň brané ako počiatočná podmienka. Tu sa musí každý časový krok počítať zvlášť. Je isté, že nestacionárne modely sú na výpočtovú techniku aj čas náročnejšie než modely stacionárne.

## 3.) Rozdelenie z hľadiska priestoru

- a) **2D model** - sa používa vtedy, keď sa užívateľ rozhodne zanedbať vplyv tretieho smeru. Skutočné javy sú vtedy dvojdimenzionálne. Niekedy možno však vplyv tretieho smeru zanedbať aj s ohľadom na presnosť výsledku, napr. ak sa jedná o osovo symetrické úlohy bez prejavu turbulencie. Niekedy je ale 2D model uprednostňovaný aj napriek nižšej presnosti výsledkov, pretože oproti 3D modelu, pretože sa nejedná o tak náročnú úlohu z hľadiska požiadaviek na výpočtovú techniku a výpočtový čas.
- b) **3D model** - sa používa všade tam, kde je potrebné dosiahnuť dostatočné presné výsledky parametrov simulovaného javu, pretože sa jav nedá zjednodušiť do 2D modelu.

## 4.) Rozdelenie z hľadiska bilancovania veličín

- a) **Izotermický model** - sa používa tam, kde zmena teploty nemá vplyv na sledované parametre procesu. Model neuvažuje s energetickou rovnicou.
- b) **Anizotermický model** - sa používa všade tam, kde potrebujeme poznať parametre priamo súvisiace s teplotou, pretože zmena teploty ovplyvňuje parametre prúdového poľa (zmenu viskozity tekutiny, hustoty, atď.).
- c) **Model s uvažovaním silového poľa** - do modelu je možné zahrnúť vplyv silového poľa (gravitácia), a to iba v prípade, ak ovplyvňuje prúdenie.
- d) **Jednofázový model** - sa používa vtedy, ak sa jedná o prúdenie iba jedného druhu tekutiny. Fáza v tomto prípade neoznačuje iba skupenstvo, ale tiež druh látky.
- e) **Viacfázový model** - je možné použiť ak sa jedná o prúdenie viac druhov tekutiny, kedy dochádza k ich miešaniu. V tomto prípade sa nemusí jednať iba o rôzne látky, napr. v prípade pary sa môže jednať o dve rôzne skupenstvá (kvapalina a plyn).

Pokiaľ hovoríme o modelovaní daného problému, máme tým na mysli popísanie problému systémom rovníc, napr. pri prúdení sa jedná o systém nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc. Tento systém musí byť uzavretý a je potrebné, aby počet rovníc súhlasil s počtom premenných.

Rovnice popisujú základnú fyzikálnu podstatu problému, teda zákony zachovania termodynamickkej rovnováhy a pod. Problém spočíva v ich riešení, pretože sa jedná o nelineárne parciálne diferenciálne rovnice, čo je vo všeobecnosti ťažko riešiteľný problém.

V praktických aplikáciách je potrebné brať do úvahy ešte komplikované počiatočné a okrajové podmienky. Aj riešenie obecnej formy Navier-Stokesových rovníc je zaradené medzi 7 matematických problémov tisícročia. Na riešenie problému sa možno pozeráť niekoľkými spôsobmi.

### 2.1.1 Explicitne riešenie

Najskôr je potrebné sa pokúsiť o presné vyriešenie daného problému. Jedná sa teda o nájdenie explicitného riešenia, ktoré nie je založené na žiadnom zjednodušení rovníc a zanedbávaní členov, ktoré za určitých podmienok je možné zanedbať a pod. Pri explicitnom riešení sa jedná o skutočné presné riešenie kompletnej sústavy. V prípade, ak je riešenie problému založené na nelinearite chovania sa niektorých rovníc a komplikovaných počiatkových a okrajových podmienkach, je explicitné riešenie nemožné.

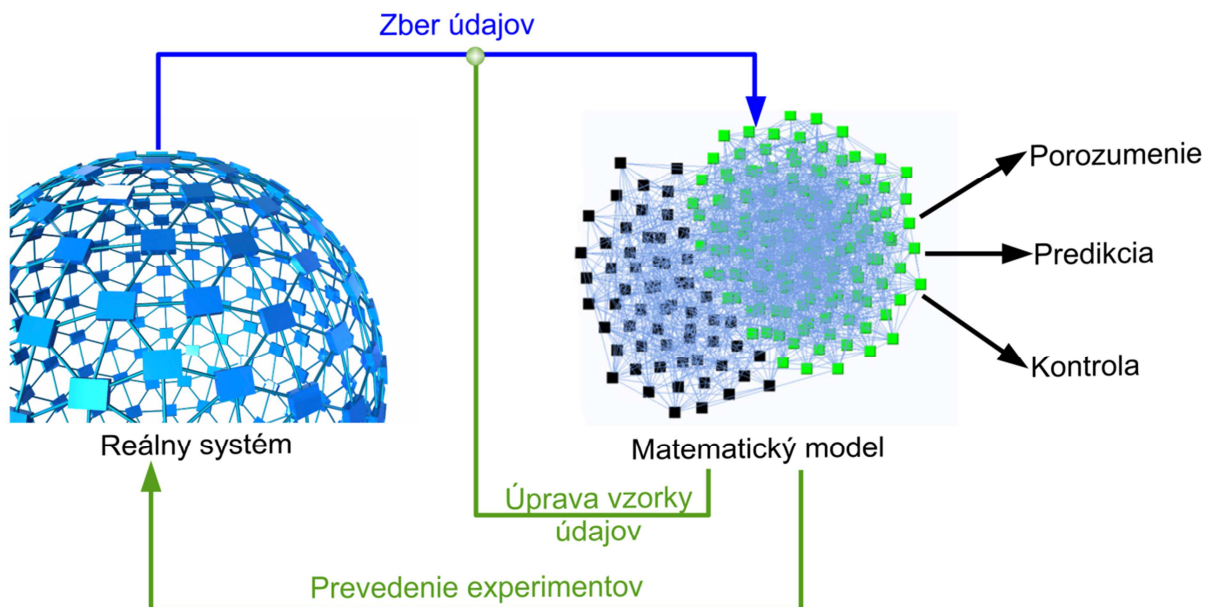
Pri znížení zložitosti a snahe o získanie explicitného riešenia rovníc je možné nájsť riešenie, ktoré je ale vzhľadom na značné zjednodušenie menej presné. V značnom množstve prípadov je približné riešenie vzhľadom na veľkú odchýlku výsledkov od skutočných hodnôt neprijateľné. Jednou z možností pri hľadaní explicitného riešenia je matematické a fyzikálne modelovanie.

### 2.1.2 Matematické modelovanie

Pri snahe o riešenie najobecnejších rovníc popisujúcich komplexné správanie sa riešeného systému môžeme využiť pomerne efektívne nástroje, ktoré využívajú postupy numerickej matematiky.

Pomocou dynamicky sa rozvíjajúceho potenciálu výpočtovej techniky možno pokročiť ku hľadaniu približných riešení niektorými z numerickej metód. Táto oblasť matematiky je v súčasnosti vo veľkom rozmachu, čo je spôsobené nasadzovaním výpočtovej techniky pri riešení praktických problémov. Aj napriek tomu nie je zaručený úspech pri hľadaní riešenia použitím komplexných rovníc. Napr. pri riešení turbulencie, ktorá je obecné ťažko formulovateľná, je nájdenie explicitného riešenia problematické.

Pri uvažovaní nelinearity Navier-Stokesových rovníc nie je možné získať jednoznačné riešenie ani pri použití modernej výpočtovej techniky. V tomto prípade je preto potrebné použiť celý rad aproximácií.



Obr. 15 Proces skúmania systému s využitím matematického modelovania

Kombináciou numerickej metód a vhodných aproximačných rovníc je možné dosiahnuť výborné výsledky pri riešení komplikovaných praktických úloh, použitím pomerne zložitých

výpočtových sietí. V súčasnosti dochádza aj k rozmachu v oblasti softvérovej podpory, ktorá v energetických aplikáciách umožňuje celkom jednoduché riešenia daných problémov. Matematické modelovanie zahrňuje tri navzájom závislé štádia:

- 1.) *formalizácia skúmaného procesu – zostavenie matematického modelu,*
- 2.) *tvorba algoritmu a počítačového programu pre výpočet číselných hodnôt určených parametrov,*
- 3.) *posúdenie súladu modelu a skúmaného procesu.*

Každý praktický problém si vyžaduje inú formuláciu numerickej metódy a použitých matematických závislostí. Hlavnou výhodou matematického modelovania, ktoré využíva numerické postupy, je jeho prístrojová, a teda aj finančná nenáročnosť, pokiaľ neberieme do úvahy náklady na výkonný počítač.

### 2.1.3 Počítačové modelovanie

Proces počítačového modelovania sa skladá z:

- ✓ identifikácie systému,
- ✓ simulácie systému.

Počítačový model je technickou realizáciou matematického modelovania riešeného problému. Hlavným znakom metódy je simulácia abstraktného modelu určitého systému. Účelom počítačového modelu je zistiť, ako sa bude chovať systém pre zadané vstupné údaje. Hlavným cieľom počítačového modelu nie je optimalizovať, ale hľadať, pre ktoré vstupné údaje možno optimálne riešenie dosiahnuť.

### 2.1.4 Fyzikálne modelovanie

Celkom inú filozofiu riešenia problému poskytujú metódy fyzikálneho modelovania. Ide o spôsob, ako fyzikálne podmienky čo najvierohodnejšie napodobniť modelom väčšinou v malom meradle.

Okrajové a počiatočné podmienky sú teda definované mechanickým modelom. Napríklad v prípade riešenia prúdenia je možné využiť aerodynamický tunel, ktorý dokáže efektívne simulovať požadované prúdenie vzduchu.

Výhodou a zároveň nevýhodou fyzikálneho modelovania je potreba použiť často robustnú aparatúru, ktorou je napr. aerodynamický tunel, resp. detekčné zariadenie.

## 2.2 Priame meranie

Od matematického cez fyzikálne modelovanie je možné dospieť k požadovaným výsledkom aj inou cestou, a to priamym meraním. Jedná sa v podstate o najvernejšiu metódu, ktorá spočíva v praktickom meraní skutočných hodnôt priamo na mieste problému. Tento spôsob je v mnohých ohľadoch extrémne náročný, až nepoužiteľný.

Pokiaľ by sme chceli získať obdobnú informáciu ako pri matematickom či fyzikálnom modelovaní, museli by sme mať k dispozícii toľko meracích prístrojov, koľko je bodov vo výpočtovej sieti, čo je pomerne náročná požiadavka. „In situ“ merania sa používajú skôr pre overenie záverov z vyššie spomenutých modelov, resp. pre získanie okrajových podmienok použitých pri numerickej metóde.

## 2.3 Verifikácia modelu

Po vykonaní numerického riešenia (simulácie) je nutné overenie vhodnosti použitého modelu. Ide o overenie presnosti medzi výsledkami numerického riešenia a reálnym dielom, resp. fyzikálnym modelom.

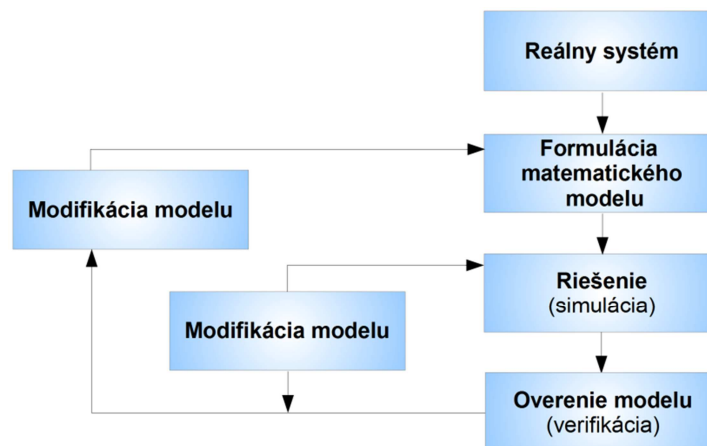
Vo všeobecnosti existujú dva zdroje chýb, ktoré vznikajú pri numerických riešeniach. Prvý zdroj chýb je spojený so samotným numerickým riešením. Tieto chyby sú závislé od konkrétnej metódy, ktorá sa používa pri riešení a spočíva v samotnej diskretizácii modelu a využívaním diferencných rovníc. Z hľadiska dosiahnutia korektnosti dosiahnutých výsledkov je nevyhnutná znalosť stanovenia chýb jednotlivých numerických metód. Druhý zdroj chýb spočíva v samotnom zjednodušenom modeli. Pri inžinierskom prístupe k riešenej problematike je snaha o zahrnutie všetkých faktorov, ktoré môžu vplývať na daný problém. Často sa zanedbajú, resp. aproximujú tie faktory, pri ktorých je predpoklad malého, alebo žiadneho vplyvu na hľadaný výsledok riešenia. Nesprávny výber takýchto veličín vedie k nekorektnému výsledku riešenia.

Prvotné overenie platnosti modelu je možné uskutočniť na základe očakávaných priebehov (napr. nárast teploty pri ohreve), alebo pri dosahovaní štandardných hodnôt veličín zodpovedajúcich podobným systémom (neopodstatnené teploty mimo očakávaný rozsah; účinnosť mimo platný rozsah; ...). Po odstránení takýchto typov chýb začína ďalšia fáza overovania platnosti modelu. Ak je to možné, vykoná sa porovnanie vypočítaných výsledkov numerického riešenia s experimentálnymi dátami alebo dátami z pozorovania reálneho deja alebo procesu.

Keďže experimenty bývajú realizované za určitých špecifických podmienok, môže sa stať, že dosiahnuté experimentálne výsledky sa líšia od vypočítaných výsledkov. Napr. matematický model obtekania zložitého telesa vzduchom sa zvyčajne idealizuje ako obtekanie jednoduchého telesa (gule, valca), zatiaľ čo skutočný experiment sa vykonáva v aerodynamickom tuneli konečných rozmerov, ktoré môžu mať na proces obtekania značný vplyv.

Na posúdenie, či matematický model dostatočne korešponduje s experimentálnymi dátami je potrebná skúsenosť a inžinierska intuícia technika, ktorý rozhoduje o overení daného matematického modelu.

Často sa stáva, že po overení matematického modelu je potrebné model modifikovať. Zvyčajne sa pod termínom modifikácie myslí prídanie nových faktorov alebo zmenu aproximácie už zahrnutých faktorov do modelu. V niektorých prípadoch je potrebná celková revízia modelu, ktorá môže zahŕňať úplne nový pohľad na problém. Po modifikácii modelu začína cyklus znova od začiatku: nové numerické riešenie, overovanie platnosti modelu, modifikácia atď. Tento proces je znázornený na obr.16.



Obr. 16 Proces kontroly a modifikácia modelu



## 2.4 Tvorba matematických modelov

Matematický model predstavuje idealizáciu skutočného fyzického systému, pričom proces tvorby a idealizácie modelu sa nazýva matematické modelovanie. Výsledkom matematického modelu je rovnica alebo sústava rovníc, ktoré popisujú (pri zanedbaní určitých faktorov) daný problém. V technickej praxi sa možno stretnúť s matematickými modelmi, ktoré sú vyjadrené v diferenciálnom alebo integrálnom tvare. Každý z tvarov má svoje výhody použitia, avšak z hľadiska názornosti sa najlepšie problém porozumie z diferenciálnej rovnice (to ale neznamená, že je najvýhodnejšia), preto sa tejto forme zápisu matematického modelu budeme venovať najviac.

Záverečná časť tejto kapitoly sa venuje prehľadu jednotlivých metód používaných pri simuláciách ako aj ich previazania s jednotlivými tvarmi matematického modelu.

Riešenie diferenciálnych rovníc numerickými metódami sa uplatňuje vo všetkých možných technických disciplínach, pretože diferenciálnymi rovnicami je možné vyriešiť väčšinu praktických problémov. Nie všetky diferenciálne rovnice je možné riešiť exaktne, pretože sú buď nelineárne alebo príliš zložité. Aj v prípade, že existuje analytické riešenie, môže byť tak zložité, že numerické riešenie predstavuje dobrú alternatívu.

### 2.4.1 Diferenciálny tvar modelu

Veľmi zjednodušene sa dá povedať, že diferenciálny tvar matematického modelu predstavuje diferenciálnu rovnicu obyčajnú alebo parciálnu, resp. ich systém s vhodnými okrajovými a počiatocnými podmienkami. Zostavený systém (diferenciálna rovnica, okrajové a počiatocné podmienky) predstavuje matematický model. Takto vytvorená forma matematického modelu sa nazýva silná forma (v anglickej literatúre strong form), lebo matematický model popisuje rovnováhu v každom bode oblasti systému. Tieto modely môžeme deliť podľa rôznych kritérií:

#### 1.) Podľa geometrického rozmeru úlohy:

- a) **jednorozmerné úlohy (1D)** – predstavujú maximálnu idealizáciu skutočného trojrozmerného problému na jednorozmerný – ak sa jedná o problém okrajových hodnôt (viď. ďalšie delenie), výsledkom je obyčajná diferenciálna rovnica,
- b) **dvojrôzmerne úlohy (2D)** – sú komplexnejšie v porovnaní s 1D modelmi – výsledkom je parciálna diferenciálna rovnica,
- c) **trojrozmerné úlohy (3D)** – sú najkomplexnejšie a najkomplikovanejšie, ich použitie nemusí byť vždy najefektívnejšie – výsledkom je parciálna diferenciálna rovnica,

#### 2.) Podľa okrajových podmienok:

- a) **problém okrajových hodnôt** – cieľom je určiť neznámu veličinu (napr. teplotu, potenciál, energetický tok,...) daného systému v konkrétnom čase (ktorý sa v rámci simulácie nemení), je to tzv. stacionárny problém. Tento problém býva definovaný na uzavretej oblasti, pričom okrajové podmienky sú zadefinované na hraniciach oblasti,
- b) **problém počiatocných hodnôt** – cieľom je určiť neznámu veličinu v závislosti na čase, pričom sú definované počiatocné podmienky na začiatku otvorenej oblasti, na ktorej je problém definovaný,
- c) **problém okrajovo-počiatocných hodnôt** – cieľom je určiť neznámu veličinu tak isto ako pri probléme okrajových hodnôt s tým rozdielom, že hľadaná veličina je nie len funkciou polohy ale aj času, tento problém predstavuje kombináciu predchádzajúcich dvoch problémov,

**d) problém vlastných čísel** – cieľom je určiť vlastné čísla systému, ktoré určitým spôsobom charakterizujú daný systém (napr. určujú vlastné frekvencie konštrukcie – rezonancia, ktorá je vo väčšine prípadov nežiaduca),

### 3.) Podľa oblasti, pre ktorú je daný problém typický:

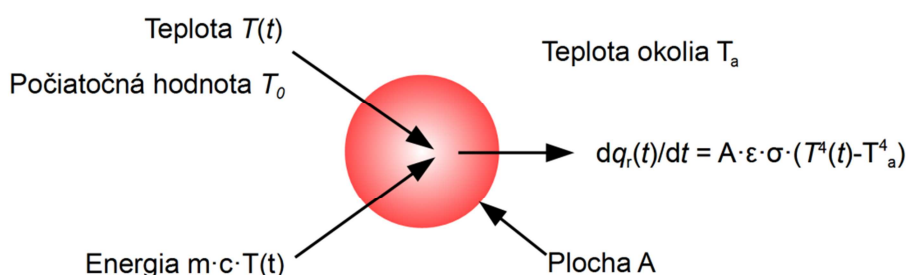
- ✓ oblasť elektrostatiky,
- ✓ oblasť elektromagnetizmu,
- ✓ oblasť termomechaniky,
- ✓ oblasť mechaniky,
- ✓ oblasť akustiky,
- ✓ oblasť hydromechaniky.

Zostavenie diferenciálnych rovníc problému sa najjednoduchšie uskutočňuje na konkrétnych príkladoch, preto v nasledujúcich častiach si ukážeme niekoľko príkladov.

#### 2.4.1.1 1D úloha – prenos tepla radiáciou

Obr. 17 zobrazuje sústredenú hmotu o hmotnosti  $m$ , pričom medzi touto hmotou a okolím sa uskutočňuje prenos tepla radiáciou. Hmotu na začiatku procesu prenosu tepla mala teplotu  $T(0) = T_0$  a teplota okolia, ktorá je počas celého procesu považovaná za konštantnú, má hodnotu  $T_a$ . Vonkajšia plocha, ktorá obklopuje sústredenú hmotu  $m$ , je označená ako  $A$ .

Vzhľadom na to, že hmotu považujeme za sústredenú, teplota takejto hmoty je potom popísaná iba jednou hodnotou – táto skutočnosť sa dá považovať za idealizáciu (zjednodušenie) skutočného reálneho problému.



Obr. 17 1D model prenosu tepla radiáciou

Diferenciálna rovnica tohto problému je odvodená na základe dvoch nasledujúcich zákonov.

**1.) Zákon zachovania energie** – tento zákon pre časovú oblasť pri prenose tepla radiáciou konštatuje, že časová zmena energie hmoty sa musí rovnať rýchlosti prenosu tepla. Energia hmoty  $m$  s teplotou  $T(t)$  v časovom okamžiku  $\tau$  a so špecifickou tepelnou kapacitou  $c$  má tvar:

$$E(\tau) = m \cdot c \cdot T(\tau) \quad (140)$$

Samotný zákon zachovania energie pre časovú oblasť je možné matematicky vyjadriť nasledovne:

$$\frac{dE(\tau)}{d\tau} = \frac{d(m \cdot c \cdot T(\tau))}{d\tau} = -A \cdot q(\tau) \quad (141)$$

kde:  $q(\tau)$  predstavuje hustotu tepelného toku (množstvo tepla, ktoré prechádza jednotkovou plochou za jednotku času) v časovom okamihu  $\tau$ .  $A$  – vonkajšia plocha telesa ( $m^2$ ).

**2.) Konštitutívny zákon** – Stefan-Boltzmanov zákon radiácie konštatuje, že:

$$q(\tau) = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4(\tau) - T_a^4) \quad (142)$$

kde:  $\sigma$  je Stefan-Boltzmanová konštanta ( $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ ),  $\varepsilon$  – emisivita telesa (hmoty) a vyjadruje pomer skutočnej radiácie k radiácii absolútne čierneho telesa.

Dosadením rovnice (142) do rovnice (141) dostávame rovnicu riešeného problému:

$$\frac{d(m \cdot c \cdot T(\tau))}{dt} = -A \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T^4(\tau) - T_a^4) \quad (143)$$

resp. po úprave:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\alpha \cdot (T^4(t) - T_a^4) \quad (144)$$

kde:  $\alpha = \frac{A \cdot \varepsilon \cdot \sigma}{m \cdot c} \quad (145)$

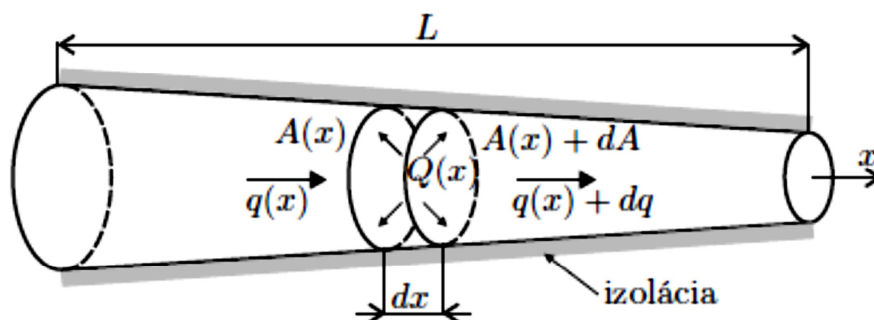
Pre diferenciálnu rovnicu (145) platí počiatočná podmienka  $T(t=0) = T_0$ , pričom ako je vidno z diferenciálnej rovnice tohto problému ako aj z danej počiatočnej podmienky, neznáma veličina  $T$  je iba funkciou času. Takto definovaný problém sa nazýva problém počiatočných hodnôt.

#### 2.4.1.2 2D úloha – prenos tepla kondukciou

Obr. 18 zobrazuje príklad, kde tepelný tok dominuje iba v jednom smere. Na tomto obrázku je dlhý tenký prút dĺžky  $L$  s premenlivým prierezom  $A(x)$ . Prierez sa mení po dĺžke postupne, príliš rýchla zmena prierezu by spôsobila, že tepelný tok by bol 2D alebo 3D.

Vonkajšia plocha je dokonale izolovaná, preto tepelný tok vo vnútri prúta má paralelný smer s vonkajšou plochou. Pretože prút je dostatočne dlhý, tepelný tok cez celý prierez bude dominantne prechádzať pozdĺž osi prúta. Iba tesne v okolí koncov prúta môže tepelný tok vykazovať odlišné správanie od 1-D tepelného tok v smere osi prúta.

Tento príklad reprezentuje matematickú idealizáciu, ktorá aproximuje skutočný systém. V skutočnosti izolácia nie je nikdy dokonalá a rozmery sú konečné. Či je vhodné použiť 1D model na riešenie, zostáva na rozhodnutí inžiniera.



Obr. 18 1D model tepelného toku

Diferenciálna rovnica tohto problému je odvodená na základe nasledujúcich dvoch princípov.

**1.) Zákon zachovania energie** – pre ustálený stav môžeme povedať, že energia ktorá do diferenciálneho elementu vstupuje sa musí rovnať energii, ktorá ten istý diferenciálny objem opúšťa. Do diferenciálneho objemu o dĺžke  $dx$  a priereze  $A(x)$  podľa obr. 18 vstupuje za jednotku času energia  $q(x)A(x)$ , ďalšia časť energie sa generuje od vnútorného objemového zdroja ( $x$ ), ktorej veľkosť za jednotku času je  $Q(x)A(x)dx$ , pričom z tohto elementu odchádza za jednotku času energia  $(q(x)+dq)(A(x)+dA)$ . Na základe uvedených skutočností, možno napísať rovnicu:

$$q(x) \cdot A(x) + Q(x) \cdot A(x) \cdot dx = (q(x) + dq) \cdot (A(x) + dA) \quad (146)$$

alebo zanedbaním diferencií druhého rádu dostávame rovnicu:

$$\frac{d}{dx}(q(x) \cdot A(x)) = Q(x) \cdot A(x) \quad (147)$$

kde:  $q(x)$  je hustota tepelného toku ( $W \cdot m^{-2}$ ),  $Q(x)$  – vnútorný objemový tepelný zdroj ( $W \cdot m^{-3}$ ).

**2.) Konštitutívny zákon** – Fourierov zákon vedenia tepla konštatuje, že:

$$q(x) = -\lambda(x) \cdot \frac{dT(x)}{dx} \quad (148)$$

kde:  $T(x)$  je teplota (K),  $\lambda(x)$  – tepelná vodivosť ( $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ ).

Diferenciálnu rovnicu riešenia 1D problému získame substitúciou rovnice (148) do (147) a dostávame:

$$-\frac{d}{dx} \left( \lambda(x) \cdot A(x) \cdot \frac{T(x)}{dx} \right) = Q(x) \cdot A(x) \quad (149)$$

alebo pre konštantný prierez prútu má rovnica tvar:

$$-\frac{d}{dx} \left( \lambda(x) \cdot \frac{T(x)}{dx} \right) = Q(x) \quad (150)$$

Na úplné doplnenie rovnice (44) alebo (45) je potrebné predpísať jednu okrajovú podmienku na každej strane prúta. Podmienkami môžeme špecifikovať buď teplotu  $T$  alebo hustotu tepelného toku  $q$ .

Okrajové podmienky nemôžu byť zvolené ľubovoľne, napr. pre tento príklad nemôžu byť predpísané podmienky na oboch koncoch prúta pomocou hustoty tepelného toku ( $q(0) = q_0$  a  $q(L) = q_L$ ), lebo takýmto spôsobom by problém nebol definovaný jednoznačne. Preto je dôležité správne predpísať príslušné okrajové podmienky. Môžu mať tvar:

$$\begin{aligned} T(0) &= T_0 \\ q(L) &= q_L \end{aligned} \quad (151)$$

alebo

$$\begin{aligned} T(L) &= T_L \\ q(0) &= q_0 \end{aligned} \quad (152)$$

Ako je vidno, rovnica (150), spolu s podmienkami (151) alebo (152), je iba funkciou polohy, pričom podmienky definujú stav systému na okrajoch (preto sa tieto podmienky nazývajú okrajové) a takto definovaný problém sa nazýva problém okrajových hodnôt.

Predchádzajúce úvahy boli vykonané za predpokladu ustáleného stavu, t.j. nezaujímal nás spôsob, akým sa systém do tohto stavu dostal. V prípade, že nás zaujíma práve táto oblasť (nazýva sa prechodová alebo nestacionárna), musí byť tento fakt zahrnutý v matematickom modeli. Aj v takomto prípade musí platiť zákon zachovania energie, ale musí byť prepísaný do časovej oblasti vo forme rýchlosti zmeny energie:

rýchlosť dodávania tepelnej energie – rýchlosť odoberania tepelnej energie = rýchlosť nárastu vnútornej tepelnej energie.

Vnútná energia diferenciálneho objemu  $dV$  je definovaná obdobne ako vzťah (140) a má tvar:

$$dE(x, \tau) = c(x)T(x, \tau)dm = \rho(x)c(x)T(x, \tau)A(x)dx \quad (153)$$

a jej derivácia je vyjadrená v tvare:

$$\frac{\partial E(x, \tau)}{\partial \tau} = \rho(x)c(x)\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau}A(x)dx \quad (154)$$

následne je rovnica (146) nahradená rovnicou:

$$q(x, \tau)A(x) + Q(x, \tau)A(x)dx - (q(x, \tau) + dq)(A(x) + dA) = \rho(x)c(x)\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau}A(x)dx \quad (155)$$

alebo po úprave (zanedbaním diferencií druhého rádu) získavame rovnicu:

$$\rho(x)c(x)A(x)\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(q(x, \tau)A(x)) = Q(x, \tau)A(x) \quad (156)$$

Konštitutívny zákon (142) ostáva v platnosti, jediná zmena spočíva v tom, že  $q$  aj  $T$  sú funkciami nielen polohy  $x$  ale aj času  $\tau$ . Výsledná diferenciálna rovnica sa opäť získa dosadením rovnice (142) do rovnice (156) a má tvar:

$$\rho(x)c(x)A(x)\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)A(x)\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x}\right) = Q(x, \tau)A(x) \quad (157)$$

alebo pre konštantný prierez:

$$\rho(x)c(x)\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x}\right) = Q(x, \tau) \quad (158)$$

Podmienky v rovnici (151) a (152) musia byť upravené na tvar:

$$T(0,0) = T_0$$

$$q(L,0) = q_L \quad (159)$$

resp.

$$T(L,0) = T_L$$

$$q(0,0) = q_0 \quad (160)$$

Pri takto definovanej úlohe hovoríme o probléme počiatko-okrajových hodnôt.

### 2.4.1.3 1D model 2D tepelného toku

Obr. 19 zobrazuje ten istý prút ako v predchádzajúcej ukážke, s tým rozdielom, že vonkajšia plocha nie je izolovaná. To znamená, že prút môže odovzdávať teplo aj okolitému médiu.

Ak okolité médium je plyn (napr. vzduch), mechanizmus straty tepla je konvekcia, tak ako to je znázornené na obr. 19. Tepelný tok už nie je 1D, lebo sa skladá zo zložiek rovnobežných aj kolmých na os prúta.

Aj keď teplota sa môže meniť po priereze, môžeme sa zaujímať iba o priemernú teplotu prierezu, t.j. jedinú teplotu pre každú súradnicu  $x$ . Obdobne sa môžeme pozerať aj na teplo stratené pôsobením konvekcie na vonkajšej ploche - priemerná hodnota straty tepla je rovnaká pre každú polohu  $x$  prúta.

Rovnice uvedené v predchádzajúcej časti musia byť potom modifikované nasledovne.

**1.) Zákon zachovania energie** – platí tu to, čo bolo napísané v predchádzajúcej časti, pričom k energii, ktorá diferenciálny element opúšťa treba pripočítať teplo stratené konvekciou, ktorého veľkosť pre element o dĺžke  $dx$  a o obvode plochy  $l(x)$  je popísaná  $\alpha l(x)(T - T_\infty) dx$ . Potom môžeme pre zákon zachovania energie napísať

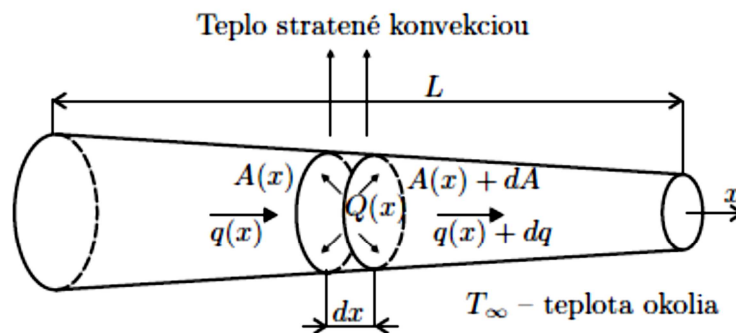
$$q(x)A(x) + Q(x)A(x)dx = (q(x) + dq)(A(x) + dA) + \alpha l(x)(T - T_\infty)dx \quad (161)$$

alebo zanedbaním diferencií druhého rádu získavame rovnicu:

$$\frac{d}{dx}(q(x)A(x)) + \alpha l(x)T(x) = Q(x)A(x) + \alpha l(x)T_\infty \quad (162)$$

kde:  $\alpha$  je koeficient prestupu tepla konvekciou ( $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ ), je to empiricky meraná materiálovo-fyzikálna vlastnosť, ktorá závisí tak na vlastnosti prúta a obtekajúceho média, ako aj na geometrii prúta.

$T_\infty$  - teplota okolia, znak  $\infty$  reprezentuje fakt, že sa jedná o teplotu plynu, ktorá je dostatočne ďaleko od skúmaného prúta, a teda nie je ním ovplyvnená.



Obr. 19 1D model 2D tepelného toku

**2.) Konštitutívny zákon** – zostáva rovnaký ako v predchádzajúcej časti a je prezentovaný vzťahom (148). Výslednú diferenciálnu rovnicu tohto 1D modelu 2D tepelného toku dostaneme dosadením rovnice (148) do rovnice (162) a má tvar:

$$-\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)A(x)\frac{T(x)}{dx}\right) + \alpha l(x)T(x) = Q(x)A(x) + \alpha l(x)T_\infty \quad (163)$$

alebo pre konštantný prierez prúta má tvar:

$$-\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{T(x)}{dx}\right) + \frac{\alpha l}{A}T(x) = Q(x)A(x) + \frac{\alpha l}{A}T_{\infty} \quad (164)$$

Takisto aj pri tomto probléme je potrebné na úplné opísanie problému zdefinovať okrajové podmienky. Môžu mať tvar (151) alebo (152).

Pri odvádzaní 1-D matematického modelu 2-D nestacionárneho tepelného toku by sme postupovali obdobne ako v predchádzajúcom príklade.

#### 2.4.1.4 2D úloha – prenos tepla kondukciou

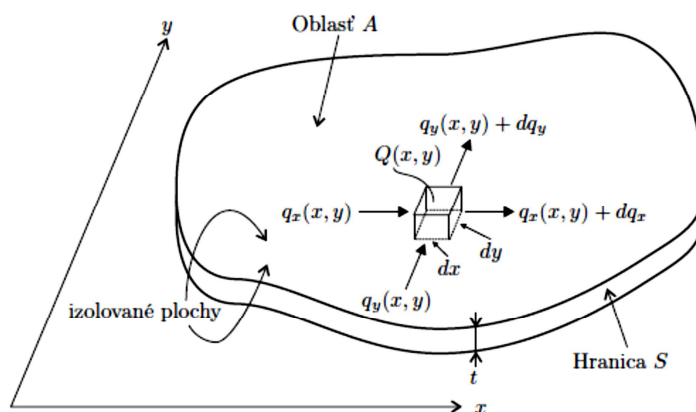
Obr. 20. zobrazuje tenkú vrstvu materiálu (škrupinu – t.j. rozmery v smeroch  $x$  a  $y$  sú ďaleko väčšie ako hrúbka  $t$ ). Vrchná a spodná plocha sú tepelne izolované, takže tepelný tok je obmedzený na prúdenie v rovine  $xy$  – oblasť  $A$  s hranicou  $S$ . Hrúbka  $t$  je konštantná na celom telese.

Odvodenie diferenciálnej rovnice problému je realizované rovnakým postupom ako pri 1D problémoch.

**Zákon zachovania energie** – opäť tu môžeme vykonať energetickú bilanciu na diferenciálnom elemente o rozmeroch  $dx \times dy \times t$ . Energiu vstupujúcu do tohto diferenciálneho objemu za jednotku času je možné vyjadriť v tvare  $q_x(x, y)tdy + q_y(x, y)tdx$ , vystupujúcu energiu za jednotku času  $(q_x(x, y) + dq_x)tdy + (q_y(x, y) + dq_y)tdx$  a generované teplo za jednotku času je  $Q(x, y)tdxdy$ .

Potom výslednú energetickú bilanciu môžeme napísať v tvare:

$$q_x(x, y)tdy + q_y(x, y)tdx + Q(x, y)tdxdy = (q_x(x, y) + dq_x)tdy + ((q_y(x, y) + dq_y)tdx) \quad (165)$$



Obr. 20 2D tepelného toku

Po jednoduchých úpravách a zanedbaním diferencií vyššieho rádu dostávame zákon zachovania energie v tvare:

$$\frac{\partial q_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial q_y(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) \quad (166)$$

**Konštitutívny zákon** – platí opäť Fourierov zákon vedenia tepla, ktorý vzhľadom k osi  $x$  a  $y$  môžeme napísať v tvare:

$$\begin{bmatrix} q_x(x, y) \\ q_y(x, y) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_x(x, y) & 0 \\ 0 & \lambda_y(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial T(x, y) / \partial x \\ \partial T(x, y) / \partial y \end{bmatrix} \quad (167)$$

kde:  $\lambda_x(x, y)$ ,  $\lambda_y(x, y)$  sú tepelné vodivosti v smere osi  $x$  a  $y$ .

Dosadením rovnice (166) do rovnice (167) dostávame diferenciálnu rovnicu 2D vedenia tepla v tvare:

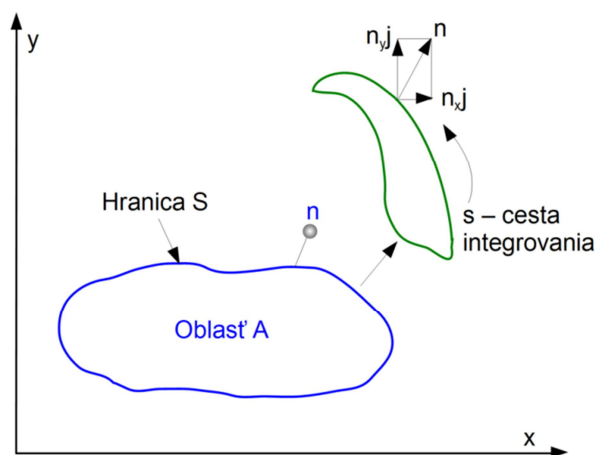
$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x(x, y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y(x, y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) = Q(x, y) \quad (168)$$

Aby bol systém úplný, je potrebné predpísať príslušné okrajové podmienky. Možno ich zapísať v tvare:

$$T(x, z) = T(s) = \bar{T} \quad \text{na hranici } S_T \quad (169)$$

$$q_n(x, y) = q_n(s) = -\lambda_n \frac{\partial T(s)}{\partial n} = q_x n_x + q_y n_y = \bar{q} \quad \text{na hranici } S_q \quad (170)$$

pričom  $s$  označuje cestu na hranici  $S$ ,  $T(s) = \bar{T}$  predstavuje predpísanú teplotu na hranici  $S_T$ ,  $q_n(s) = \bar{q}$  predstavuje predpísanú hustotu tepelného toku na hranici  $S_q$ , ktorý prúdi v smere vonkajšej normály na hranicu  $S_q$ . Pre celkovú hranicu  $S$  a hranice  $S_T$  a  $S_q$  platí  $\bar{S} = S_T + S_q$ . Normála na hranicu  $S$  je definovaná jednotkovým vektorom  $n$ , ktorého zložky do smeru  $x$  a  $y$  sú  $n_x$  a  $n_y$  – obr. 21.



Obr. 21 Definovanie normály na hranici  $S$  oblasti  $A$

V prípade, že tepelná vodivosť materiálu je v každom bode telesa rovnaká,  $\lambda_x(x, y) = \lambda_y(x, y) = \lambda$ , potom rovnica (168) má tvar:

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \right) = -Q(x, y) \quad (171)$$

a príslušné okrajové podmienky sú definované vzťahmi:

$$T(x, y) = T(s) = T \quad \text{na hranici } S_T \quad (172)$$

$$q_n(x, y) = q_n(s) = -\lambda \frac{\partial T(s)}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{na hranici } S_q \quad (173)$$

Rovnica (171) sa nazýva Poissonova a v prípade, že pravá strana je rovná nule, potom sa nazýva Laplaceova.



## 2.4.2 Integrálny tvar modelu

Integrálny tvar matematického modelu predstavuje váhové integrálne rovnice, pričom takáto forma matematického modelu sa nazýva slabá forma (v anglickej literatúre weak form).

V tejto časti budú ukázané integrálne tvary 1D a 2D modelov, pričom 3D modely môžu byť odvodené analogicky k 2D modelom.

### 2.4.2.1 1D integrálny model

Pri tejto forme matematického modelu sa vychádza z diferenciálnej rovnice, z ktorej sa vytvorí rezíduum. Pre 1D problémy, ktoré boli opísané v predchádzajúcej časti diferenciálnymi rovnicami (150) a (164) s príslušnými okrajovými podmienkami, môžu byť obecné zapísané pre oblasť  $x \in [0, L]$  v tvare:

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + \beta(x)u(x) = f(x) \quad (174)$$

s okrajovými podmienkami

$$u(0) = u_0$$

$$\tau(L) = -\alpha(L)\left(\frac{du(x)}{dx}\right)\Big|_{x=L} = \tau_L \quad (175)$$

alebo

$$u(L) = u_L \quad (176)$$

$$\tau(0) = -\alpha(0)\left(\frac{du(x)}{dx}\right)\Big|_{x=0} = \tau_0$$

pričom obecný konštitutívny zákon môže byť zapísaný v tvare:

$$\tau(x) = -\alpha(x)\frac{du(x)}{dx} \quad (177)$$

Výrazy pre jednotlivé zmienené rovnice sú zosumarizované v tab. 1. Reziduálna rovnica (174) má potom tvar:

$$R(x) = \frac{d}{dx}\left(\alpha(x)\frac{u(x)}{dx}\right) - \beta(x)u(x) + f(x) \quad (178)$$

Tab. 1 Význam koeficientov pre rôzne 1D problémy

Aplikácia	Neznáma	Matematicko – fyzikálne vlastnosti		Vnútorne zaťaženie	Derivácia neznámej
<b>Všeobecná formulácia</b>	$u(x)$	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	$f(x)$	$\tau(x)$
<b>Vedenie tepla</b>	$T(x)$ teplota	$\lambda(x)$ tepelná vodivosť	-	$Q(x)$ tepelný tok	$q(x)$ hustota tepelného toku
<b>Vedenie tepla s konvekciou</b>	$T(x)$ teplota	$\lambda(x)$ tepelná vodivosť	$\alpha \cdot // A$ konvekcia	$Q(x) + \alpha \cdot l \cdot T^\infty$ tepelný tok + konvekcia	$q(x)$ hustota tepelného toku

Kvôli jednoduchosti budeme uvažovať, že materiálovo-fyzikálne vlastnosti sú na skúmanej oblasti konštantné, t.j.  $\alpha(x) = \alpha$  a  $\beta(x) = \beta$ . Potom rovnica (178) sa zjednoduší na tvar:

$$R(x) = \alpha \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \beta u(x) + f(x) \quad (179)$$

Obdobným spôsobom môžeme zdefinovať aj reziduá pre rovnice okrajových podmienok (175), ktoré potom majú tvar:

$$R_1 = u(0) - u_0 \quad R_2 = \tau(L) - \tau_L \quad (180)$$

Diferenciálna rovnica s príslušnými okrajovými podmienkami resp. silná forma matematického problému je ekvivalentná s tvrdením, že reziduum z rovnice (178) ako aj reziduá z okrajových podmienok (179) sú rovné nule (t.j.  $R(x) = 0$ ,  $R_1 = 0$  a  $R_2 = 0$ ) v každom bode skúmanej oblasti  $x \in [0, L]$ .

Samotnú váhovú integrálnu rovnicu dostaneme vynásobením rezidua  $R(x)$  príslušnou váhou  $w(x)$  a integrovaním po oblasti problému, pričom takto zostavená rovnica je položená nule. Pre prípad, že okrajové podmienky sú splnené exaktne (platí  $R_1 = 0$  a aj  $R_2 = 0$ ), potom takto zostavená rovnica má tvar:

$$\int_L R(x) \cdot w(x) dx = 0 \quad (181)$$

resp. po dosadení rovnice (178) do predchádzajúceho vzťahu dostávame:

$$\int_L \left( \alpha \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \beta u(x) + f(x) \right) w(x) dx = 0 \quad (182)$$

V prípade, že reziduum diferenciálnej rovnice  $R(x) \neq 0$  a ani okrajové podmienky nie sú splnené exaktne (platí  $R_1 \neq 0$ ,  $R_2 \neq 0$ ), potom aj tieto reziduá musia byť zahrnuté do príslušnej integrálnej rovnice. Zahrnutie týchto okrajových podmienok sa realizuje nasledovným postupom. Kvôli prehľadnosti v ďalšom postupe nebudeme uvádzať argument  $x$ .

Rovnica (183) môže byť upravená nasledovne

$$\alpha \int_L \frac{d^2 u}{dx^2} w dx - \int_L \beta u w dx + \int_L f w dx = 0 \quad (183)$$

Prvý integrál na ľavej strane môže byť upravený:

$$\int_L \frac{d^2 u}{dx^2} w dx = \int_L \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} w \right) dx - \int_L \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \left( \frac{du}{dx} w \right) \Big|_0^L - \int_L \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx \quad (184)$$

Obdobný postup môžeme aplikovať na druhý integrál na pravej strane rovnice (184):

$$\int_L \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_L \frac{d}{dx} \left( u \frac{dw}{dx} \right) dx - \int_L u \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \left( u \frac{dw}{dx} \right) \Big|_0^L - \int_L u \frac{d^2 w}{dx^2} dx \quad (185)$$

čím dostaneme rovnicu vyjadrenú v tvare:

$$\int_L \frac{d^2 u}{dx^2} w dx = \left( \frac{du}{dx} w \right) \Big|_0^L - \left( u \frac{dw}{dx} \right) \Big|_0^L + \int_L u \frac{d^2 w}{dx^2} dx \quad (186)$$

Dosadením výrazu (186) do rovnice (183) dostávame integrálnu váhovú rovnicu v tvare

$$\alpha \left( \frac{du}{dx} w \right) \Big|_0^L - \alpha \left( u \frac{dw}{dx} \right) \Big|_0^L + \int_L \alpha u \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \int_L \beta u w dx + \int_L f w dx = 0 \quad (187)$$

resp. využitím rovnice (177) dostávame:

$$(-\tau w) \Big|_0^L - \alpha \left( u \frac{dw}{dx} \right) \Big|_0^L + \int_L \alpha u \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \int_L \beta u w dx + \int_L f w dx = 0 \quad (188)$$

Rozpísaním tohto výrazu a zohľadnením okrajových podmienok (175) sa získa rovnica:

$$\begin{aligned} & -\tau_L w(L) + \tau(0)w(0) - \alpha u(L) \left( \frac{dw}{dx} \right) \Big|_{x=L} + \alpha u_0 \left( \frac{dw}{dx} \right) \Big|_{x=0} + \\ & + \int_L \alpha u \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \int_L \beta u w dx + \int_L f w dx = 0 \end{aligned} \quad (189)$$

čo je integrálna váhová rovnica, ktorá má v sebe zahrnuté aj príslušné okrajové podmienky. V prípade, že by sme chceli mať túto rovnicu vyjadrenú pomocou reziduií  $R$ ,  $R_1$  a  $R_2$ , musíme túto rovnicu spätne upraviť využitím vzťahu (186). Potom dostávame:

$$(\tau(L) - \tau_L)w(L) - \alpha(u(0) - u_0) \left( \frac{dw}{dx} \right) \Big|_{x=0} + \int_L \left( \alpha \frac{d^2 u}{dx^2} - \beta u + f \right) w dx = 0 \quad (190)$$

čo sa dá využitím spomínaných reziduií  $R$ ,  $R_1$  a  $R_2$  (ktoré sú definované vzťahmi (178) a (179)) prepísať na tvar:

$$\int_0^L R w dx - \alpha R_1 \left( \frac{dw}{dx} \right) \Big|_{x=0} + R_2 w(L) = 0 \quad (191)$$

Takto zostavená integrálna váhová rovnica predstavuje najvšeobecnejší prípad.

## 3 POČÍTAČOVÁ SIMULÁCIA

Počítačová simulácia bola vyvinutá ruka v ruke s rýchlym vývojom výkonných počítačov. Prvé veľké nasadenie bolo Manhattanským projektom v druhej svetovej vojne na procesnom modeli jadrového výbuchu. Jednalo sa o simuláciu 12 ťažkých guľ pomocou algoritmu Monte Carlo. Počítačová simulácia sa často používa ako doplnok alebo náhrada pre modelovanie systémov. Existuje mnoho rôznych druhov počítačových simulácií.

Počítačové modely boli pôvodne používané ako doplnok k ďalšej dokumentácii, ale ich použitie sa neskôr stalo pomerne rozšírené. Dôvody pre využitie simulácií sú nasledovné:

Pomocou simulácií je možné riešiť aj veľmi zložité systémy, ktoré nie je možné vyriešiť analytickými metódami a postupmi.

Simulácia umožňuje štúdium chovania systému v reálnom, zrýchlenom alebo spomalenom čase. Na simulačnom modeli je možné v krátkom čase „odsimulovať“ reálny proces, ktorý môže trvať niekoľko dní či mesiacov.

Už samotné skúsenosti z tvorby modelu môžu viesť k návrhu na zlepšenie riadenia, či štruktúry systému.

Simulácia umožňuje komplexnejší pohľad na študovaný problém. Priamo núti tvorcú a užívateľa modelu, aby prekročili hranice svojej odbornosti a snažili sa o všestranný pohľad na skúmaný systém.

Pomocou simulácie je možné preveriť rôzne varianty riešenia, a tým minimalizovať riziká chybných rozhodnutí.

Už raz vytvorený model je možné použiť aj v iných aplikáciách.

### 3.1 Simulačné programy

Vývoj simulačných programov je zaznamenaný od 60-tych rokov a prebiehal najmä na technických univerzitách vo Veľkej Británii, Francúzsku, USA a Kanade. S postupom času sa vývoj presunul z univerzít do firiem, ktoré tento vývoj mohli urýchliť a financovať.

Simulačné programy môžu byť rozdelené do niekoľkých hlavných kategórií:

- a) **Jednouúčelové simulačné programy:** slúžia pre riešenie celkom konkrétnych procesov, ich výhodou je rýchlosť riešenia úlohy, pretože nespracúvajú toľko operácií ako ostatné simulačné programy.
- b) **Univerzálny simulačné programy:** pomocou týchto programov, sa môžu simulovať procesy s odlišnou a voliteľnou topológiou.
- c) **Špecializované simulačné programy:** sú podobné univerzálnym simulačným programom. Hlavným rozdielom medzi nimi je, že sa obmedzujú na určité zariadenia v procese.

Súčasnú univerzálnu simulačnú programy už majú veľmi podobnú ustálenú štruktúru, pretože musia zabezpečovať určité funkcie. Väčšina týchto programov je založená na využívaní sekvenčno-modulárnych metód a hoci sú niektoré operácie v rôznych programoch riešené inak, majú mnoho spoločných rysov a obsahujú tieto súčasti:

- 1.) **Užívateľské rozhranie:** patrí k najdôležitejšej súčasti programu, pretože vďaka nemu môže používateľ komunikovať s programom a umožňuje mu vytvoriť topologickú schému. Ďalej sprostredkováva vyvolávanie rôznych funkcií, zadávanie vstupných dát a zobrazovanie výsledkov (napr. kontúry teplôt, prietokov a koncentrácií).

- 2.) **Správa simulačných úloh** je potrebná, pokiaľ je simulačný program využívaný viacerými užívateľmi. Každá simulačná úloha je jednoznačne pomenovaná a zaradená do databázy tak, aby nedošlo k jej prípadnému nechcenému zmazaniu.
- 3.) **Knižnica jednotkových modulov:** každý simulačný program má zabudované vopred definované jednotkové moduly, ktoré reprezentujú model jednotkovej operácie a umožňujú vykonanie výpočtu. Modelovaním rôznych jednotkových operácií sa zaoberá celá rada publikácií. U niektorých programov je možné podľa potreby definovať aj vlastné jednotkové moduly, ak ich programy neobsahujú. Vytváranie vlastných modulov je veľmi ťažké, pretože užívateľ musí veľmi dobre ovládať programovací jazyk a musia sa zachovať pravidlá pre vstupy a výstupy modulu podľa používaného programu.
- 4.) **Databáza fyzikálno-chemických vlastností:** pre zachovanie dostatočnej presnosti simulačného výpočtu musia programy vedieť kvalitne popísať fyzikálno-chemické deje. Súčasný simulačný program popisujú všetky štandardné metódy technickej fyzikálnej chémie a niektoré obsahujú aj špeciálne metódy, ktoré sú ťažko opísateľné. Do tejto súčasti programu je zahrnutá databáza fyzikálno-chemických dát a knižnica fyzikálno-chemických metód, ktoré slúžia na výpočet týchto vlastností. Súčasný simulačný program už umožňuje aj vytvorenie vlastných databáz fyzikálno-chemických dát, ak ich neobsahujú.
- 5.) **Knižnica numerických metód:** je zabudovaná do programov pre prípady, že pri riešení úloh je nutné použiť rôzne numerické metódy.
- 6.) **Riadenie simulačného výpočtu:** pre správny simulačný výpočet u sekvenčne modulárnych programov je dôležité mať možnosť ho riadiť a to predovšetkým kvôli opakovanému používaniu modelov jednotkových operácií v rôznom kontexte. Používateľ má možnosť zmeniť maximálny počet iterácií, toleranciu pri konvergenčnom kritériu či zvoliť inú konvergenčnú metódu. Tiež môže zmeniť poradie výpočtu modelov jednotkových operácií, kde však musí vziať do úvahy, že musí zadať počiatočné odhady pre rôzne dátové toky. Ďalej je užívateľovi umožnené sledovať priebeh výpočtu, kde je upozorňovaný na výsledky výpočtu jednotlivých uzlov a prerušovať ho podľa potreby. Ak si chce užívateľ udržať kontrolu nad výpočtom môže použiť funkciu krokovania výpočtu, ktoré mu umožňuje sledovať výpočet po jednotlivých elementárnych krokoch. U moderných simulačných programov je aj možnosť využívania citlivostnej analýzy, ktorá umožňuje sledovať vplyv zmien hodnôt určitého parametra na riešenie simulačnej úlohy.
- 7.) **Služby:** v súčasnosti sú simulačné programy rozširované o rad služieb, ktoré umožňujú vykonávať sprievodné výpočty pred alebo po vykonaní daného výpočtu. Medzi najpoužívanejšie služby patria podprogramy pre: stanovenie konštánt pre fyzikálno-chemické vzťahy z experimentálnych dát, odhady konštánt fyzikálno-chemických vzťahov, vytváranie užívateľskej databázy fyzikálno-chemických dát, dodatočné výpočty či sprievodcu pri riešení simulačných úloh.

## 3.2 Základné časti simulácie

Počítačové simulácie sú značne rozmanité a je možné konštatovať, že čokoľvek, čo možno matematicky popísať, možno tiež simulovať pomocou počítača. Popisom sa má na mysli proces rozčlenenia javu na základné samostatné prvky, ktorým možno priradiť určité hodnoty a určitý počet pravidiel, podľa ktorých sa tieto prvky navzájom správajú.

Počítačovú simuláciu je možné rozdeliť do nasledujúcich krokov:

### 1.) Návrh modelu:

- ✓ stanovenie počiatočných a okrajových podmienok,
- ✓ zostavenie modelu.

### 2.) Prevedenie simulácie:

- ✓ využitie/tvorba programu,
- ✓ vizualizácia problému,
- ✓ pozorovanie problému.

### 3.) Analýza získaných údajov.

## 3.3 Vstupné údaje pre numerický výpočet

Požiadavky na vstupné údaje a modely sa veľmi líšia podľa konkrétnej modelovanej situácie. Pre niektoré typy simulácií postačuje len niekoľko údajov (napríklad simulácia priebehu striedavého prúdu), zatiaľ čo iné simulácie požadujú niekoľko terabajtov informácií (jedná sa napr. o počítačové simulácie predpovede počasia a klimatických modelov).

Simulačný model pracuje s údajmi v rôznych formách a vstupné premenné sa od seba značne líšia:

- ✓ údaje zo snímačov a ďalších zariadení pripojených k zariadeniu,
- ✓ aktuálne alebo historické údaje zadané ručne,
- ✓ hodnoty získané ako vedľajší produkt iných procesov,
- ✓ výstupné hodnoty inej simulácie, modelu, alebo procesu.

Ďalej sa údaje potrebné pre simuláciu líšia podľa závislosti na čase:

- ✓ Nemenné údaje sú často napísané do kódu modelu, a to buď preto, že hodnota je skutočne nemenná (napr. hodnota  $\pi$ ), alebo preto, že konštruktéri ich považujú za hodnotu, ktorá sa nemení pre všetky prípady.
- ✓ Údaje vstupujúce do simulácie načítaním jedného alebo viac súborov, alebo načítaním údajov z preprocesora.
- ✓ Údaje môžu byť poskytnuté v priebehu simulácie napr. zo senzorov.

V počítačovej simulácii je možné vidieť značnú rozmanitosť, ale aj mnoho spoločných prvkov. Z tohto dôvodu existuje veľké množstvo špecializovaných simulačných jazykov.

## 3.4 Výhody a nevýhody použitia simulácie

Medzi výhody použitia simulácie patrí:

- a) Simulácia umožňuje preveriť všetky aspekty navrhovanej zmeny bez nutnosti vynaloženia zdrojov na jej realizáciu.** Náklady na odstránenie následkov zlého rozhodnutia, alebo úprava už hotového riešenia, môžu byť v niektorých prípadoch veľmi nákladné (napr. zle navrhnutá technológia s poddimenzovaným zdrojom...).
- b) Možnosť zmeny rýchlosti toku času.** Takto je možné dôkladne preskúmať vybraný jav, alebo niekoľko hodín skúmať jav, ktorý v skutočnosti trvá len pár minút.
- c) Pochopenie príčin vzniku sledovaného úkazu v reálnom systéme,** ktorý nemožno vysvetliť jeho skúmaním, pretože ho nemožno zachytiť alebo riadiť v jeho celistvosti. Príčiny tak možno určiť podrobným skúmaním rekonštrukcie udalostí, ktoré v systéme prebehli.
- d) Skúmanie možností úprav systému.** Akonáhle je k dispozícii vhodný simulačný model reálneho systému, je možné navrhovať a skúmať nové zásady, postupy alebo metódy bez ďalších nákladov a prerušenia činností v systéme.

- e) **Simulácia ponúka komplexnejší pohľad na študovaný problém.**
- f) **Pozorovanie činnosti simulačného modelu vedie k lepšiemu pochopeniu reálneho systému.**

Medzi nevýhody použitia simulácie patrí:

- a) **Vytváranie modelov vyžaduje odborné školenie.** Je to zručnosť, ktorá sa vďaka skúsenostiam časom zlepšuje.
- b) **Výsledky simulácie možno niekedy interpretovať len s veľkými ťažkosťami.** Vzhľadom k tomu, že väčšina výstupov simulácie sú v podstate náhodné veličiny vychádzajúce z náhodných vstupov, možno niekedy ťažko určiť, či je pozorovanie výsledkom vzájomných vzťahov v systéme alebo výsledkom čistej náhodnosti.
- c) **Simulačné modelovanie a analýzy môžu byť časovo náročné a drahé.** Šetrenie na zdrojoch pre modelovanie a analýzy môže mať za následok vytvorenie modelu alebo analýzy, ktoré sú pre daný účel nedostatočné.
- d) **Simulácia môže byť použitá nevhodne.** Použitie simulácie môže byť nevhodné v prípadoch, kedy je analytické riešenie dosiahnuteľné, ak nie dokonca uprednostňované.

## 4 SOFTVÉROVÁ PODPORA PRE SIMULAČNÝ PROGRAM ANSYS CFX

Návrh energetických zariadení je úzko spätý s využívaním numerických metód založených na metóde konečných objemov. Tieto metódy búrajú zábrany klasického riešenia problematiky analytickou cestou a urýchľujú celkový výpočet. Simulácia spočíva vo vytvorení prevažne 3D geometrie, ktorá sa následne diskretizuje vytvorením siete s konečným počtom elementov. Zadaním podmienok jednoznačnosti do simulačného nástroja, spolu s aplikovaním potrebných modelov a diferenciálnych rovníc, sa vykoná numerický výpočet, po ktorom je možné vyhodnotiť hľadané parametre. Zadávanie fyzikálnych a okrajových podmienok je značne časovo náročné, hlavne pri závislých okrajových podmienkach. Takouto podmienkou je hodnota súčiniteľa prestupu tepla (SPT) pri simuláciách prechodových javov ako je ohrev alebo ochladzovania telies. Súčiniteľ prestupu tepla je pri voľnej konvekcii výrazne závislý na povrchovej teplote riešeného okrajového elementu siete a to hlavne pri uvažovaní sálania.

Pri simulačných výpočtoch, v ktorých sa simuluje zmes plynov, je možné využiť bohatú knižnicu materiálov v programe Ansys CFX. K riešeniu postačujúce nastavenie jednotlivých parametrov zmesi plynov prináša aj možnosť zostavenia matematickej závislosti hľadaných veličín od tlaku a teploty riešeného elementu pomocou viacrozmernej regresie.

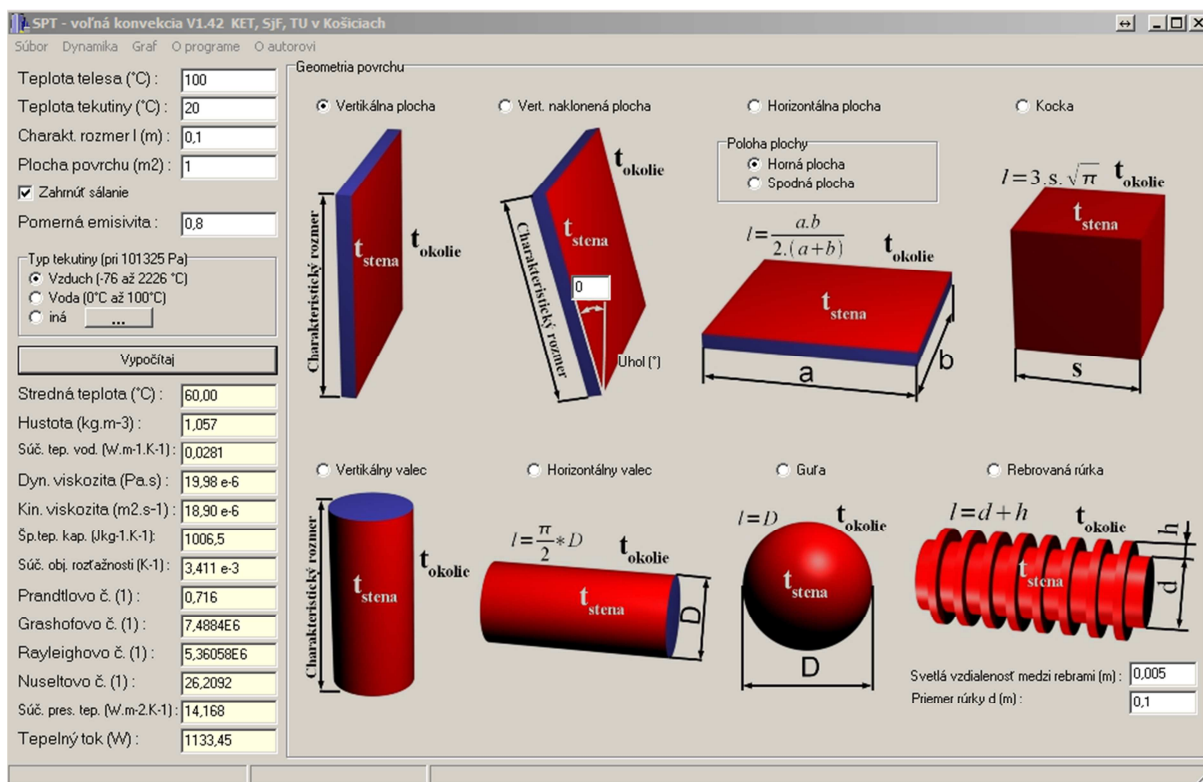
### 4.1 SPT-VK

Manuálny výpočet súčiniteľa prestupu tepla je zdĺhavá záležitosť nielen z pohľadu odčítavania fyzikálnych vlastností tekutín, ktoré sú potrebné pre stanovenie kritérií podobnosti, ale aj z pohľadu samotného cyklického riešenia pre viacero hodnôt povrchových teplôt. Vzhľadom na požiadavku pre urýchlenie zadávania okrajovej podmienky 3. druhu vznikol podnet na vytvorenie softvéru SPT-VK (súčiniteľ prestupu tepla – voľná konvekcia), ktorý umožňuje vypočítať SPT pre rozsah povrchovej teploty geometrie zadanej používateľom až po rozsah platnosti kritériálnej rovnice.

Grafické okno je rozdelené na výber základných typov geometrie od vertikálnych plôch až po rebrované rúrky, pričom pri každom type je zobrazený charakteristický rozmer  $l$  (Obr. 22). Po spustení výpočtu program načíta teplotu telesa, teplotu tekutiny, charakteristický rozmer a emisivitu povrchu v prípade uvažovania sálania. V prípade požiadavky ukladania údajov do súboru je možné v nástrojovej lište nastaviť rozsah povrchovej teploty steny spolu s teplotným krokom, s ktorým sa bude výpočet vykonávať. Neodmysliteľnou súčasťou programu je voľba materiálu. V súčasnosti je možný výber vzduchu, vody, resp. zadanie fyzikálnych vlastností ľubovoľnej tekutiny. Všetky materiálové vlastnosti sú závislé od teploty. Pre zabezpečenie správneho výpočtu program kontroluje nielen rozsahy povolených teplôt, ale aj rozsah platnosti jednotlivých kritériálnych rovníc, resp. kritérií podobnosti.

Hlavnou výhodou použitia softvéru SPT-VK je urýchlenie zadávania okrajovej podmienky 3. druhu do simulačného programu ANSYS CFX, keďže program umožňuje exportovať súbory s príponou „.ccl“. Ide o textové súbory ktoré obsahujú nastavenia v CFX. Po výbere možnosti exportu do „.ccl“ súboru si program vyžiada názov okrajovej podmienky, čím sa predídne duplicitnému zadaniu pri viacerých okrajových podmienkach v jednej simulácii.

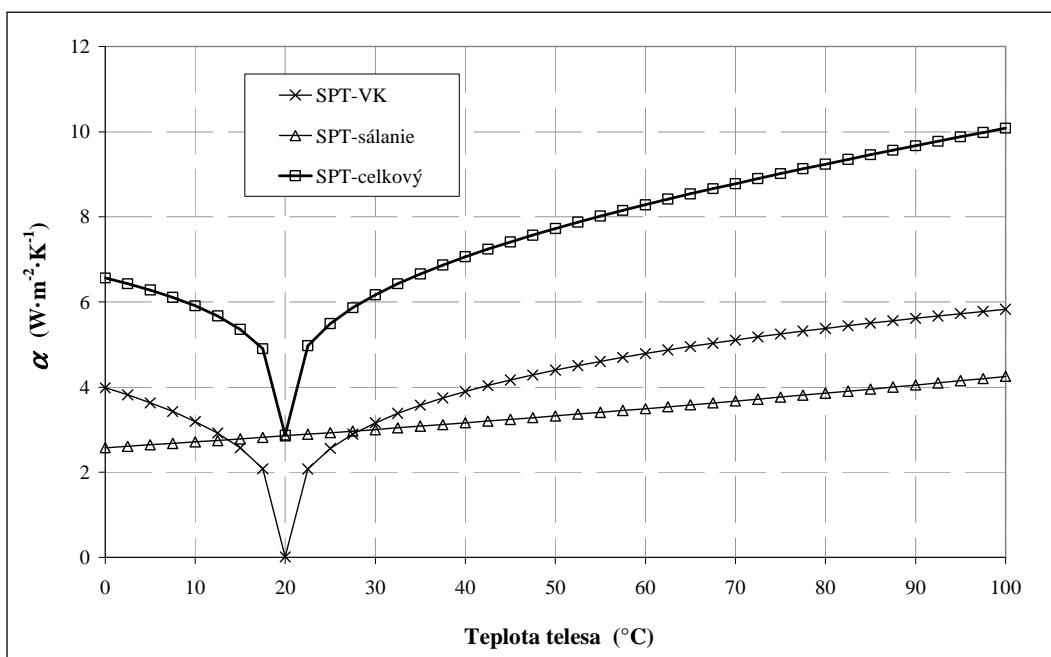




Obr. 22 Pohľad na grafické okno programu SPT-VK

Počet exportovaných hodnôt SPT je závislý od nastaveného rozsahu a kroku teploty v nástrojovej lište. Do súboru pre simulačný program sa zapisuje len celkový súčiniteľ prestupu tepla (v obr. 23 STP-celkový -  $\alpha_c$ ). V prípade, že si užívateľ zvolí zakomponovať do výpočtu sálenie, odzrkadlí sa v celkovom SPT ako súčet SPT voľnej konvekcie a ekvivalentného SPT od sálenia:

$$\alpha_c = \alpha(Pr, Gr) + \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_s^2 + T_t^2) \cdot (T_s + T_t) \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}) \quad (192)$$

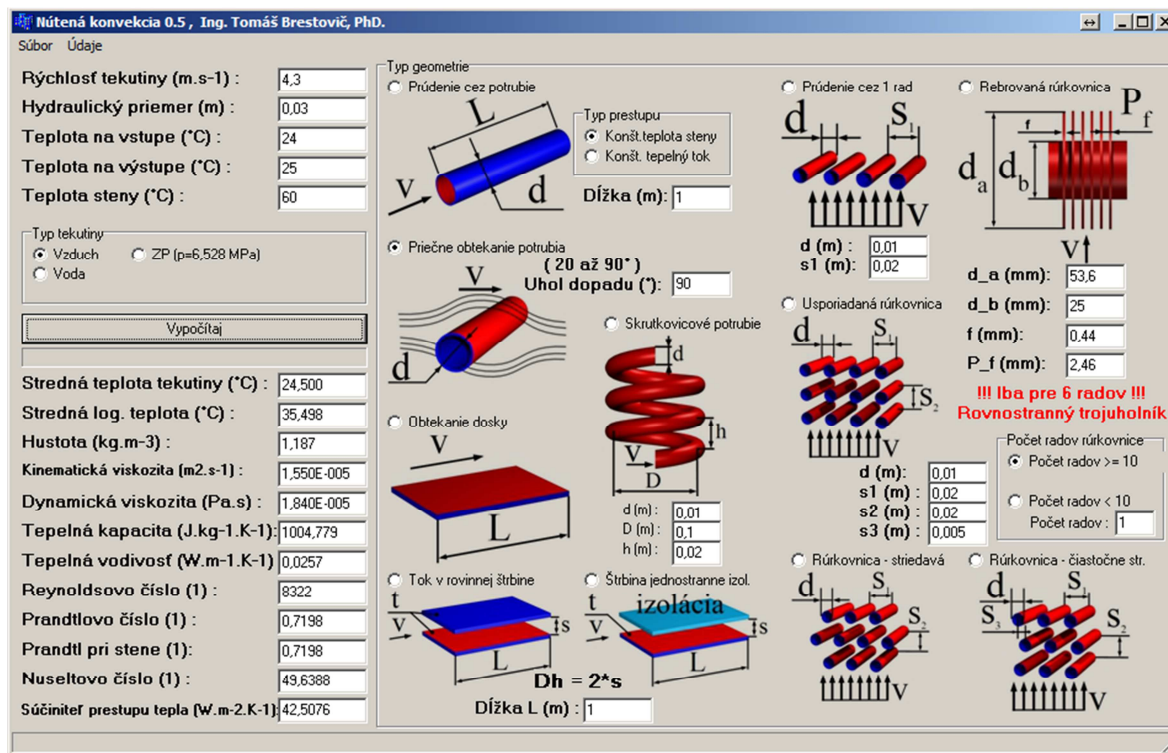


Obr. 23 Priebeh súčiniteľa prestupu tepla v závislosti od teploty telesa

Na obr. 23 je znázornený priebeh súčiniteľov prestupu tepla vypočítaných pri voľnej konvekcii pomocou programu SPT-VK pre zvislú dosku, s charakteristickým rozmerom 1 m, teplotou tekutiny 20°C a emisivitou 0,5. Použitou tekutinou bol vzduch.

## 4.2 SPT -NK

Podobne ako v predchádzajúcom softvéri aj softvér SPT – NK stanoví súčiniteľ prestupu tepla, avšak v tomto prípade ide o nútenú konvekciu. Pohľad na okno je na obr. 24.



Obr. 24 Pohľad na okno programu SPT-NK

Softvér umožňuje aj export SPT do externého súboru v závislosti na rýchlosti prúdiacej tekutiny.

## 4.3 MPGM

V ANSYS CFX je možné vytvárať zmesi plynov napr. pomocou importovania čistých plynov, ktorých stavové veličiny sú počítané pomocou Peng – Robinsonovej stavovej rovnice (PRSR) s následným zadaním ich vzájomného pomeru. Snaha o zjednodušenie zadávania a definovania zmesi plynov s jej materiálovými vlastnosťami viedla k vytvoreniu softvéru MPGM (Material Properties of Gas Mixtures), ktorý má predvolených 18 plynov pre ľubovoľné vytvorenie zmesi (Obr. 25).

MPGM v1.4, doc. Ing. Tomáš Brestovič, PhD.

Ulož Autor

Obsah vodíka (%) :	0	100
Obsah dusíka (%) :	0,81	100
Obsah kyslíka (%) :	0	100
Obsah CO2 (%) :	0,13	100
Obsah NH3 (%) :	0	100
Obsah metánu (%) :	97,23	100
Obsah etánu (%) :	1,39	100
Obsah propánu (%) :	0,44	100
Obsah izo-butánu (%) :	0	100
Obsah n-butánu (%) :	0	100
Obsah izo-pentánu (%) :	0	100
Obsah n-pentánu (%) :	0	100
Obsah hexánu (%) :	0	100
Obsah H2O (%) :	0	100
Hélium He (%) :	0	100
Neón Ne (%) :	0	100
Argón Ar (%) :	0	100
CO (%) :	0	100

Teplota (°C) : 27

Tlak (MPa) : 5,01

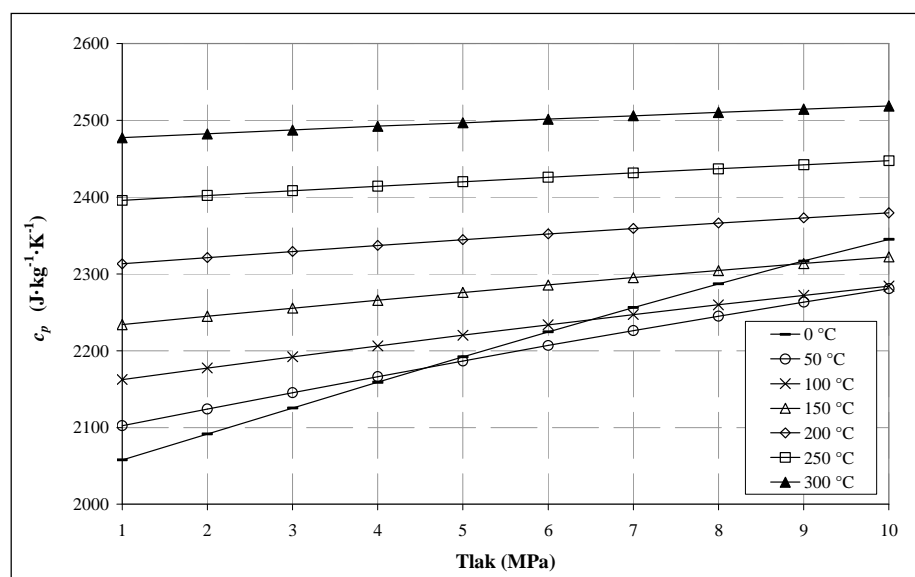
Vypočítaj

Špec. plyn. konšt. (J.kg-1.K-1)	504,080
Kompres. faktor_PR (1)	0,89792
Hustota (kg.m-3)	36,87751
Dyn. viskozita (Pa.s)	12,19891 * 10 <sup>-6</sup>
Kin. viskozita (Pa.s)	0,33080 * 10 <sup>-6</sup>
c_p (J.kg-1.K-1)	2532,01
Tepelná vodivosť (W.m-1.K-1)	38,952 * 10 <sup>-3</sup>
Joule-Thomson (K.Pa-1)	3,95030 * 10 <sup>-6</sup>
Prandtlovo kritérium :	0,7930

Preddefinované zmesi: ZP, Vzduch, Bioplyn (BS)

Modifikácia PR EoS:  Standard,  Chapoy model,  GERG model

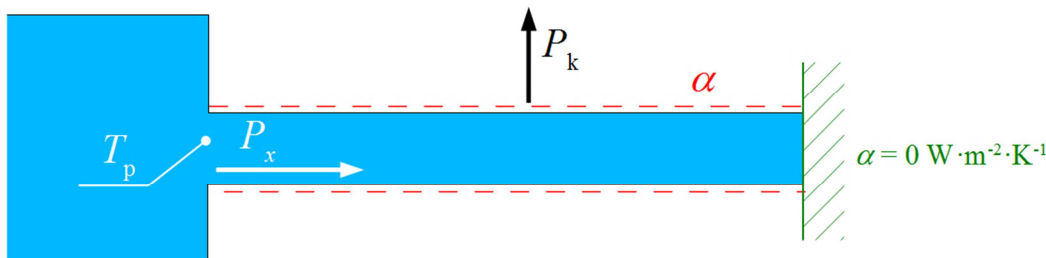
Obr. 25 Grafické okno programu MPGM

Obr. 26 Priebeh tepelnej kapacity  $c_p = f(p, T)$  pre zmes plynov 30%  $H_2$ , 30%  $N_2$ , 40%  $CH_4$ 

Pre ľubovoľnú zmes plynov program počíta kompresibilitný faktor podľa PRSR (z ktorého je následne vypočítaná hustota), tepelná kapacita (Obr. 26), transportné vlastnosti, ale aj Joule-Thomsonov koeficient a Prandtlovo kritérium.

## 5 STACIONÁRNE VEDENIE TEPLA ROVINNÝM REBROM

Vedenie tepla rozšírenými plochami (rebrami) je pri konštantnom priereze rebra pomerne jednoducho riešiteľné analytickým spôsobom. Najjednoduchším vyjadrením teplotného poľa a celkového odvedeného tepelného výkonu z rebra je stav, keď sa uvažuje s adiabatickým koncom rebra. Ďalším predpokladom analytického riešenia je jednorozmerné vedenie tepla s konštantným súčiniteľom prestupu tepla na plášti rebra.



Obr. 27 Rovinné rebro s konštantným prierezom s uvažovaním adiabatického konca a jednorozmerného vedenia tepla

Teplotu na päte rebra je možné vypočítať riešením diferenciálnej rovnice (DR) pre rozšírené plochy, pričom tvar výsledného vzťahu je

$$T_x = (T_p - T_o) \cdot \frac{\cosh[m \cdot (L - x)]}{\cosh(m \cdot L)} + T_o \quad (1) \quad (193)$$

kde  $T_x$  je teplota rebra vo vzdialenosti  $x$  od päty (K),  
 $T_p$  - teplota päty rebra (K),  
 $T_o$  - teplota okolia (K),  
 $L$  - celková dĺžka rebra (m),  
 $x$  - súradnica - vzdialenosť od päty rebra (m).

Na získanie celkového tepelného toku, ktorý je odvedený rebrom z päty rebra pri jej známej teplote, je možné použiť vzťah

$$P_r = \sqrt{\alpha \cdot \lambda \cdot p \cdot A} \cdot (T_p - T_o) \cdot \tanh(m \cdot L) \quad (\text{W}) \quad (194)$$

kde  $\alpha$  je súčiniteľ prestupu tepla na povrchu rebra ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  
 $\lambda$  - súčiniteľ tepelnej vodivosti rebra ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  
 $p$  - obvod rebra v reze kolmom na smer tepelného toku kondukciou (m),  
 $A$  - prierezová plocha rebra v reze kolmom na smer tepelného toku kondukciou ( $\text{m}^2$ ).

Parameter  $m$  predstavuje substitúciu konštant počas riešenia DR a určí sa nasledovne

$$m = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{p}{A}} \quad (\text{m}^{-1}) \quad (195)$$

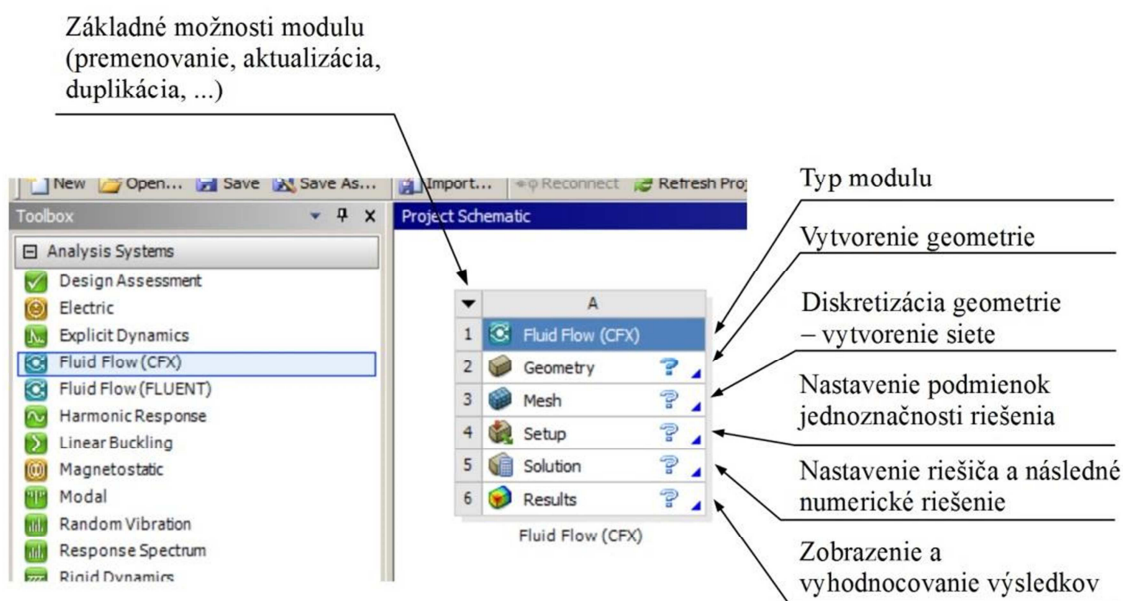
### 5.1 Zedefinovanie úlohy

Uvažujte vedenie tepla rovinným rebrom valcovitého tvaru s konštantným priemerom 30 mm a dĺžkou 550 mm. Materiál tyče je hliník, pričom je chladený po obvode plášťa kolmo prúdiacim vzduchom s teplotou 24 °C a rýchlosťou 4,3  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Teplota na päte rebra je 80°C. Uvažuje sa adiabatický koniec rebra (bez prestupu tepla). Vzhľadom na nízku emisivitu povrchu rebra sálanie zanedbajte. Úlohu riešte ako stacionárnu po ustálení prechodových javov ohrevu.

Výsledok celkového tepelného toku odvedeného rebrom, ako aj teplotné pole po dĺžke rebra porovnajte s analytickým výpočtom.

## 5.2 Numerické riešenie úlohy

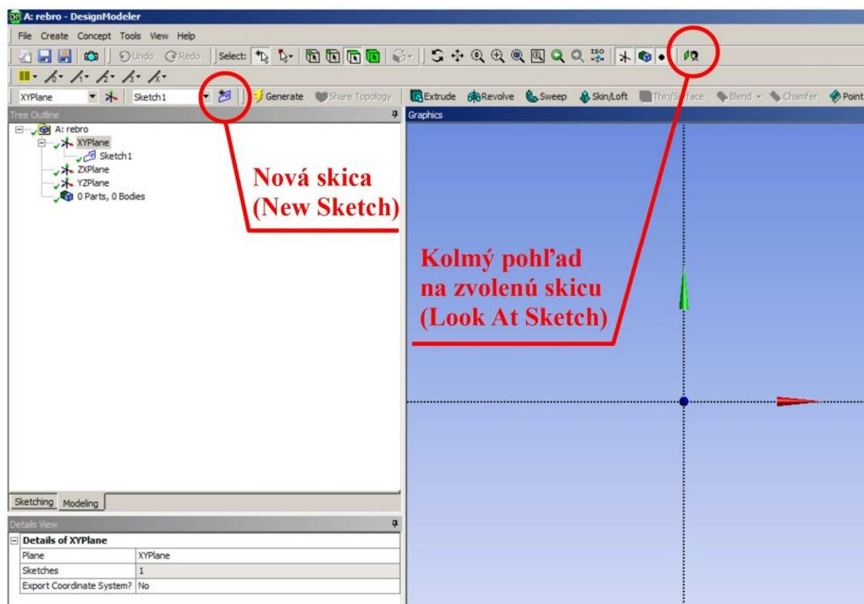
ANSYS CFX je primárne určený na numerické riešenie prúdenia metódou konečných objemov s prídavnými modelmi (turbulencia, prenos tepla, chemické reakcie, ...), avšak je možné počítať ním aj vedenie tepla v tuhých látkach. Po prvotnom spustení základného pracovného prostredia Workbench je nutné zvoliť si z ľavej ponuky nástrojov „Analysis Systems“ modul „Fluid Flow (CFX)“ (pretiahnuť myšou do „Project Schematic“, alebo aktivovať dvojitým kliknutím na LM – ľavé tlačidlo myši). V prázdnej časti „Project Schematic“ dôjde k otvoreniu modulu, ktorý pozostáva z nasledujúcich častí chronologicky zostavených podľa nutnej nadväznosti (Obr. 28)



Obr. 28 Popis jednotlivých častí modulu CFX v prostredí Workbench

Prvým krokom pri riešení je potreba vytvorenia geometrie, pričom na tento účel slúži „Design modeler“ (aktivuje sa dvojitým kliknutím na položku „Geometry“). Po jeho otvorení je možné pracovať v základnom grafickom okne, ktoré je rozčlenené do nasledujúcich častí:

- „Graphics“ – 3D okno pre zobrazenie a manipuláciu s geometriou,
- „Tree Outline“ – zobrazenie stromovej štruktúry objektu (zostavy). Pod stromovou štruktúrou sa nachádzajú dve záložky. „Modeling“ zobrazuje predvolenú stromovú štruktúru, „Sketching“ umožňuje prejsť do nástrojov skicovania „Sketching Toolboxes“
- „Details View“ – zobrazuje detaily jednotlivých komponent a entít.
- Nástrojová lišta so základnými možnosťami (výber, objemové operácie, tvorba nových rovín, ...) obsiahnutými detailne v rozbaľovacej lište.



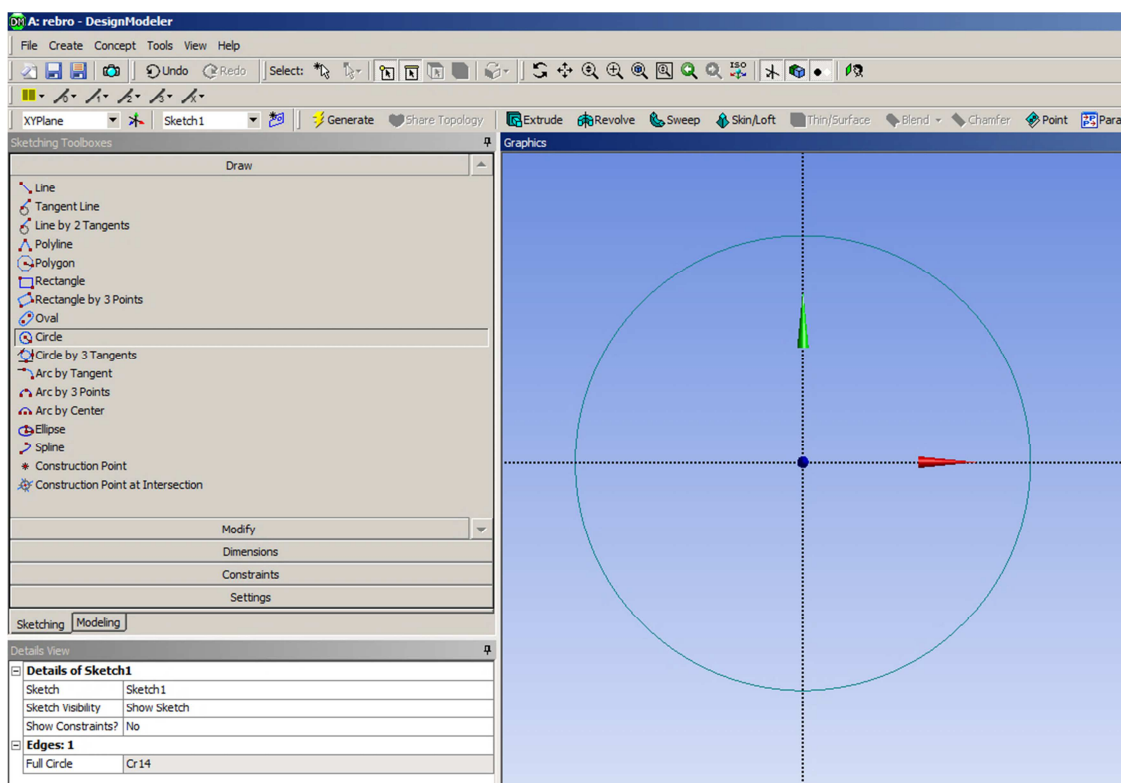
Obr. 29 Pohľad na Design Modeler (nástroj pre vytváranie geometrie)

Kreslenie skíc, z ktorých je možné vytvárať objemové operácie, prebieha vo zvolenej rovine v ktorej je nutné umiestniť skicu. Kreslenie je možné chápať nasledujúcou abstrakciou: rovina je chápaná ako myslená plocha v priestore, na ktorú je možné kresliť len vložením výkresu, na ktorý je možné vkladať 2D geometrické útvary. Výkresom sa rozumie „Sketch“, ktorých počet v jednej rovine nie je obmedzený. Pokiaľ sa použije skica na vytvorenie objemovej operácie (napr. extrudovanie) nevyklučuje to jej ďalšie využitie v inej objemovej operácii za predpokladu, že nedôjde k zmenám v skici.

Vloženie novej skice sa realizuje výberom roviny (pri kreslení prvého objektu často irelevantné) a následným potvrdením tlačidla v nástrojovej lište „New Sketch“ (Obr. 29). V prípade chybného kroku je možný návrat pomocou ikony „Undo“ umiestnenej v nástrojovej lište. Pre kolmý pohľad na zvolenú rovinu (skicu) slúži ikonka „Look At Sketch“ (možné potvrdiť aj pomocou LM v okne „Graphics“). Vytvorená skica sa objaví pod príslušnou zvolenou rovinou aj v stromovej štruktúre projektu. Jej výberom sa po prepnutí na záložku „Sketching“ (pod stromovou štruktúrou) dostaneme do ponuky pre vytváranie náčrtu s príslušnými modifikáciami a kótami.

Výberom „Circle“ z ponuky „Draw“ nakreslíme kružnicu so stredom v strede súradnicového systému. Následným výberom „Diameter“ z ponuky „Dimensions“ zakótujeme priemer kružnice (LM na kružnicu a LM na oblasť mimo kružnicu). V 3D okne sa zobrazuje iba názov kóty (napr. D1), samotnú hodnotu je nutné nastaviť v okne detailov („Details View“) pod príslušným názvom kóty. Nastavením priemeru kružnice na 30 mm je skica pre náš účel ukončená. Jej extrudovaním do priestoru (objemovou operáciou) získame valec.

Extrudovanie je možné vykonať priamo pomocou ikony „Extrude“ z nástrojov lišty, resp. pomocou rozbaľovacieho menu /Create/Extrude. Vlastnosti operácie sa nastavujú v „Details View“.



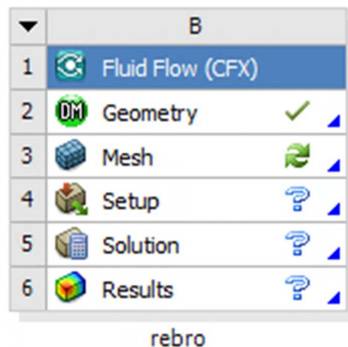
Obr. 30 Vytvorenie kružnice v Design Modeler

V časti „Depth“ je nutné nastaviť dĺžku extrudovania na 550 mm. Ostatné parametre je možné ponechať bez zmeny, avšak pre ich pochopenie je v tab. 2 znázornený ich popis.

Tab. 2 Možnosti nastavenia objemovej operácie „Extrude“

NÁZOV	HODNOTA	POPIS
Extrude	Extrude1 (voliteľné)	➤ názov objemovej operácie
Base Object	Sketch1 (voliteľné)	➤ skica použitá pre extrudovanie
Operation	Add material Cut material Add frozen Slice material	➤ pridanie materiálu ➤ odobratie materiálu ➤ pridanie „zamrzutej“ geometrie ➤ delenie materiálu
Direction Vector	None (Normal)	➤ vektor pre smer extrudovania
Direction	Normal Reversed Both – Symmetric Both - Asymmetric	➤ extrudovanie v smere normály ➤ extr. do opačného smeru ➤ symetrické extrudovanie do oboch smerov ➤ asymetrické extrudovanie do oboch smerov
Extend Type	Fixed Through All To Next To Faces To Surfaces	➤ pevná dĺžka ➤ cez všetky 3D objekty ➤ extr. po prvú plochu iného objektu ➤ extr. po vybranú plochu objektu ➤ extr. po zvolený neohraničený povrch
As Thin/Surface?	yes - no	➤ extrudovať ako tenkostenný prvok - škrupina

Pre potvrdenie zadania a vytvorenie 3D geometrie zvolte z nástrojovej lišty položku „Generate“. Projekt je teraz možné ukončiť pomocou */File/Save Project*.



Obr. 31 Potvrdenie úspešného vytvorenia geometrie – zelené odškrtnutie položky „Geometry“ v prostredí „Workbench“

Po úspešnom vytvorení geometrie je možné pokračovať diskretizáciou objektu pomocou siete. Dvojitým kliknutím na položku „Mesh“ dôjde k otvoreniu nástroja pre sieťovanie telies. Sieť bude následne využitá pri výpočte metódou konečných objemov.

Nástroj „Meshing“ má podobné usporiadanie okien ako „Design Modeler“. Líši sa oknom správ, ktoré je umiestnené pod 3D oknom. V stromovej štruktúre je popis geometrie, koordinačného systému a siete „Mesh“. Samotné vytvorenie siete si vyžaduje postupnosť krokov:

1. Nastavenie metódy sieťovania: a) tetrahedron (štvorsten)  
b) hexahedron (šesťsten)  
c) Sweep – ťahanie siete (tetra, resp. hexahedron)
2. Nastavenie veľkosti siete, príp. zhustenie siete vo vybraných regiónoch geometrie.
3. Nastavenie zhustenej siete v blízkosti steny – simulácia s medznou vrstvou pri prúdení (Nútné používať pri turbulentnom prúdení tekutín)
4. Prídavné nastavenia pre optimalizáciu siete (napr. mapovanie siete).

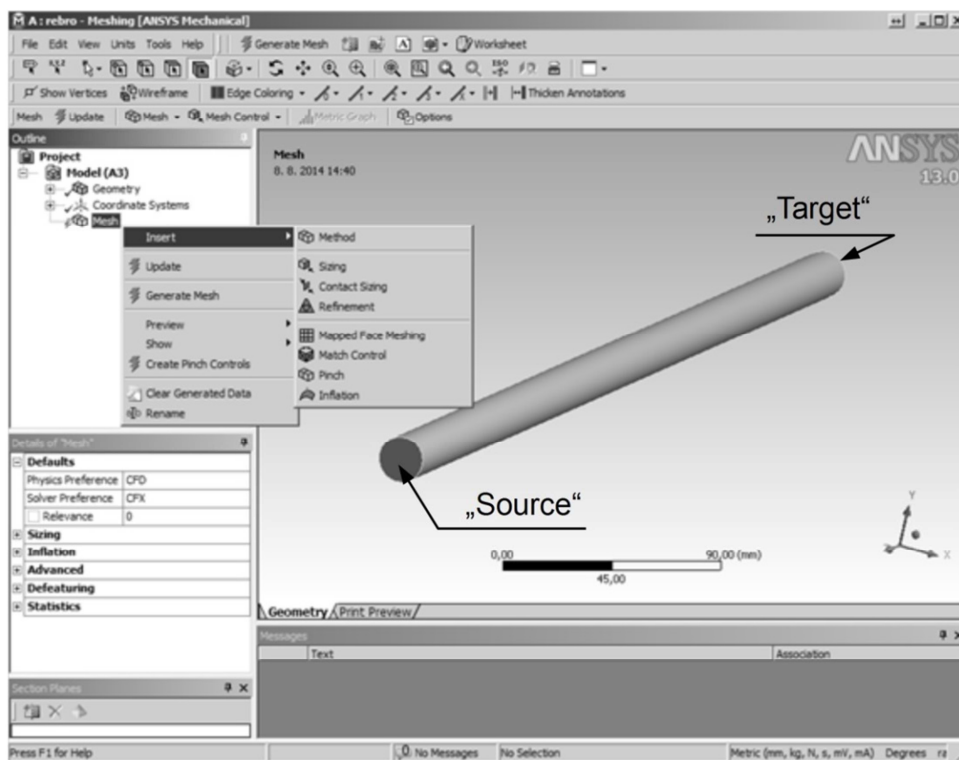
Pre riešenie simuláciu postačuje zdefinovať len prvé dva body. Metódu sieťovania nastavíme kliknutím pravým tlačidlom myši (PM) na položku „Mesh“ v stromovej štruktúre a následným výberom */Insert/Method*. V okne detailov je nutné kliknúť na žlté políčko „Geometry – No Selection“, zvoliť geometriu v 3D okne, pre ktorú chceme nastaviť metódu pomocou LM, a následne potvrdiť tlačidlom „Apply“ (Tlačidlo sa objaví namiesto žltej plochy, na ktorú sme predtým klikli myšou). V položke „Method“ nastavíme metódu „Sweep“.

Táto metóda umožňuje ťahanie siete medzi dvoma plochami s vopred zadaným počtom vrstiev a nezávislou veľkosťou elementov. Je veľmi vhodná pre sieťovanie dlhých a tenkých súčiastok, pri ktorých sa zásadne nemení tvar prierezovej plochy, a súčasne je najväčší gradient skúmanej veličiny po dĺžke telesa.

Zadefinujeme parametre siete typu Sweep a veľkosť elementu siete:

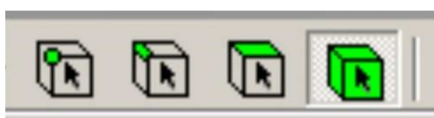
- V položke „Src/Trn Selection“ zvolíme „Manual source and target“, čím sa nám zobrazia dva vstupy pre manuálne zvolenie počiatku a konca ťahania siete.
- V položke „Source“ klikneme na žltú plochu „No Selection“ a v 3D okne vyberieme jednu z kruhových plôch tyče.
- V položke „Target“ opäť klikneme na prislúchajúce políčko „No Selection“ a vyberieme v 3D okne protiahlú kruhovú plochu (Obr. 32).



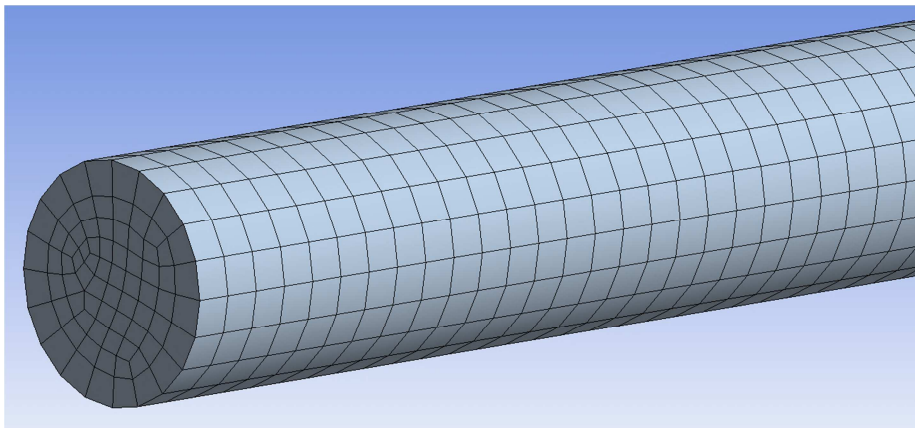


Obr. 32 Pohľad na okno programu „Meshing“

- Po zadefinovaní okrajových plôch je možné nastaviť počet elementov pre rozdelenie rebra po dĺžke. Na tento účel je možné použiť položku „**Sweep Num Divs**“, pričom zmeníme hodnotu „**default**“ na „**200**“. Po kliknutí PM na položku „Mesh“ v stromovej štruktúre a výbere „Generate Mesh“ sa vytvorí sieť, ktorá bude po dĺžke rozdelená na 200 častí (vrstiev). Nastavená veľkosť parametra „**Sweep Num Divs**“ ovplyvňuje aj kvalitu výpočtu výsledného tepelného toku, ako aj rozloženia teploty po dĺžke rebra. Nízka hodnota rozloženia siete spôsobí dosiahnutie väčšej nepresnosti numerického výpočtu, keďže pri tomto type prenosu tepla je dôležitý hlavne tepelný tok pozdĺž osi. Naopak zvyšovaním parametra sa zvyšuje presnosť výsledku na úkor predĺženia času výpočtu, vzhľadom na väčší počet elementov.
- Ako už bolo opísané v predchádzajúcej zarážke, majoritným je pozdĺžny tepelný tok, a teda nastavenie veľkosti elementu v priereze rebra si nevyžaduje zbytočné zhustenie siete. Kliknutím PM na „**Mesh**“ v stromovej štruktúre a výberom „**Insert / Sizing**“ vyvoláme zadanie veľkosti siete.
- V 3D okne klikneme LM na teleso (Uistite sa, že máte v nástrojovej lište zvolený výber telies podľa obr. 33, keďže naposledy bol použitý výber plôch.) a výber potvrdíme tlačidlom „Apply“.
- V položke „Element Size“ zmeníme „default“ na „3 mm“ (platí ak máte zadefinované jednotky v „Menu / Units“ na „Metric (mm, kg, N, s, mV, mA)“). Priemerná veľkosť elementov bude nastavená na 3 mm, pričom po dĺžke tyče sa riadi nastaveniami siete typu „Sweep“. Sieť regenerujeme opätovným výberom „Generate Mesh“ z položky „Mesh“.



Obr. 33 Možnosti nastavenia výberu z 3D geometrie (zľava): bod, hrana, plocha, teleso



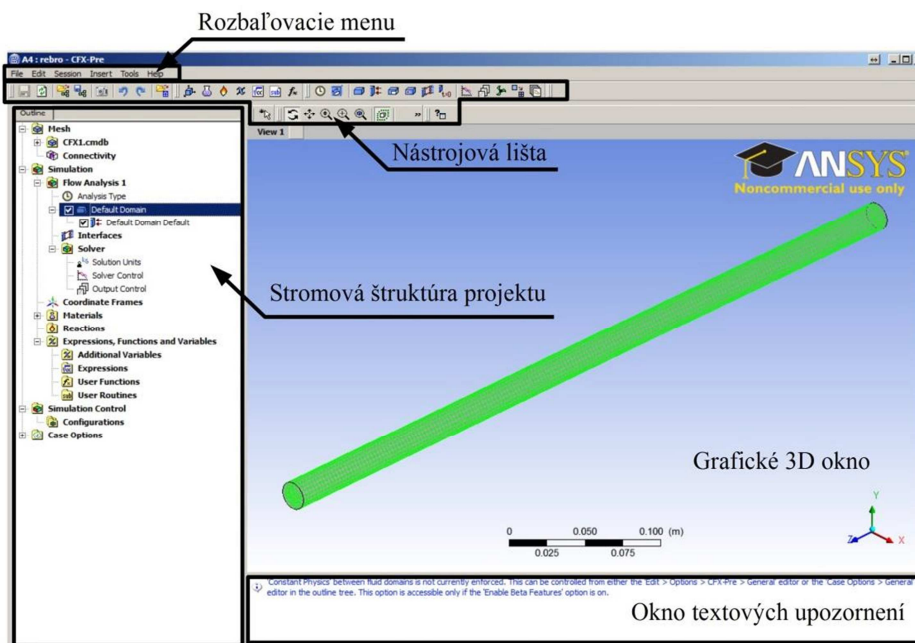
Obr. 34 Pohľad na časť vygenerovanej siete pre zvolenú geometriu

Na obr. 34 je detailný pohľad na časť vygenerovanej siete použitím metódy Sweep. Sieť obsahuje 13800 elementov a 15910 uzlových bodov. Pre aktualizovanie siete do prostredia „Workbench“ je nutné stlačiť „Update“ v nástrojovej lište. Po tomto kroku je možné zatvoriť okno sieťovania „Meshing“.

V prostredí „Workbench“ spustíme v poradí tretiu časť simulácie „Setup“, ktorá slúži na definovanie všetkých podmienok jednoznačnosti (materiálové vlastnosti, okrajové podmienky, počiatočné podmienky, ...).

### 5.3 Nastavenie ANSYS CFX-Pre


Pracovné prostredie definovania podmienok jednoznačnosti CFX-Pre pozostáva z jednotlivých častí podľa obr. 35. V grafickom 3D okne sa automaticky zobrazí geometria s vytvorenou sieťou. V stromovej štruktúre je geometria zastúpená automatickým generovaním položky „Default Domain“. Dvojitým kliknutím na položku otvoríme detaily domény (výpočtovej oblasti) s možnosťou zmeny prednastavených parametrov.

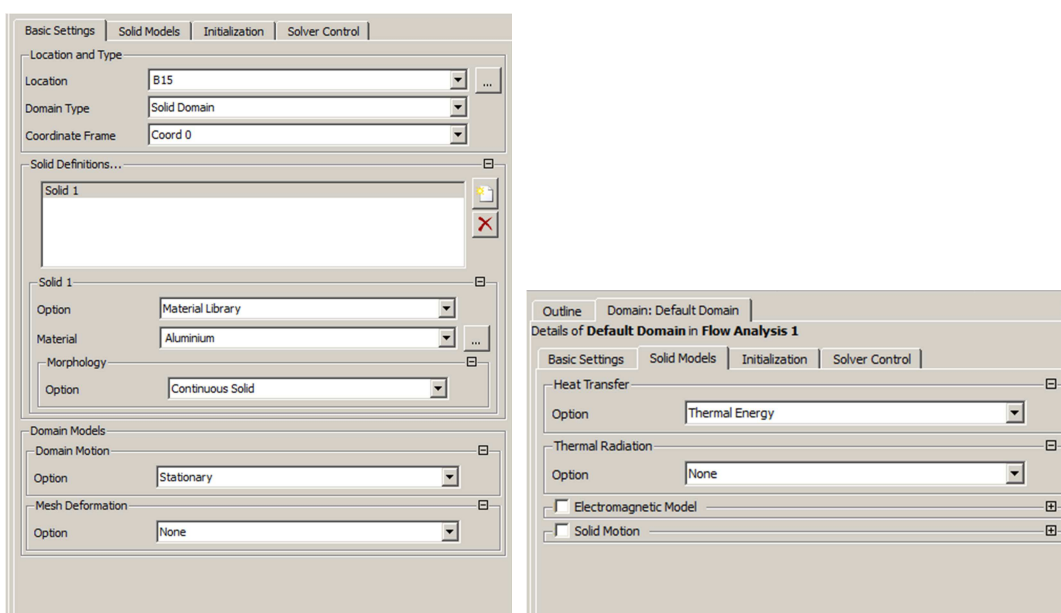


Obr. 35 Grafické prostredie CFX-Pre

Nastavenie jednotlivých položiek pre doménu:

### I. Basic Settings

- Location - objemové entity, pre ktoré platí nastavenie v týchto záložkách. Simulácia v tomto prípade obsahuje iba jednu položku s prideleným označením.
- Domain type – položku zmeníme na „Solid Domain“, keďže ide o tuhé teleso.
- Solid Definition / Solid 1 / Material – volíme typ materiálu „Aluminium“ (hliník). V prípade potreby iného typu materiálu, ako sú predvolené v rozbaľovacej ponuke je možné importovať materiály z knižníc pomocou tlačidla  vedľa rozbaľovacej ponuky, resp. je možné vytvoriť nový materiál v časti „Materials“ (nachádza sa v stromovej štruktúre projektu).



Obr. 36 Nastavenie vlastností domény

### II. Solid models (záložka sa zobrazí až po výbere „Solid Domain“)

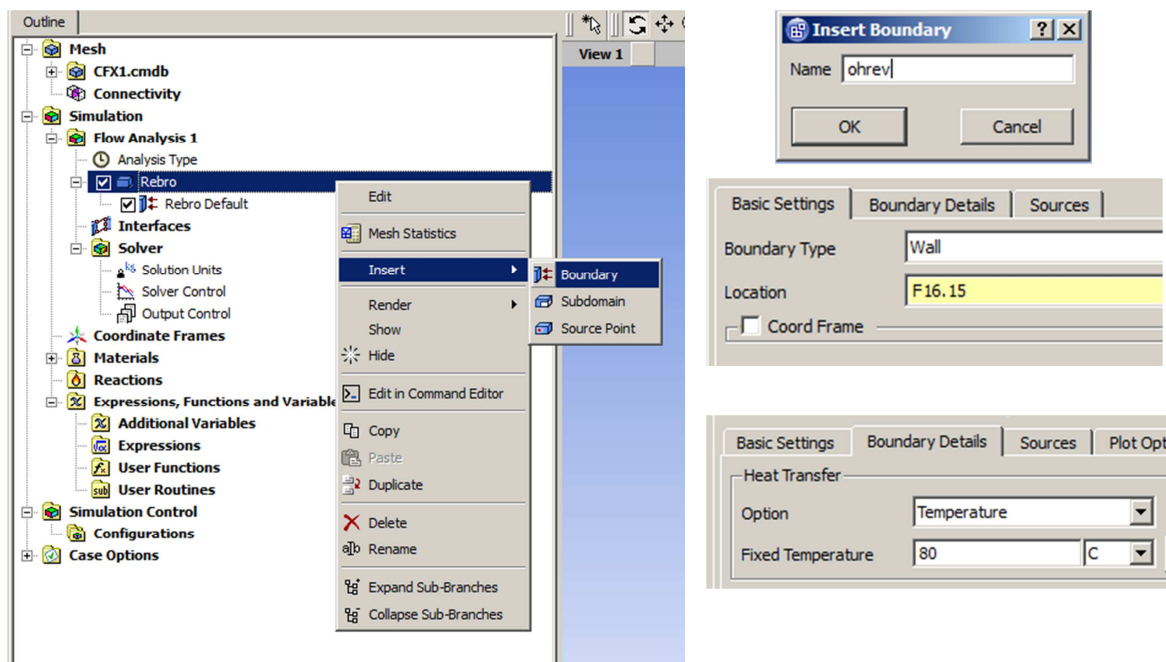
- Heat Transfer – nastavíme na „Thermal Energy“ (Ak nie je nutný výpočet prestupu tepla nastavuje sa „Isothermal“ – teleso s konštantnou teplotou.)
- Thermal Radiation – sálanie sa nevyžaduje („None“). V prípade nutnosti zakomponovania sálania do celkového výpočtu je v tomto prípade výhodnejšie použiť ekvivalentný súčiniteľ prestupu tepla (suma SPT pre konvekciu a sálanie).

Pre prehľadnejšiu manipuláciu je možné zmeniť v stromovej štruktúre názov domény pomocou PM a výberu položky „Rename“. Názov zmeníme na „Rebro“. Doména „Rebro“ obsahuje jednu prednastavenú okrajovú podmienku „Rebro Default“. Táto podmienka má nastavené všetky steny ako adiabaticky izolované (bez prestupu tepla). V prípade, že sa použijú nové okrajové podmienky na všetky plochy povrchu telesa, automaticky vytvorená okrajová podmienka sa automaticky systémom odstráni.

#### 5.3.1 Definovanie okrajových podmienok (OP)

##### I. OP na päte rebra:

- V stromovej štruktúre klikneme PM na doménu Rebro / Insert / Boundary a do otvoreného okna „Insert Boundary“ vpíšeme názov podmienky. Prvou OP je teplota 80°C na päte rebra s názvom „ohrev“.



Obr. 37 Vloženie okrajovej podmienky definovanie jej parametrov

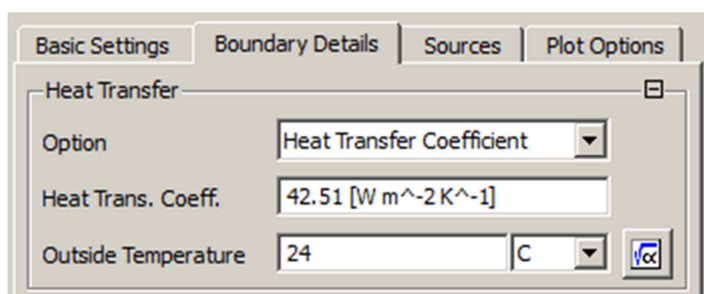
- V časti „Basic Settings / Boundary type“ ponecháme typ „Wall“ – stena.
- „Location“ – umožňuje výber povrchu na geometrii v 3D okne. Pomocou rozbaľovacieho políčka je možné zvoliť z ponúknutých plôch (v našom prípade sú k dispozícii 3 plochy), resp. po rozbalení políčka je možný priamy výber na modeli geometrie pomocou LM.
- Na záložke „Boundary Details / Heat transfer / Option“ zvolíme okrajovú podmienku I. druhu – „Temperature“.
- „Fixed Temperature“ zvolíme „80“ a v ponuke jednotiek si vyberieme stupne Celzia „C“. Nastavenie potvrdíme pomocou „Apply“ a „OK“.

## II. OP na konci rebra:

- Predchádzajúci postup zopakujeme pre zadenovanie adiabatického konca rebra. Názov OP je „koniec“, pričom v „Basic Settings / Location“ zvolíme protiľahlú kruhovú plochu.
- V časti „Boundary Details / Heat transfer / Option“ ponecháme „Adiabatic“.

## III. OP na valcovej ploche:

- Na valcovej ploche dochádza k odberu tepla pomocou obtekaného vzduchu. Použije sa OP 3. druhu (súčiniteľ prestupu tepla a teplota média), pričom súčiniteľ prestupu tepla (SPT) sa určuje z kritériálnych rovníc. Pre jednoduchšie stanovenie je možné využiť software SPT-NK (Obr. 24). Zadenovaním rýchlosti vzduchu a priemeru obtekanej valcovej plochy získame SPT s hodnotou  $42,51 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ .
- Po vložení OP pomocou „Rebro / Insert / Boundary“ ju pomenujeme „chladenie“.
- V „Basic Settings / Location“ vyberieme valcovú plochu rebra.
- V časti „Boundary Details / Heat transfer / Option“ zvolíme OP 3. druhu „Heat Transfer Coefficient“.
- „Heat Trans. Coeff.“ – nastavíme hodnotu 42.51 (POZOR! Od CFX-Pre sa používa desiatinná bodka.).
- „Outside Temperature“ - zadáme „24“ a za jednotku použijeme °C „C“ (Obr. 38).



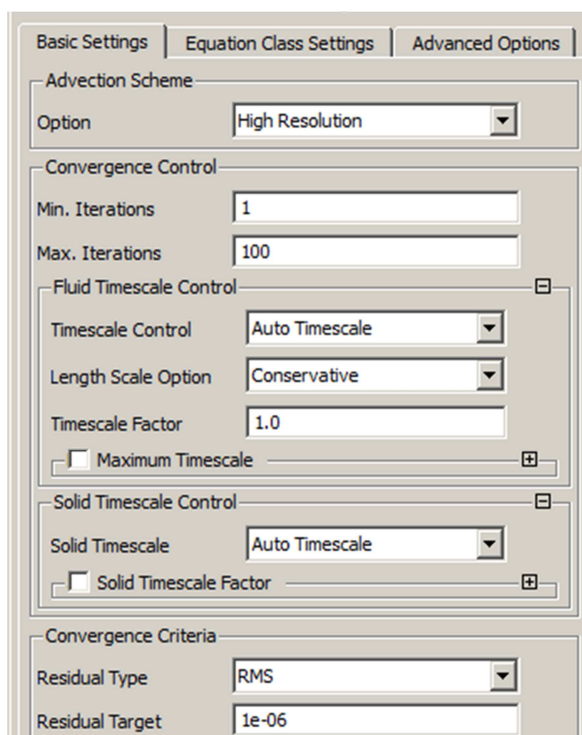
Obr. 38 Zadeinovanie OP 3. druhu na valcovej ploche

- Nastavenie potvrdíme pomocou „Apply“ a „OK“.

### 5.3.2 Nastavenie riešiča

Základné nastavenie riešiča sa vykonáva v stromovej štruktúre projektu v časti „Solver / Solver Control“. Nastavenie niektorých vybraných parametrov je nasledovné:

- „Basic Setting / Advection Scheme“ umožňuje zvoliť schému konvergenencie. Pre dosiahnutie rýchlej konvergenencie je výhodné použiť schému „Upwind“, pre presnejšie výsledky sa využíva „High Resolution“. Táto schéma si vyžaduje použitie jemnejšej siete. Často je výhodné ponechať výpočet po určitú presnosť výpočtu pomocou schémy „Upwind“ a následne prepnúť na schému „High Resolution“.
- „Basic Settings / Convergence Control / Max. Iterations“ – slúži na nastavenie maximálneho počtu iterácií numerického výpočtu. V riešenej simulácii je prednastavená hodnota „100“ postačujúca, avšak v niektorých situáciách (voľná konvekcia, simulácia s veľkým počtom domén, ...) sa vyžaduje dramatické zvýšenie počtu iterácií (rádovo v tisícoch).

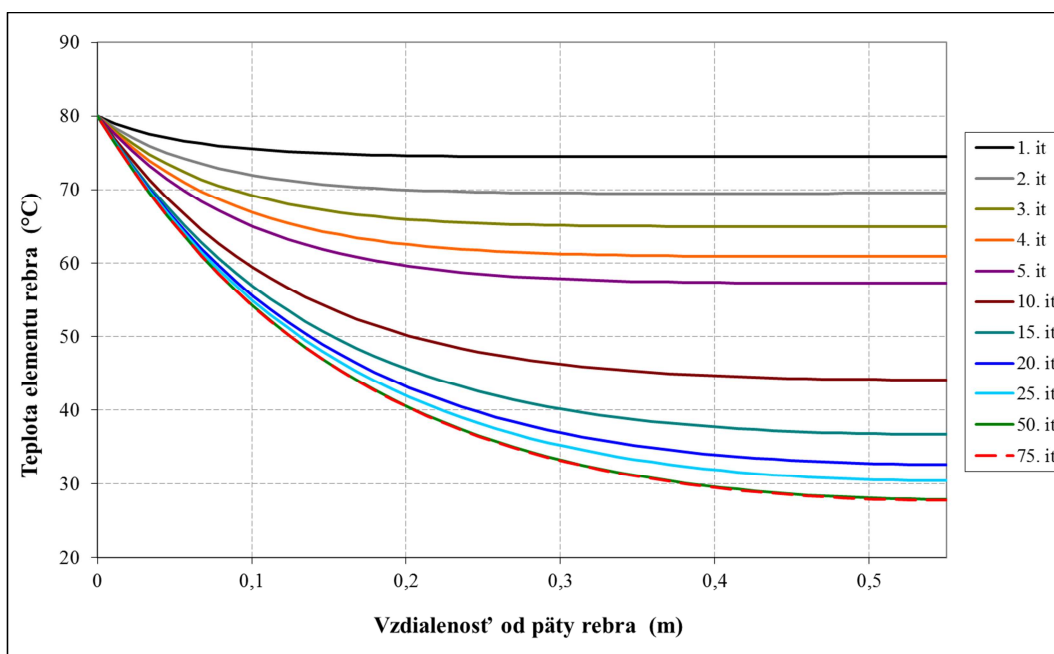
Obr. 39 Nastavenie riešiča so 100 iteráciami a iteračnou presnosťou  $10^{-6}$ 

- „Timescale Control“ – Riešič využíva na stabilizáciu riešenia stacionárnych dejov tzv. falošný časový krok. Väčšie časové kroky zrýchľujú konvergenziu riešenia, avšak niekedy

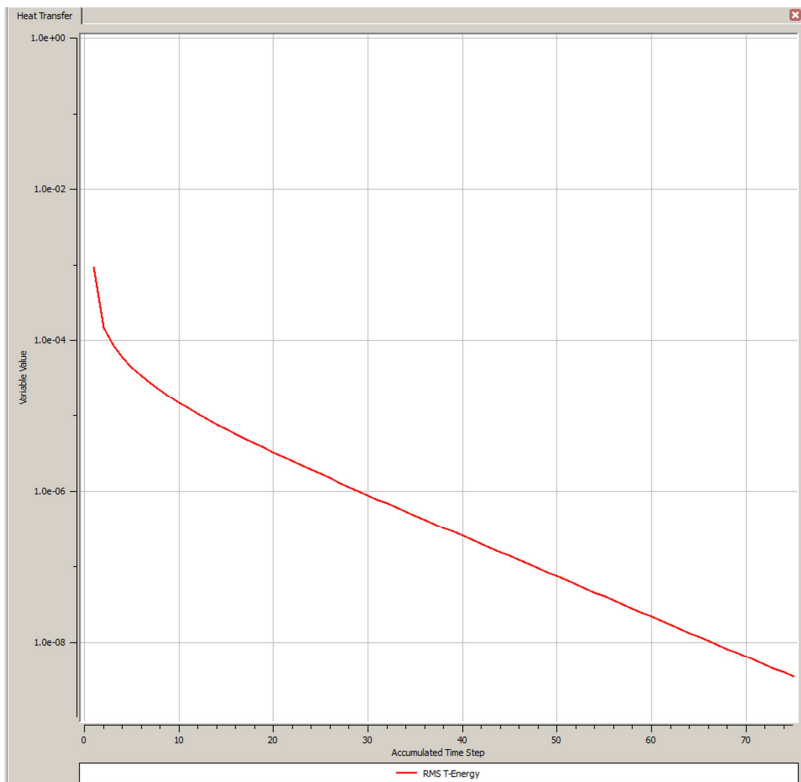
spôsobujú „pretečenie“ riešiča. Je výhodné ponechať nastavenie na „Auto Timescale“, avšak niektoré situácie si vyžadujú nastaviť manuálnu hodnotu.

- „Convergence Criteria / Residual Target“ – Nastavuje sa stredná kvadratická odchýlka medzi dvoma nasledujúcimi iteráciami. Hodnota  $10^{-4}$  umožňuje získať orientačné hodnoty výsledkov simulácie. Pri presnosti  $10^{-5}$  môžeme hovoriť o inžinierskej presnosti. V niektorých prípadoch sa pre dosiahnutie dobrej zhody medzi analytickým a numerickým výpočtom vyžaduje použitie presnosti až  $10^{-10}$ . Pre potreby riešenej simulácie nastavíme hodnotu  $10^{-6}$  (Obr. 39).

S narastajúcim počtom iterácií sa zvyčajne zvyšuje presnosť výpočtu (nie je to pravidlo a závisí od druhu simulácie a vhodnosti použitých nastavení). Pri popisovanej simulácii bolo pre dosiahnutie iteračnej presnosti  $10^{-6}$  potrebných 29 iterácií. Analýzou teplotného poľa (spôsob vyhodnotenia bude popísaný v nasledujúcej kapitole) bolo zistené, že ani po dosiahnutí popísanej presnosti nie je výsledný priebeh ešte dostatočne stabilizovaný. Na základe teplotných polí stanovených pri rôznych iteračných krokoch (Obr. 40) je možné konštatovať, že pre dosiahnutie stabilného rozloženia teplôt je potrebných minimálne 50 iterácií. Táto hodnota je špecificky viazaná iba na konkrétny typ simulácie.



Obr. 40 Priebeh teploty po dĺžke rebra v závislosti na počte iterácií

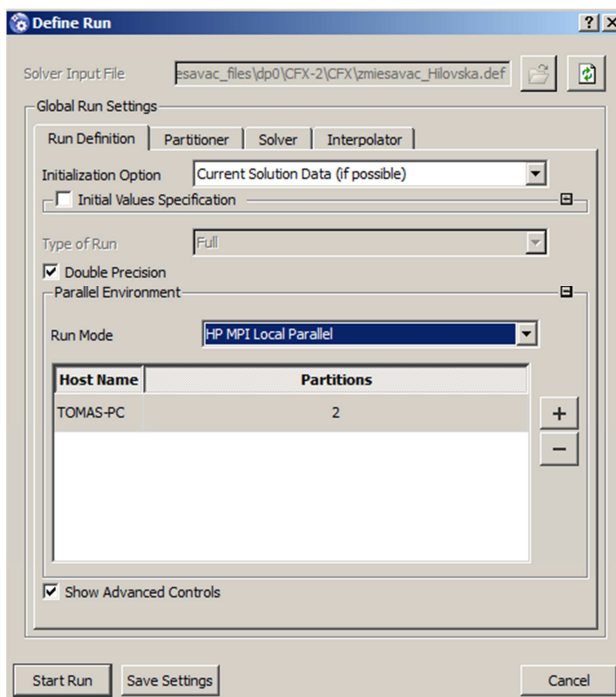


Obr. 41 Závislosť iteračnej presnosti výpočtu od počtu iterácií

Rozdiel v teplotných poliach medzi 50 a 75 iteráciou je pri tejto simulácii zanedbateľný.

### 5.3.3 Ansys CFX-Solver

Po uložení definičného súboru sa spustí ANSYS CFX-Solver a otvorí sa okno „Define Run“, obr. 42. Výpočet spustíme pomocou Start Run.



Obr. 42 „Define Run“ - Okno zobrazené po spustení „Solution“

- **Double Precision** - Výpočet s dvojnásobnou presnosťou. Vyžaduje použitie väčšieho množstva RAM pamäte. Vyžaduje sa pri nastavení presnosti pod  $10^{-6}$ .
- **Run Mode** - tu definujeme, akým spôsobom budeme riešiť úlohu. *Serial* – riešenie na jednom procesore, *Local Parallel* - paralelné riešenie na viacerých počítačoch a *Distributed Parallel* - paralelné riešenie na vzdialenom počítači.

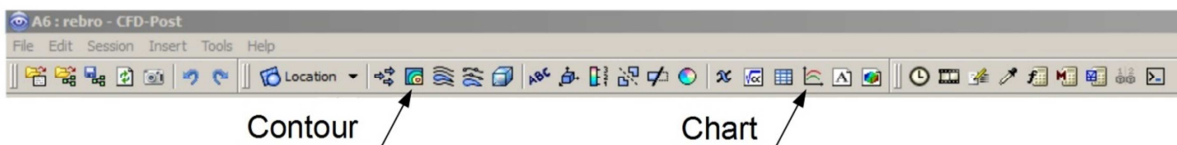
### 5.3.4 Vyhodnocovanie výsledkov v ANSYS CFX-Post

Vyhodnocovanie výsledkov prebieha v nástroji CFX-Post. Jeho spustenie je možné uskutočniť dvojitým kliknutím LM na poslednú položku „Results“ v okne Workbench. Po spustení sa automaticky načíta geometria reprezentovaná obrysmi súčiastky. Samotné kontúry, vektory, grafy a iné vyhodnocovacie nástroje simulácie sa nachádzajú v nástrojovej lište programu. Na ľavej strane programu je stromová štruktúra vyhodnotenia simulácie.

Na základe zadefinovania úlohy je potrebné vyhodnotiť teplotné pole po dĺžke osi rebra a celkový tepelný tok odvedený rebrom.

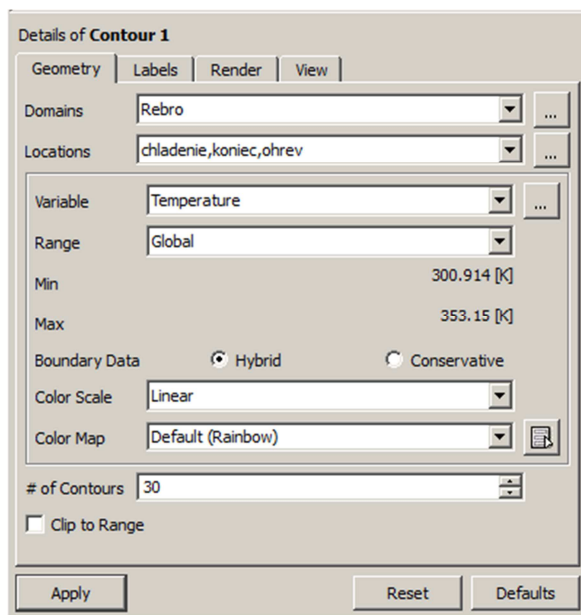
#### 5.3.4.1 Vytváranie kontúr

Pre grafické zobrazenie izoplôch s nanosením farebnej škály na skúmaný objekt slúži nástroj „Contour“ – nanosenie kontúr. V našom prípade ide o zobrazenie teplotného poľa po dĺžke tyče, resp. na ľubovoľnej rovine prechádzajúcej tyčou.



Obr. 43 Nástrojová lišta programu CFX-Post

Po výbere funkcie „Contour“ z nástrojovej lišty a akceptácii požadovaného názvu kontúry sa pod stromovou štruktúrou zobrazí detailný popis (Obr. 44).



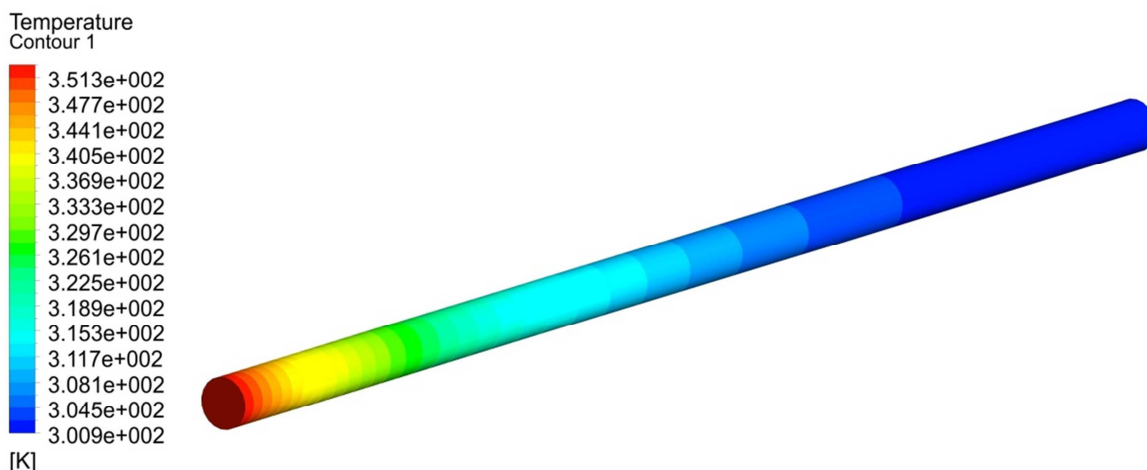
Obr. 44 Nastavenie kontúry



V základnej záložke „Geometry“ sú nasledujúce položky:

- „Domains“ – doména, alebo skupina domén v ktorých bude zobrazená kontúra. V prípade potreby je možné vybrať viacero domén pomocou tlačidla „Location editor“ umiestneného vedľa položky (tlačidlo s tromi bodkami).
- „Locations“ – názov okrajovej podmienky, alebo entity na ktorej bude nanosená kontúra.
- „Variable“ – premenná, podľa ktorej budú nanosené kontúry.
- „Range“ – nastavenie rozsahu legendy. „Global“ reprezentuje nastavenie mimálnej a maximálnej hodnoty vykresľovanej premennej z celej simulácie. „Local“ nastaví legendu tak, aby zachytávala iba rozsah platný na zvolenej kontúre. „User Specified“ umožňuje zdefinovať vlastný rozsah legendy.
- „Color Scale“ – umožňuje definovať lineárnu alebo logaritmickú mierku zobrazovanej premennej.
- „Color Map“ – umožňuje definovať farebné mapy kontúr („dúha“, „odtienie sivej“, ...)
- „# of Contours“ – počet izotermických plôch. Zvyšovanie tejto hodnoty vedie k vyhladzovaniu farebných prechodov.

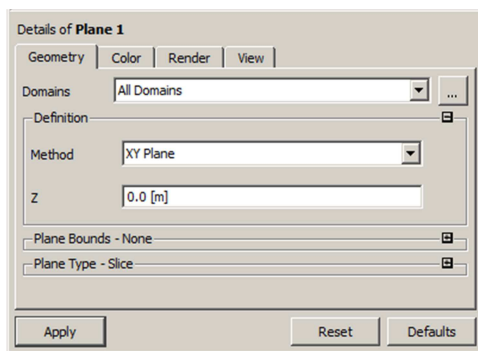
Pre zobrazenie izotermických plôch na povrchu tyče je potrebné v položke „Locations“ zvoliť všetky vonkajšie plochy reprezentované okrajovými podmienkami (tlačidlo „Location editor“). Po stlačení tlačidla „Apply“ dôjde k vykresleniu izotermických plôch na povrchu tyče (Obr. 45).



Obr. 45 Zobrazenie teplotného poľa na povrchu tyče

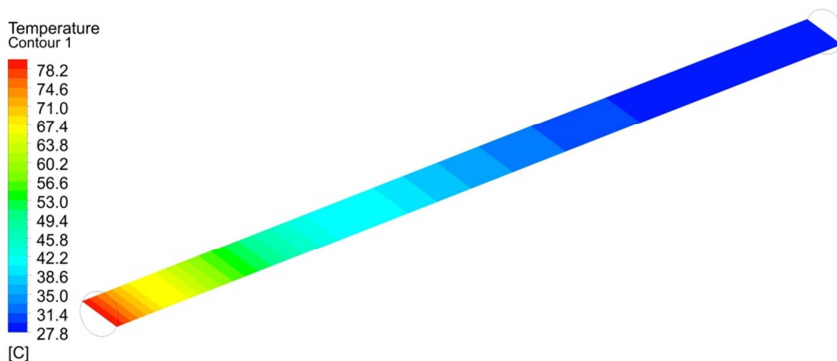
Zmenu jednotiek na °C je možné vykonať v záložke „Variables“ umiestnenej nad stromovou štruktúrou. Po výbere záložky je možné vykonať zmenu v časti „Solution/Temperature“. Zmena vedeckého zobrazenia na fixné sa uskutočňuje v stromovej štruktúre položky „Default Legend View 1“ (pokiaľ nedošlo k zmene názvu, resp. k vloženiu vlastnej legendy) v záložke „Appearance/Text Parameters“. Výsledok zmeny je na Obr. 47.

Pre zobrazenie teplotného poľa v rovine prechádzajúcej doménou (v našom prípade osou domény) je potrebné vložiť do zobrazenia novú rovinu pomocou položky „Location/Plane“ z nástrojovej lišty. Detailný pohľad na nastavenie položky je zobrazené na obr. 46.



Obr. 46 Nastavenie vloženej roviny prechádzajúcej osou tyče

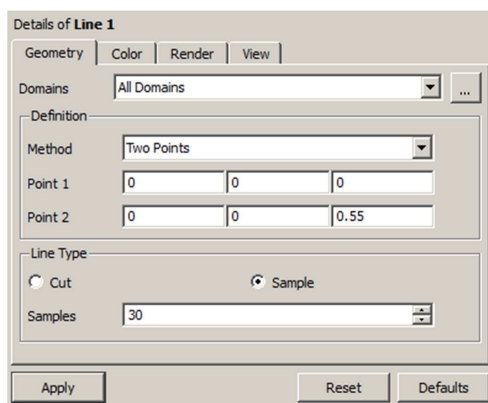
V položke „Method“ je nastavený typ roviny (ZX) pri nulovom posunutí v smere osi Z. V prípade potreby vizualizácie roviny je potrebné odškrtnúť zobrazenie kontúry v stromovej štruktúre. Po vložení roviny je možné vyvolať nastavenie pôvodne definovanej kontúry (dvojitým kliknutím ľM na položku kontúry v stromovej štruktúre) a zmeniť „Location“ na názov roviny (defaultne „Plane 1“). Pre lepšie grafické zobrazenie sa neodporúča súčasné zviditeľnenie roviny a kontúry.



Obr. 47 Zobrazenie kontúry na vloženej rovine prechádzajúcej osou tyče

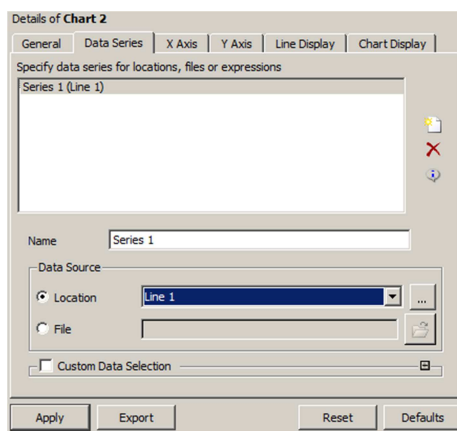
### 5.3.4.2 Vytváranie grafov

Pre vytvorenie grafu, ktorý zobrazuje priebeh teplôt je potrebné vložiť do osi úsečku pomocou „Location/Line“ z nástrojovej lišty. Detailné nastavenie úsečky je zobrazené na obr. 48.



Obr. 48 Nastavenie vloženej úsečky prechádzajúcej osou tyče

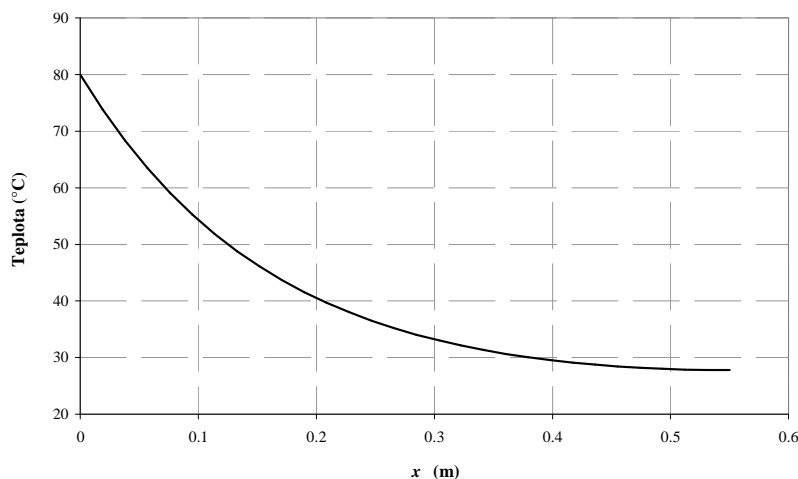
V položke „Method“ je zvolená metóda definovania úsečky pomocou súradníc dvoch koncových bodov (Point 1, Point 2). Súradnice bodov sú určené geometriou (Point 1[0,0,0]; Point 2[0,0,0.55]). Položka „Samples“ definuje počet bodov po dĺžke úsečky. V závislosti od tejto hodnoty sa pri vykresľovaní grafov odčíta daný počet hodnôt skúmanej premennej.



Obr. 49 Nastavenie grafu

Po vložení úsečky je možné vybrať z nástrojovej lišty diagram „Chart“. V záložke „General“ zvolíme typ grafu XY. V záložke „Data Series/Location“ zvolíme názov vytvorenej úsečky (Obr. 49).

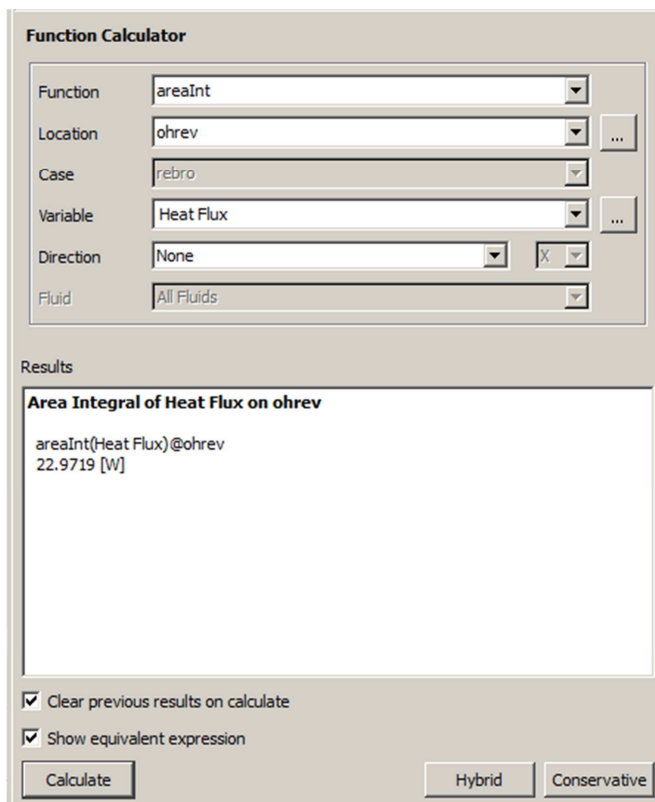
V záložke „X Axis“, ktorá reprezentuje X-ovú os grafu zvolíme „Z“ (Z-ová os v 3D geometrii). V záložke „Y Axis“, ktorá reprezentuje Y-ovú os grafu zvolíme „Temperature“. Po stlačení „Apply“ dôjde k zobrazeniu grafu namiesto 3D okna. Po stlačení tlačidla „Export“ je možné dáta exportovať do .csv formátu importovateľného do Excelu.



Obr. 50 Priebeh teploty po dĺžke tyče exportovaný do excelu

#### 5.3.4.3 Použitie kalkulátora „Function Calculator“

Grafické zobrazenie často nespĺňa komplikované požiadavky inžinierskej praxe, kde je konkrétne stanovenie požadovaných hodnôt veličín, často integrálnych, dôležitejšie ako grafický výstup. Pre matematickú manipuláciu a spracovanie dát je možné použiť „Function Calculator“. Prístup ku kalkulátoru získame zvolením záložky „Calculators“ umiestnenej nad stromovou štruktúrou a následným výberom položky „Function Calculator“.



Obr. 51 „Function Calculator“

Tab. 3 Popis základných funkcií kalkulatéra

Funkcia	Popis
area	Výpočet plochy zvolenej geometrie.
areaAve	Priemerná hodnota skúmanej veličiny na ploche.
areaInt	Výpočet plošného integrálu skúmanej veličiny na zvolenej ploche.
ave	Priemerná hodnota veličiny na zvolenej geometrie.
force	Určenie výslednice síl na zvolenú geometriu.
massFlow	Výpočet hmotnostného toku.
massFlowAve	Priemerná hodnota skúmanej veličiny vážená hmotnostným tokom.
maxVal	Maximálna hodnota veličiny na ploche, resp. doméne.
minVal	Minimálna hodnota veličiny na ploche, resp. doméne.
probe	Určenie veličiny vo vybranom bode.
torque	Určenie krútiaceho momentu.
volume	Výpočet objemu domény.
volumeAve	Priemerná hodnota veličiny v objeme.
volumeInt	Výpočet integrálu skúmanej veličiny v celom objeme domény.

Položka „Function“ reprezentuje voľbu funkcie. Zvolená funkcia „areaInt“ počíta plošný integrál podľa

$$y = \int_S x \, dS \quad (196)$$

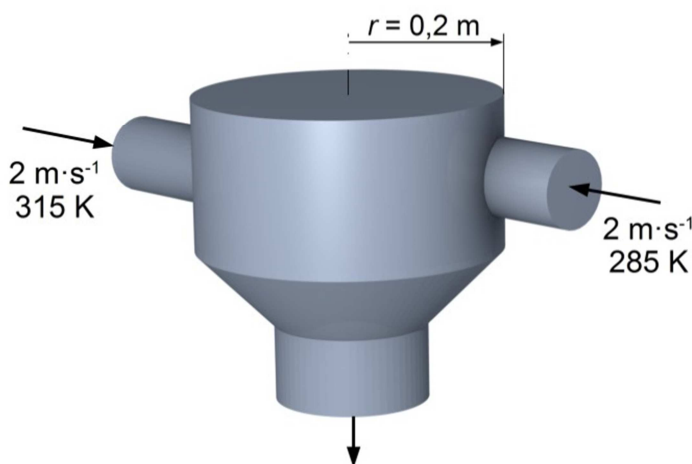
kde  $y$  je hľadaná integrálna veličina,  $x$  – premenná integrovaná po ploche  $S$ ,  $S$  – plocha ( $m^2$ ). Ak za premennú „Variable“ vyberieme hustotu tepelného toku „Heat Flux“ je výslednou hľadanou veličinou tepelný výkon  $P$  (W) odobraný z okrajovej podmienky „ohrev“ (Obr. 51). Prehľad základných funkcií je zobrazený v tab. 3.

## 6 MODELOVANIE PRÚDENIA V ZMIEŠAVACEJ NÁDOBE

### 6.1 Zadefinovanie úlohy

Táto časť simuluje zmiešavač obsahujúci dve vstupné potrubia privádzajúce vodu do zmiešavacieho telesa a jedno výstupné potrubie. Popis prúdenia je založený na analyzovaní prúdenia kvapaliny do a von zo zmiešavača, obr. 52.

Voda vstupuje cez dva potrubia rovnakými rýchlosťami ale o rozdielnej teplote. Prvý vstup má rýchlosť  $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a teplotu  $315 \text{ K}$ , druhý vstup má rýchlosť  $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a teplotu  $285 \text{ K}$ . Polomer zmiešavača je  $2 \text{ m}$ .



Obr. 52 Zmiešavacia nádoba s dvoma vstupmi a jedným výstupom

Definovanie geometrie je prvým krokom pri vytváraní modelu danej konštrukcie. Veľmi prospešný môže byť aj import geometrie z iného CAD systému, napr. ProEngineer, Solid Edge, Inventor, Catia, atď. Prevzatie geometrie z iného CAD systému je veľmi efektívny spôsob vytvárania modelu tvarovo zložitých častí a zostáv. Ale takýto postup často zlyháva z viacerých príčin, ktorými sú napr.:

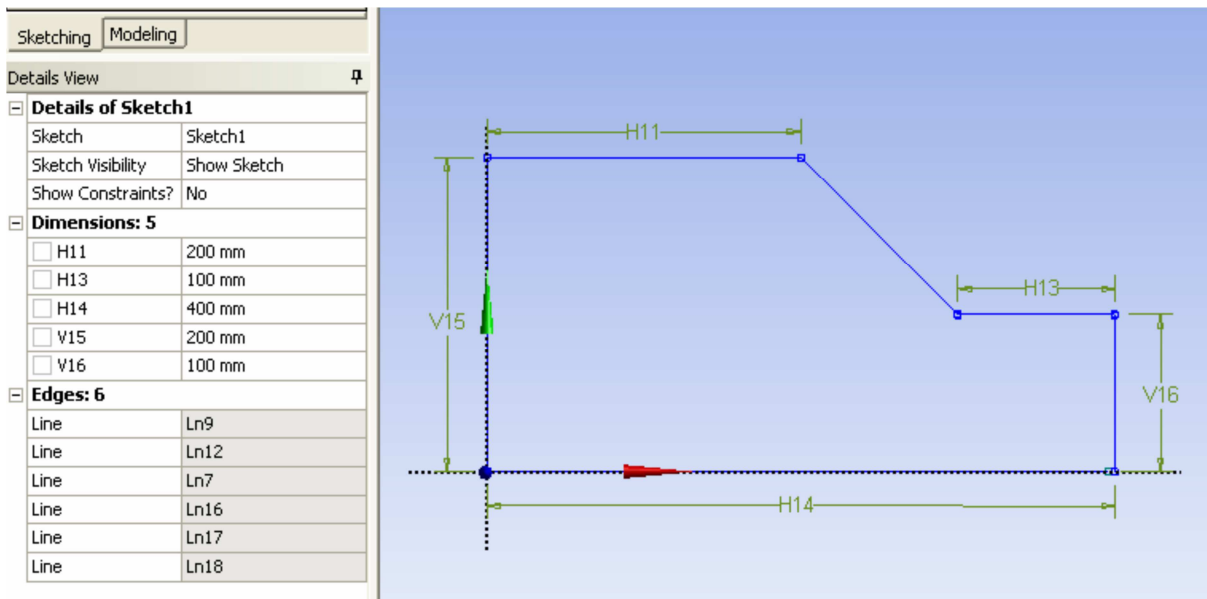
- geometrický model vytvorený v inom CAD systéme obsahuje často zbytočne veľa podrobností a detailov, ktoré sú z konštrukčného hľadiska dôležité, ale nie sú pre výpočty podstatné.
- tenkostennú konštrukciu je výhodnejšie počítať ako škrupinu.

Preto je lepšie vytvoriť geometriu priamo v prostredí ANSYS Workbench, resp. doplniť o geometriu importovanú z iného CAD systému. Vytvorenie geometrie závisí len od samotného výpočtára a od jeho skúseností s daným programom.

### 6.2 Postup vytvorenia skice a modelu

1. Vytvoríme skicu profilu:

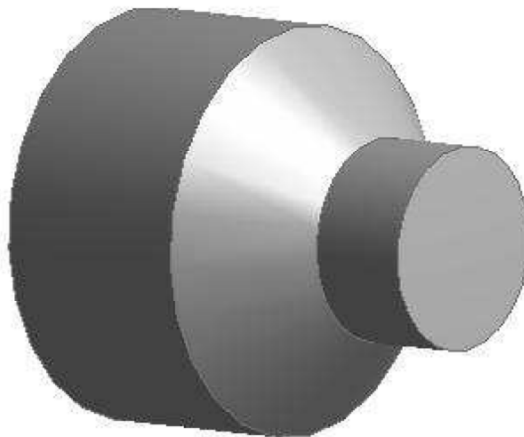
- Klikneme na základnú rovinu (napr. **XYPlane**) v ktorej chceme kresliť, klikneme na ikonku **Sketch** a v záložke pod **Tree Outline** sa prepneme do **Sketching**.
- Vyberieme z ponuky **Polyline** a vytvoríme uzavretú krivku podľa obr. 53.
- Po nakreslení posledného bodu klikneme pravým tlačidlom a vyberieme **Closed End**. Tým dostaneme uzavretú krivku.
- Okótuje skicu podľa obr. 53



Obr. 53 Skica základného tvaru nádoby v rovine XY

2. Vytvoríme teleso z nakreslenej skice:

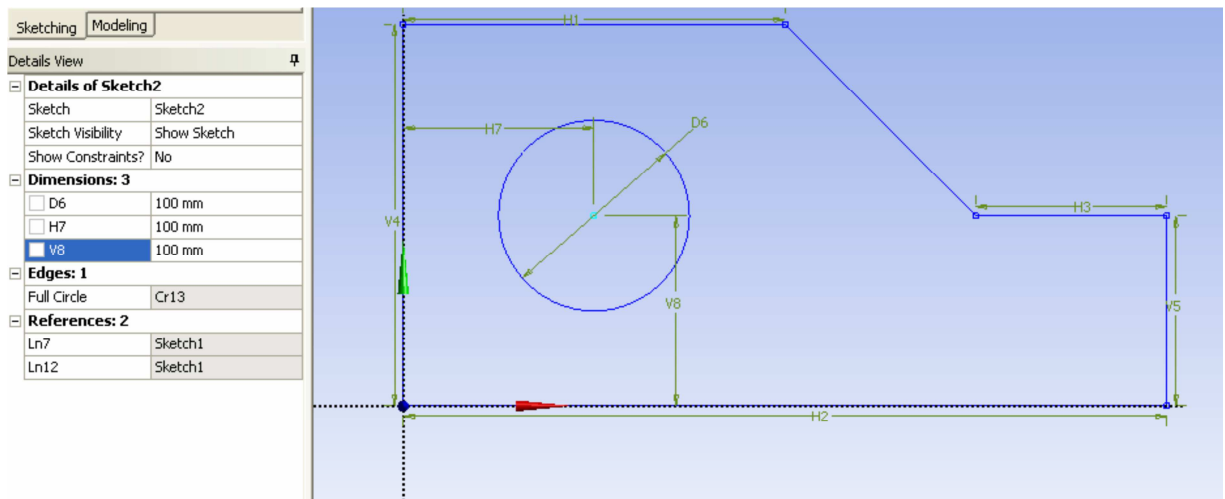
- Klikneme na ikonku **Revolve** z Lišty nástrojov.
- Nechajte v **Base Object** vybranú **Sketch1**.
- Vyberte x-ovú os ako os rotácie. Kliknite na **Apply**. Text sa zmení na **Selected**.
- V ponuke **Operation** nechajte **Add Material**.
- Zadajte uhol rotácie **360°**.
- Potvrďte **Generate** z lišty nástrojov.
- Máte vytvorenú rotačnú súčiastku podľa obr. 54



Obr. 54 Základný tvar zmiešavacej nádoby

3. Vytvorenie skice prvého vstupného potrubia:

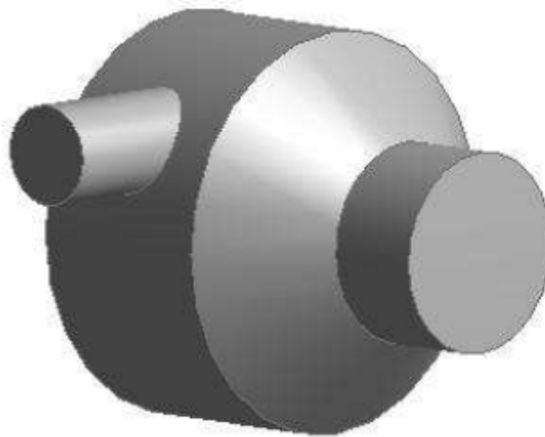
- Kliknite opäť na **XYPlane** a vytvorte novú skicu (**Sketch2**) a prepnite sa do skicára.
- Nakreslite kruh o priemere 100 mm a umiestnite ho vo vzdialenosti  $X = 100$  mm a  $Y = 100$  mm. (obr. 55)



Obr. 55 Skica prvého vstupného potrubia

4. Z nakreslenej skice vytiahneme („extrudujeme“) teleso:

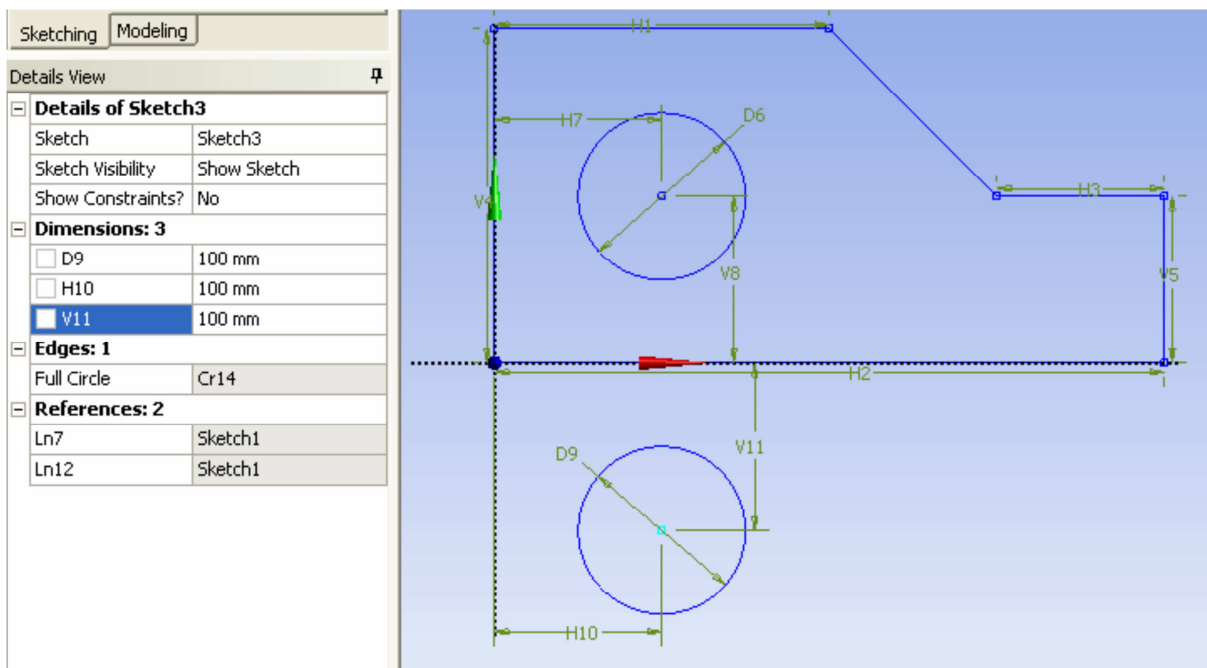
- Klikneme na ikonku **Extrude** z Lišty nástrojov.
- Nechajte v **Base Object** vybranú **Sketch2**.
- Smer vysunutia **Direction** nechajte na **Normal**.
- Zmeňte hĺbku vysunutia **Depth** na **300 mm**.
- Potvrďte **Generate** z lišty nástrojov.
- Máte vytvorené vstupné potrubie podľa obr. 56.



Obr. 56 Výsledný tvar prvého vstupného potrubia

5. Vytvorenie skice druhého vstupného potrubia:

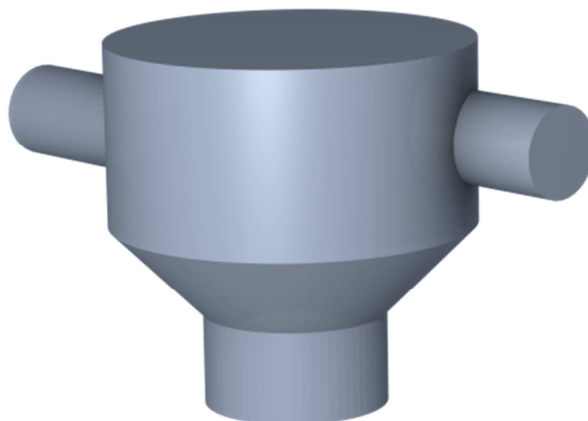
- Kliknite opäť na **XYPlane** a vytvorte novú skicu (**Sketch3**) a prepnite sa do skicára.
- Nakreslite kruh o priemere 100 mm a umiestnite ho vo vzdialenosti  $X = -100$  mm a  $Y = 100$  mm. (obr. 57)



Obr. 57 Skica druhého vstupného potrubia

6. Z nakreslenej skice vytiahneme teleso:

- Klikneme na ikonku **Extrude** z Lišty nástrojov.
- Nechajte v **Base Objekt** vybranú **Sketch3**.
- Zmeňte smer vysunutia v **Direction** z **Normal** na **Reversed**, čím dôjde k vytiahnutiu telesa do opačného smeru.
- Zmeňte hĺbku vysunutia **Depth** na **300 mm**.
- Potvrďte **Generate** z lišty nástrojov.
- Máte vytvorené druhé vstupné potrubie podľa obr. 58.



Obr. 58 Výsledný tvar zmiešavacej nádoby

### 6.3 Vytvorenie siete – Meshing

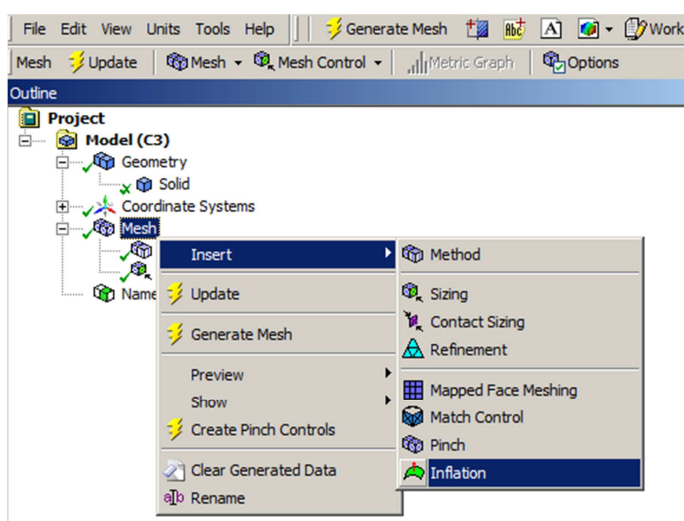
Po otvorení sieťovania „Mesh“ a načítaní geometrie si zvolíme typ siete. Voľba je závislá na nutnosti vytvorenia zhustenej siete v blízkosti steny, pre podchytenie správania sa medznej vrstvy. V prípade, že je prúdenie turbulentné a sieťuje sa aj medzná vrstva, je nutné voliť sieť typu „tetrahedron“ – štvorsten. Reynoldsovo kritérium, ktoré popisuje typ prúdenia je pre zadané OP:



$$Re = \frac{u \cdot D_{\text{vstup}}}{\nu} = \frac{2 \cdot 0,1}{1 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^5 \gg 10^4 \quad (1)$$

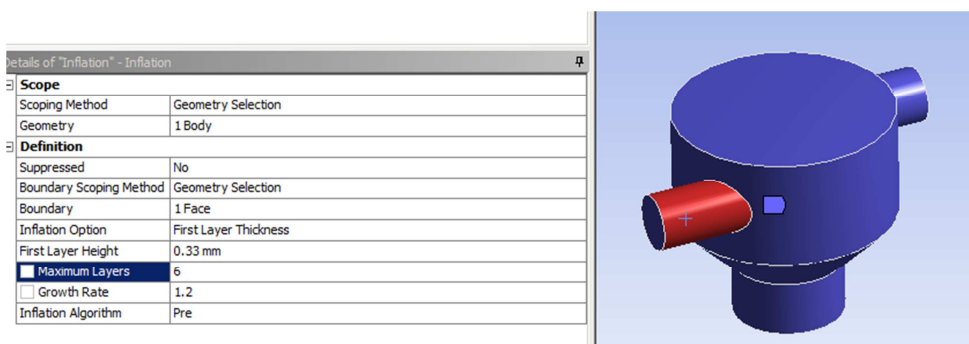
kde  $\nu$  je rýchlosť prúdenia ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ),  $D_{\text{vstup}}$  – hydraulický priemer na vstupe (m),  $\nu$  – kinematická viskozita vody ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ). Vzhľadom na hodnotu  $Re$  kritéria ide o rozvinuté turbulentné prúdenie. Pre výpočet bol zvolený model turbulencie  $k-\varepsilon$ , pri ktorom je výhodné voliť bezrozmernú vzdialenosť v rozmedzí  $30 > y^+ > 500$ .

1. Metódu siete vložíme kliknutím PM na položku „Mesh“ v stromovej štruktúre a výberom „Insert/Method“. V 3D okne si vyberieme teleso pomocou LM (zmení farbu na zeleno) a následne potvrdíme „Apply“ v položke „Geometry“. Položku „Method“ zmeníme z „Automatic“ na „Tetrahedrons“.
2. Veľkosť siete nastavíme pomocou „Mesh/Insert/Sizing“.
  - „Geometry“ – vyberieme teleso a potvrdíme „Apply“,
  - „Element Size“ – nastavíme na **15 mm**.



Obr. 59 Sieťovanie medzných vrstiev

3. Zhustenie siete v blízkosti stien pre podchytenie veľkých gradientov rýchlosti (hydrodynamická medzná vrstva) a teplôt (teplotná medzná vrstva) sa realizuje pomocou funkcie „Inflation“. Tú vyvoláme zo stromovej štruktúry cez „Mesh/Insert/Inflation“ (Obr. 59).



Obr. 60 Nastavenie sieťovania medznej vrstvy v blízkosti steny (vstup s teplotou 315 K)

- V časti „Geometry“ je nutné vybrať z 3D okna celé teleso a potvrdiť „Apply“,
- V časti „Boundary“ zvolíme plochu, na ktorej je nutné vytvoriť vrstvy zhustenej siete.

- „Inflation Option“ nastavíme na známu hodnotu hrúbky prvej vrstvy „First Layer Thickness“.
- „First Layer Height“ nastavíme 0.33 podľa výpočtu v programe  $y^+$  (obr. 61).

Program  $y^+$  si vyžaduje zadanie typu materiálu, rýchlosť tekutiny obtekajúcej povrch s medznou vrstvou, priemernú dĺžku medznej vrstvy a hodnotu bezrozmernej vzdialenosti pre model turbulencie  $k-\epsilon$ .

The screenshot shows the 'y+ V0.8' software interface. On the left, there are input fields for:
 

- Rýchlosť tekutiny (m.s-1): 2
- Dĺžka medznej vrstvy (m): 0.13
- Bezrozmerná vzd.  $y^+$  (1): 50

 Below these is a 'Vypočítaj' button. The results section shows:
 

- Re (1): 419047
- Vzdialenosť od steny (mm): 0.33113857

 On the right, under 'Tekutina', there are two radio buttons: 'Vlastné parametre' (selected) and 'Voda'. The 'Vlastné parametre' section has:
 

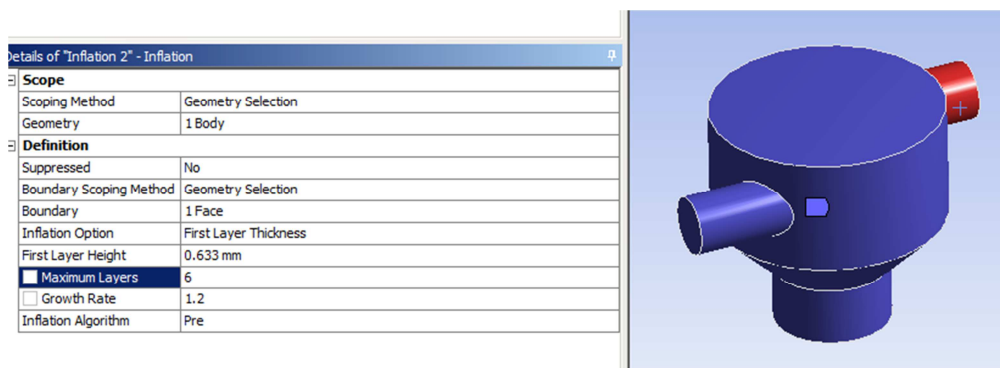
- Hustota (kg.m-3): 991.502
- Dyn. visk. (Pa.s): 615.183  $\cdot 10^{-6}$

 The 'Voda' section has:
 

- Teplota (°C): 41.85
- Teplota (°C): 20
- Tlak (Pa): 101325

Obr. 61 Výpočet hrúbky prvej vrstvy siete pri stene pomocou programu  $y^+$  (vstup s teplotou 315 K)

Podobne vytvoríme medznú vrstvu pre vstup vody s teplotou 285 K podľa obr. 62 a 63.



Obr. 62 Nastavenie sieťovania medznej vrstvy v blízkosti steny (vstup s teplotou 285 K)

The screenshot shows the 'y+ V0.8' software interface. On the left, there are input fields for:
 

- Rýchlosť tekutiny (m.s-1): 2
- Dĺžka medznej vrstvy (m): 0.13
- Bezrozmerná vzd.  $y^+$  (1): 50

 Below these is a 'Vypočítaj' button. The results section shows:
 

- Re (1): 204626
- Vzdialenosť od steny (mm): 0.63250528

 On the right, under 'Tekutina', there are two radio buttons: 'Vlastné parametre' (selected) and 'Voda'. The 'Vlastné parametre' section has:
 

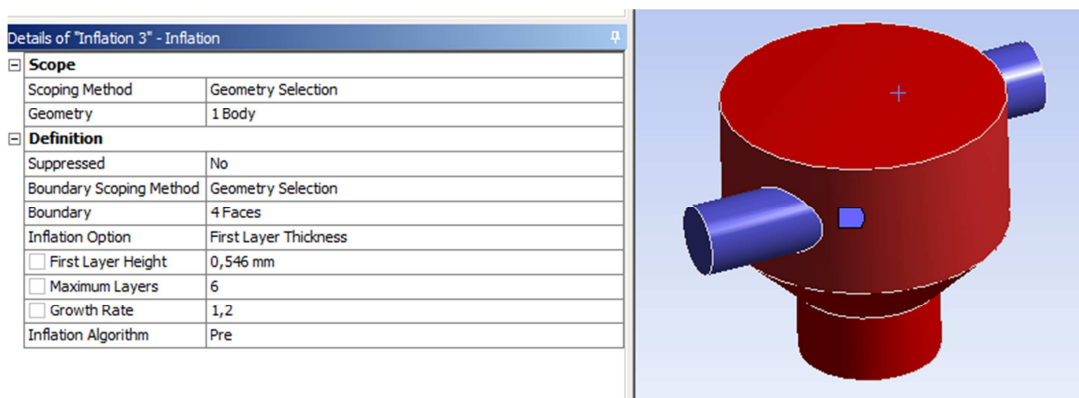
- Hustota (kg.m-3): 999.515
- Dyn. visk. (Pa.s): 1269.998  $\cdot 10^{-6}$

 The 'Voda' section has:
 

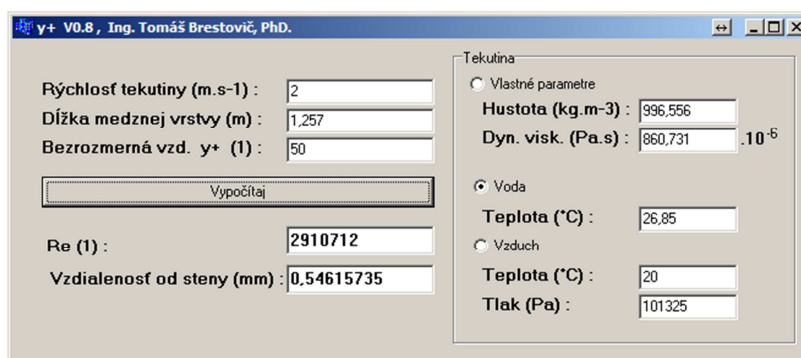
- Teplota (°C): 11.85
- Teplota (°C): 20
- Tlak (Pa): 101325

Obr. 63 Výpočet hrúbky prvej vrstvy siete pri stene pomocou programu  $y^+$  (vstup s teplotou 285 K)

Pre zvyšné plochy (okrem kruhovej výstupnej plochy) vytvoríme „Inflation“ s nastavením podľa obr. 64 a 65. Charakteristickou teplotou bude stredná teplota medzi oboma vstupmi a ako dĺžka medznej vrstvy bude použitá hodnota obvodu zmiešavacej časti.

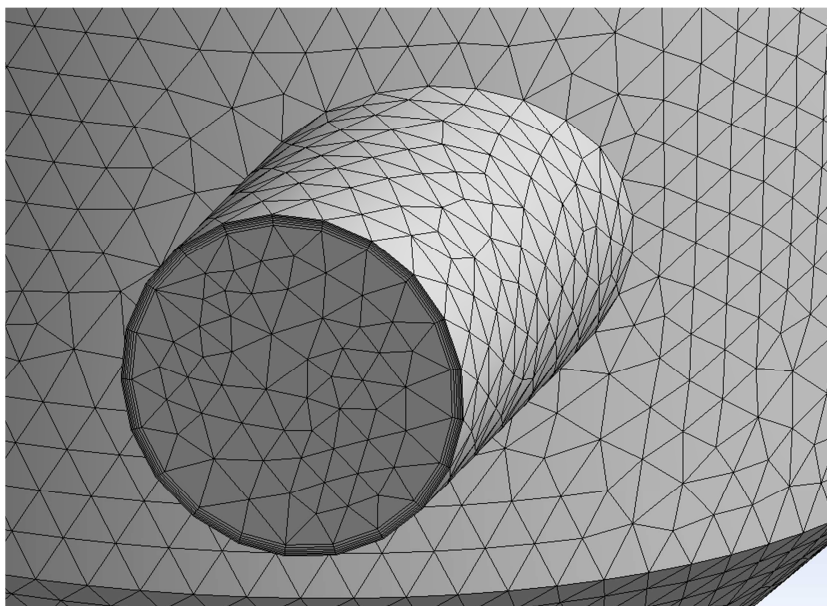


Obr. 64 Nastavenie sieťovania medznej vrstvy v blízkosti steny (pri strednej teplote)



Obr. 65 Výpočet hrúbky prvej vrstvy siete pri stene pomocou programu  $y^+$  (pri strednej teplote)

Sieť vygenerujeme stlačením tlačidla „Generate Mesh“ z nástrojovej lišty. Výsledná sieť má približne 138 tisíc elementov. Detail na vygenerovanú sieť so zhustením v blízkosti vstupu s teplotou 315 K je vidno na obr. 66.

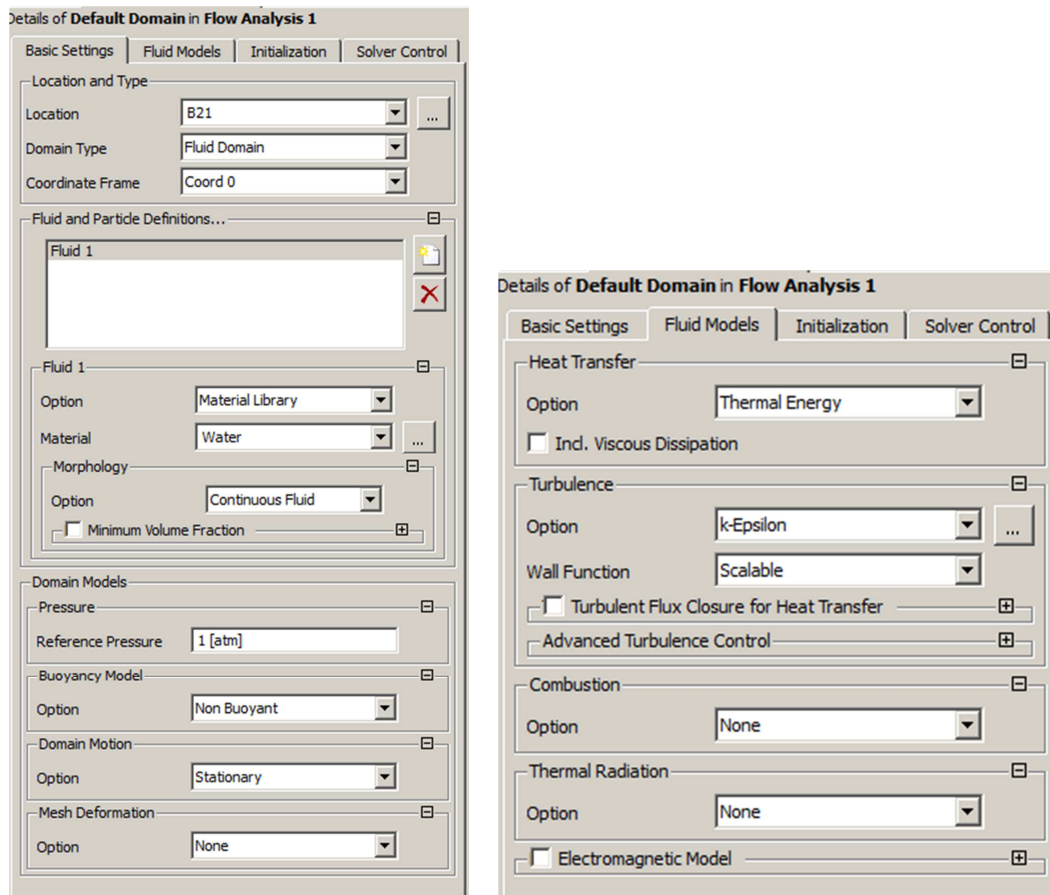


Obr. 66 Pohľad na vygenerovanú sieť so zhustením v oblasti medznej vrstvy

Po stlačení „Update“ sa sieť uloží, okno „Meshing“ zatvoríme a môžeme pokračovať s nastaveniami v časti „Setup“.

## 6.4 Nastavenie ANSYS CFX-Pre („Setup“)

Budeme teraz modifikovať automaticky vytvorenú doménu *Default Domain* dvojklikom ľM na túto oblasť v stromovej štruktúre. Budeme definovať základné vlastnosti, ako sú: prúdiaca látka, typ prúdenia, gravitácia a pod., obr. 67.



Obr. 67 Nastavenie domény

Vysvetlíme si jednotlivé položky v tejto ponuke:

### 1. Basic Settings - hlavné nastavenie:

- **Location** - objemové entity, pre ktoré platí nastavenie v týchto záložkách.
- **Domain Type** - typ domény. *Fluid Domain* - tekutina, *Solid Domain* - pevná látka a *Porous Domain* - porézny materiál.
- **Fluid List** - typ prúdiacej tekutiny. Štandardne je nastavený *Air* - vzduch, ostatné sú *Air at 25 °C* - vzduch pri 25 °C, *Water* – voda, prípadne je možné importovať ďalšie materiály z knižnice, resp. vytvoriť si vlastný materiál.
- **Coord Frame** - súradnicový systém danej oblasti, nie je nutné definovať.
- **Reference Pressure** - referenčný tlak, relatívny nulový tlak vo výpočte (štandardne sa 0 Pa relatívneho tlaku vo výpočte rovná tlaku 101 325 Pa absolútneho).
- **Buoyancy** - zahrnutie vztlaku do výpočtu (definovanie gravitácie a zrýchlenia, ktoré umožňujú vznik vztlaku).
- **Domain Motion** - zahrnutie pohybu oblasti do výpočtu. *Stationary* - stacionárny, *Rotating* - rotačný pohyb.
- **Mesh Deformation** - zahrnutie deformácie oblasti (napr. uzatváranie a otváranie ventilu).

## 2. FLUID MODELS - model tekutiny

- **Heat Transfer** - zahrnutie prestupu tepla do výpočtu. *None* - bez teploty, *Isothermal* - konštantná teplota, *Thermal Energy* - výpočty prestupu tepla, *Total Energy* – zahrnutie technickej a objemovej práce do termodynamického výpočtu.
- **Turbulence** - voľba turbulentného modelu. Celkovo je k dispozícii 16 modelov (vo verzii 13.0). Medzi základné patria: *None (laminar)* - bez turbulencie, *k-ε*, *SST*.
- **Reaction or Combustion** - zahrnutie chemických reakcií a spaľovania do výpočtu.
- **Thermal Radiation Model** - zahrnutie sárania do výpočtu.

**3. INITIALISATION** - definovanie počiatočnej podmienky, ktorá je potrebná pre spustenie výpočtu úlohy. V prípade riešenia ustáleného stavu „Steady State“ je možné ponechať inicializáciu na „default“, avšak pri niektorých simuláciách umožňuje vhodne nastavená inicializácia značne znížiť počet iterácií.

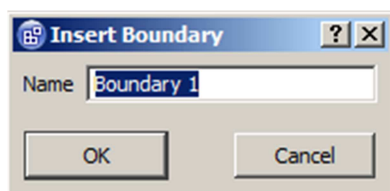
Nastavíme si základné vlastnosti pre náš prípad:

- Klikneme dvakrát na **Default Domain** a otvorí sa nám nová záložka **Domain: Default Domain**.
- V **General Options** nastavíme **Reference Pressure** na 1 [atm].
- V **General Option - Fluid List** zmeníme **Air at 25°C** na **Water**.
- Vo **Fluid Models** nastavíme **Heat Transfer - Option** na **Thermal Energy**.
- Vo **Fluid Models** nastavíme **Turbulence - Option** na **k-Epsilon**.
- Klikneme na **Apply** a ukončíme **Close**.

## Nastavenie a definovanie okrajových podmienok

Okrajové podmienky nám definujú hranice oblasti, čiže vlastnosti stien výpočtovej oblasti.

Okrajové podmienky definujeme pomocou ikonky . Po kliknutí na ikonku sa nám ukáže okno ako na obr. 68.



Obr. 68 Okno pre vloženie okrajovej podmienky

Položka „Name“ predstavuje názov okrajovej podmienky. Môžeme použiť ľubovoľný názov bez diakritiky a systémových znakov. Po zadaní potvrdíme OK. Otvorí sa nám v pracovnom okne niekoľko záložiek pre definovanie všetkých potrebných vlastností danej okrajovej podmienky.

## 1. BASIC SETTINGS - hlavné nastavenie:

- **Boundary Type** - voľba typu okrajovej podmienky. *In* - vstup, *Out* - výstup, *Symm* - symetria. Zoznam dostupných okrajových podmienok vyvoláme tlačidlom so šípkou smerujúcou nadol.
- **Location** - voľba povrchovej entity výpočtovej oblasti, na ktorej bude definovaná daná podmienka. Tlačidlom vyvoláme zoznam všetkých plôch, ktoré existujú v danej oblasti.

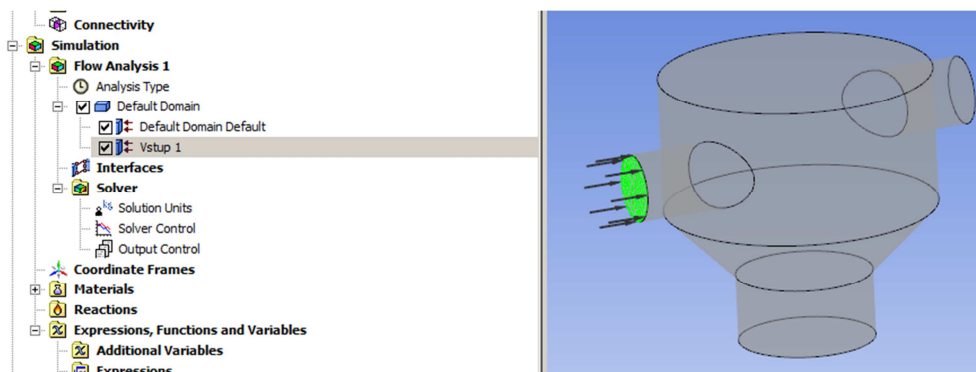
## 2. BOUNDARY DETAILS - detailné nastavenie:

- **Flow Regime** - tu sa definuje typ prúdenia. Môže byť: *Subsonic* - podzvukové, *Supersonic* - nadzvukové a *Mixed* - kombinácia obidvoch spomínaných.
- **Mass and Momentum** - definujú sa tu fyzikálne a okrajové podmienky. V *Option* - spôsob definovania vstupu (tlak, rýchlosť a pod.). *Normal Speed* - je vektor rýchlosti kolmý na rovinu s okrajovou podmienkou. Za tým definujeme jeho hodnotu.
- **Turbulence** - definujeme intenzitu turbulencie. V tejto časti zadefinujeme typ prúdenia a fyzikálne modely v kvapalinovej doméne. Prúdenie budeme špecifikovať ako ustálené turbulentné s prestupom tepla. Turbulencia je definovaná pomocou využitia modelu k-Epsilon a prestup tepla využíva energeticko-tepelný model Thermal Energy. k-Epsilon turbulentný model je často používaný model (vhodný pre rozvinuté turbulentné prúdenie) a je vhodný pre širokú škálu aplikácií. Energeticko-tepelný model zanedbáva vysoko rýchlostné energetické účinky a z toho dôvodu je vhodný pre aplikácie s malou rýchlosťou prúdenia.

### 1. Zadefinujeme si novú doménu pre **Vstup1**:

Pravým tlačidlom na myši klikneme na **Default Domain** a vyberieme z **Insert - Boundary**. Zmeníme **Name** na **Vstup1**.

- V **Basing Settings - Boundary Type** nastavíme **Inlet** a v **Location** zvolíme kruhovú plochu na vstupe s teplotou 315 K.
- V **Boundary Details** zadáme v **Mass And Momentum - Normal Speed** na 2 [ms<sup>-1</sup>].
- V **Boundary Details** zadáme v **Heat Transfer - Static Temperature** teplotu 315 [K].
- Po nastavení klikneme na **Apply** a ukončíme **Close**.

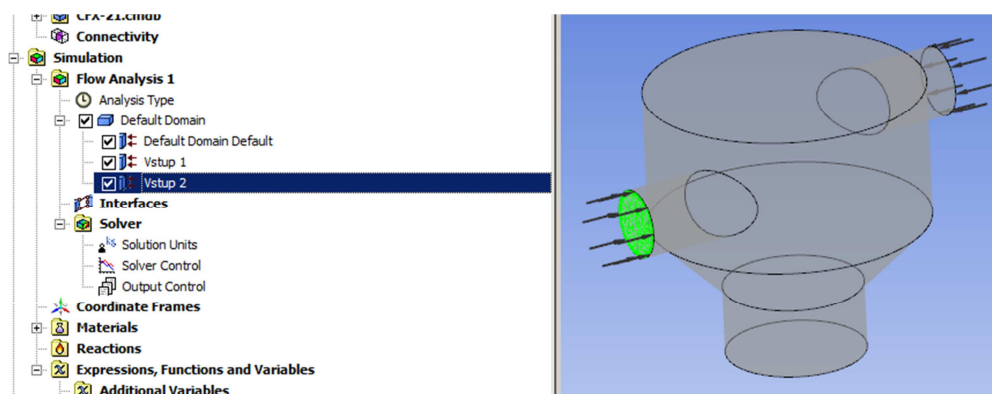


Obr. 69 Nastavenie OP pre vstup s teplotou 315 K

### 2. Zadefinujeme si novú doménu pre **Vstup2**:

Pravým tlačidlom na myši klikneme na **Default Domain** a vyberieme z **Insert -Boundary**. Zmeníme **Name** na **Vstup2**.

- V **Basing Settings - Boundary Type** nastavíme **Inlet** a **Location** na **Vstup2**, obr. 70.
- V **Boundary Details** zadáme v **Mass And Momentum - Normal Speed** na 2 [ms<sup>-1</sup>].
- V **Boundary Details** zadáme v **Heat Transfer - Static Temperature** teplotu 285 [K].
- Keď máme nastavené, klikneme na **Apply** a ukončíme **Close**.

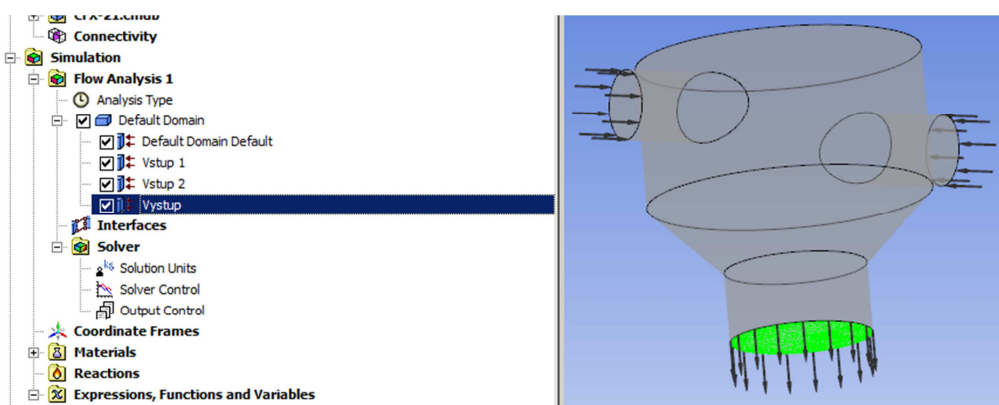


Obr. 70 Nastavenie OP pre vstup s teplotou 285 K

### 3. Zadefinujeme si novú doménu pre **Výstup**:

Pravým tlačidlom na myši klikneme na **Default Domain** a vyberieme z **Insert - Boundary**. Zmeníme **Name** na **Vystup**.

- V **Basing Settings - Boundary Type** nastavíme **Outlet** a **Location** na **Vystup**, obr. 71.
- V **Boundary Details** zadáme v **Mass And Momentum - Option – Average Static Pressure** na **0 [Pa]**.
- Po nastavení klikneme na **Apply** a ukončíme **Close**.



Obr. 71 Nastavenie OP pre výstup

Neexistujú už žiadne ďalšie okrajové podmienky, ktoré je nutné nastaviť (prípadne je možné nastaviť drsnosť stien v OP „Default Domain Default“ v záložke „Boundary Details/Wall Roughness“). Všetky 2D vonkajšie oblasti, ktoré nie sú zadefinované v okrajových podmienkach, sú nastavené automaticky. Tri okrajové podmienky sú zobrazené v náhľade ako súbor šípok v okrajových plochách. Vektory na vstupných prierezoch smerujú do domény. Vektory na výstupnom priereze smerujú von z domény.

## Nastavenie Solver Control

### 1. Časovo závislé riešenie

Časovo závislé riešenie je potrebné vtedy, ak úloha má nasledujúci charakter:

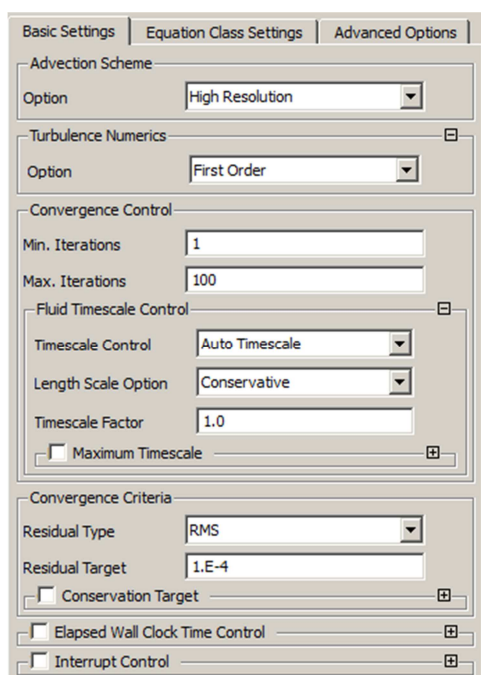
- vírová cesta a ostatné periodické javy,
- tlakové plnenie a vyprázdňovanie,
- reakcia prúdenia na časovo premennej okrajovej podmienke.

Voľba časového kroku je problematická. Pokiaľ je časová závislosť spôsobená známou okrajovou podmienkou, potom je možné tento časový krok odhadnúť. V opačnom prípade je

časová závislosť spôsobená napr. odtrhávajúcimi sa vírmi za ostrou hranou. Potom je potrebné veľkosť časového kroku testovať na začiatku výpočtu a splniť nasledujúce požiadavky:

- ideálny počet iterácií v každom časovom kroku je 10 až 20,
- väčší počet iterácií je vhodný pri veľkom časovom kroku,
- menší počet iterácií je vhodný pri malom časovom kroku,
- začiatok výpočtu nastaviť pre relatívne malé  $\Delta t$  a v priebehu výpočtu postupne zvyšovať.

Vyhodnocovanie výpočtu s časovo závislým krokom je možné pri ukladaní dátových súborov. Ide o ukládanie výsledkov riešenia po určitom počte časových krokov v priebehu výpočtov. Pre definovanie riešiča klikneme buď v strome na „Solver Control“. Následne sa nám v pracovnom okne zobrazí základné okno so štandardným nastavením, obr. 72.



Obr. 72 Nastavenie riešiča

Základný popis nastavenia - **BASIC SETTINGS** - hlavné nastavenie:

- **Advection Scheme** - zadáva sa tu voľba typu advekcie (premiestenie danej veličiny prúdením v atmosfére). *Upwind* - prvý rád, *High Resolution* - druhý rád, *Specified Blend Factor* - definícia medzi prvým a druhým rádom.
- **Max. Iteration** - tu sa nastavuje maximálny počet iterácií.
- **Timescale Control** - nastavuje sa tu časová miera výpočtu. *Auto Timescale* - automatický odhad, *Local Timescale* - definícia časovej miery v pomere veľká oblasť - malý vír, *Physical Timescale* - manuálne definovanie časového kroku.
- **Length Scale Option** - tu definujeme dĺžkovú mierku výpočtu. *Conservative* - mierny odhad, *Aggressive* - agresívny odhad, *Specified Length Scale* – manuálne definovanie miery.
- **Time Scale Factor** - definujeme tu pomer medzi časovou mierkou v tekutine a v pevnej látke.
- **Residual Type** - určujeme, akým spôsobom sa bude definovať chyba výpočtu *RMS* - chyba je definovaná strednou kvadratickou odchýlkou, *MAX* - v oblasti je hľadaná maximálna chyba. Bežne sa používa *RMS*.



- **Residual Target** - definujeme tu presnosť výpočtu. Pre bežné úlohy sa odporúča presnosť **1E-4** ( $10^{-4}$ ), pre rýchly odhad **5E-4** a pre vedecké výpočty **1E-5**.

V našom prípade si nastavíme riešič podľa nasledovného:

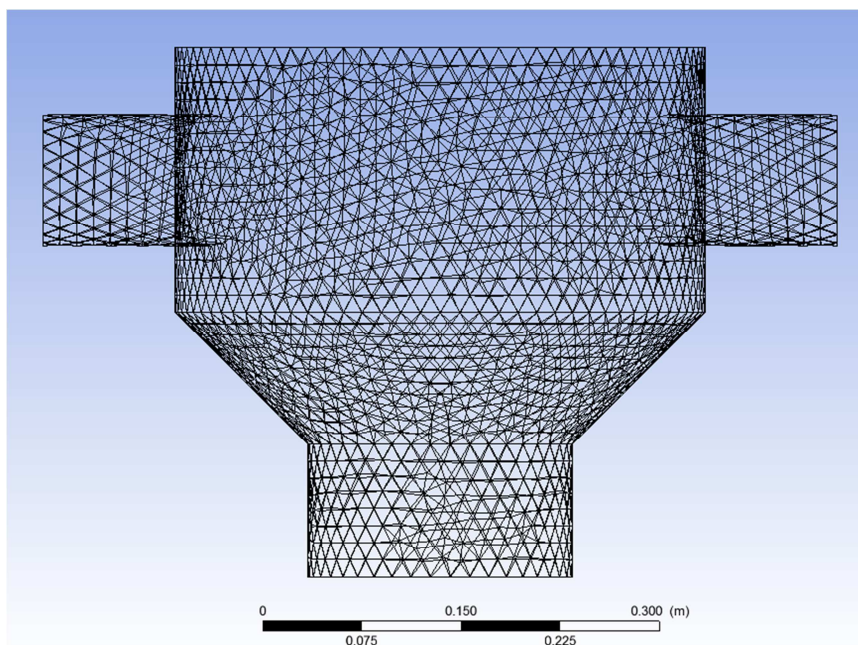
- V **Outline** klikneme dvakrát na **Solver Control**. Otvorí sa záložka **Solver control** pre editáciu.
- V **Basic Settings - Option** nastavíme **Upwind**.
- Nastavíme **Fluid Timescale Control - Timescale Control** na **Physical Timescale** a zadáme hodnotu **2 [s]**.
- Potvrdíme **Ok**.

## 6.5 Pracovné postupy pri vyhodnocovaní výsledkov

### 6.5.1 Nastavenie drôtového modelu

Pomocou prednastavení ANSYS CFX-Post sa zobrazujú iba niektoré povrchové siete. To znamená, že niekedy, keď prvýkrát spúšťate výsledky, geometrický náčrt nie je zobrazený celkom čitateľne. Pomocou editácie **Wireframe** objektu, ktorý sa nachádza v **Outline**, môžete riadiť množstvo entít v povrchových sieťach.

Uhol hrany určuje, koľko povrchových sietí je viditeľných. Ak uhol medzi dvomi tvarmi je väčší ako zadaný hraničný uhol, potom je hrana vyťahnutá. Ak nastavený uhol má hodnotu  $0^\circ$ , celá povrchová sieť je vyťahnutá. Ak nastavený uhol má veľkú hodnotu, potom sú zobrazené iba podstatné rohy a hrany.

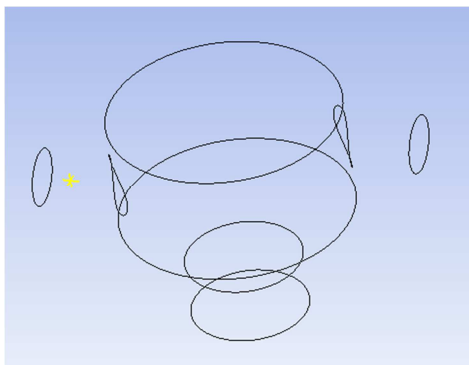
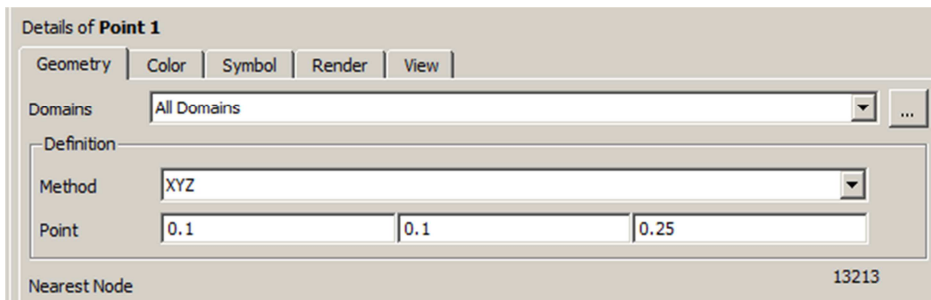


Obr. 73 Drôtový model s novým nastavením

- V tabuľke **Outline** dvakrát klikneme na **Wireframe**. Zobrazí sa okno v okne detailov **Details of Wireframe**.
- V **Definition - Edge Angle** zmeníme prednastavenú hodnotu na **0 [degree]**.
- Kliknete na **Apply**. Zobrazí sa objekt s novým nastavením siete.
- Pravým tlačidlom na myši klikneme na voľné miesto v prehliadači a vyberieme z menu **Predefined Camera** a odtiaľ **View Towards -Y**.

### Vytvorenie bodu (Point) pre určenie začiatku prúdnice

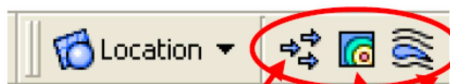
- Vyberte z nástrojovej lišty „Insert/Location/Point“. Kliknite na OK (Prípadne je možné zmeniť názov bodu).
- V okne detailov v **Geometry - Method** nastavíme **XYZ**.
- V **Point** nastavte **0.1, 0.1, 0.25**. Tento bod je blízko prvého vstupného prierezu, obr. 74.
- Potvrďte **Apply**.
- Bod sa zobrazí ako osový kríž.



Obr. 74 Nastavenie a zobrazenie bodu.

### Vytvorenie prúdnice (Streamline) z bodu

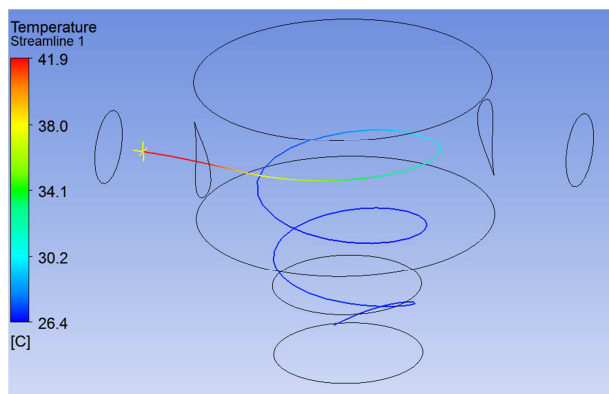
- Vyberte z nástrojovej lišty **Streamline** (Obr. 75). Kliknite na **OK**.
- V okne detailov v **Geometry - Start from** vyberte z ponuky **Point1**.
- V **Color** nastavte **Mode – Variable**, ďalej nastavte **Variable - Temperature** a **Range – Local**.
- Potvrďte **Apply**.



**Vektor Contour Streamline**

Obr. 75 Položky používané v nástrojovej lište

Prúdnica ukazuje dráhu nehmotnej častice z Point1, ktorý sa nachádza v blízkosti Vstupu1. Teplota je spočiatku vysoká v blízkosti horúceho vstupu, ale ako sa prúdenie zmiešava, voda sa ochladzuje a teplota na výstupe klesá, obr. 76.

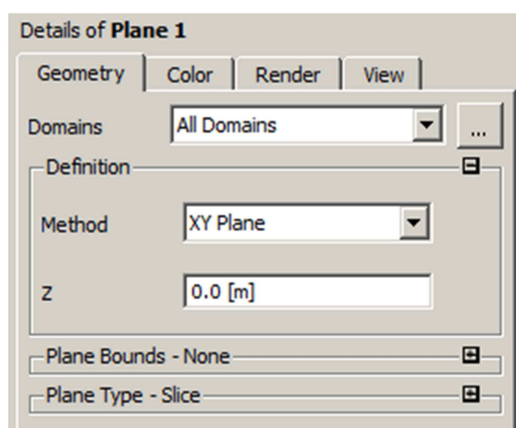


Obr. 76 Vytvorenie prúdnice s počiatkom v bode Point 1

### Vytvorenie rovinného rezu

Rovinný rez umožňuje získať priečny rez geometrie. Grafický objekt môže byť isosurface, vektorový diagram alebo rovina. Objekt môže byť fixnej farby alebo sa môže meniť v závislosti od hodnoty premennej.

Rovinu vytvoríme kliknutím na ikonku **Location** a vyberieme **Plane**. Po potvrdení OK sa nám objaví panel pre definovanie roviny, obr. 77.



Obr. 77 Vytvorenie roviny

Základný popis:

#### GEOMETRY - definícia plochy



- **Domains** - tu volíme, či má rovina prechádzať všetkými oblasťami alebo len niektorými.
- **Method** - volíme spôsob definície roviny.

Rovinu môžeme vytvoriť pomocou 3 metód:

- **Three points** - vytvorenie roviny 3 bodmi
- **Point and Normal** - vytvorenie roviny pomocou jedného bodu roviny a normálového vektora roviny.
- **YZ Plane, ZX Plane, and XY Plane** - podobne ako bod a normála, okrem toho že normála je definovaná existujúcou normálou k danej rovine.
  - Z hlavného menu vyberte **Insert - Location - Plane** alebo kliknite na ikonku **Location** a vyberte **Plane**. Napíšte názov roviny **Slice**. Potvrďte **OK**.
  - V **Geometry - Method** vyberte **YZ Plane**.
  - Zadajte X-ovú súradnicu **0.1 [m]**. Kliknite na **Apply**.

Vykreslí sa rovina rezu sivou farbou.

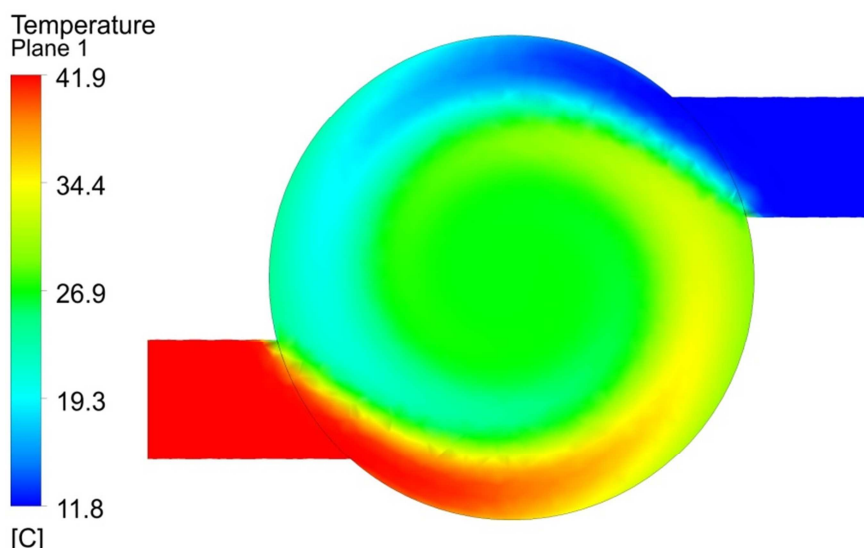
### Prispôsobenie rovinného rezu

- Pravým tlačidlom kliknite vo voľnej časti v prehliadači a vyberte **Predefined Camera - Isometric View (Y up)**
- Kliknite na **Zoom box**  v menu.
- Kliknite a potiahnite obdĺžnikovú selekciu nad geometriou.
- Uvoľnite tlačidlo na myši a vybraná časť sa vám zväčší.
- Kliknite na **Rotate**  v menu.
- Kliknite a potiahnite stredným tlačidlom na myši dole a tým zarotujete geometriu.

### Zobrazenie rovinného rezu

- V **Details view** pod **Colour** nastavte **Mode - Variable**. Nastavte ďalej **Variable - Temperature**.
- Kliknite na **Apply**.

Teplá voda (červená farba) vstupuje do zmiešavača jedným potrubím a studená (modrá farba) z druhého potrubia, obr. 78.

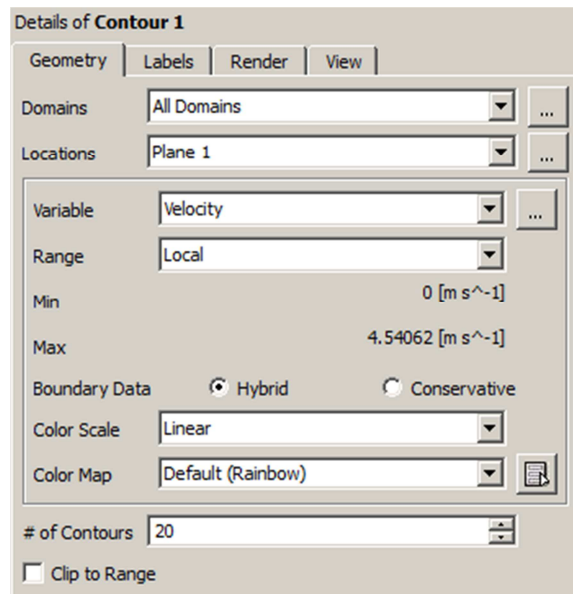


Obr. 78 Zobrazenie teplotného poľa v rovine Plane 1.

### Vytvorenie vrstevníc (kontúr)

Vrstevnice spájajú body s rovnakou skalárnou veličinou (napr. teplota, tlak) a pomáhajú vizualizovať premenné hodnoty. Farebné pásy vyplňajú priestor medzi vrstevnicovými čiarami. Každý pás je vyfarbený farbou prislúchajúcou priemernej hodnote dvoch susedných vrstevníc.

Kontúry vytvoríme buď výberom **Insert – Contour** alebo kliknutím v menu na ikonku **Contour**. Názov môžeme zmeniť alebo ponecháme pôvodný. Po potvrdení OK sa nám otvorí v pracovnom okne panel pre definovanie vlastností kontúr, obr. 79.

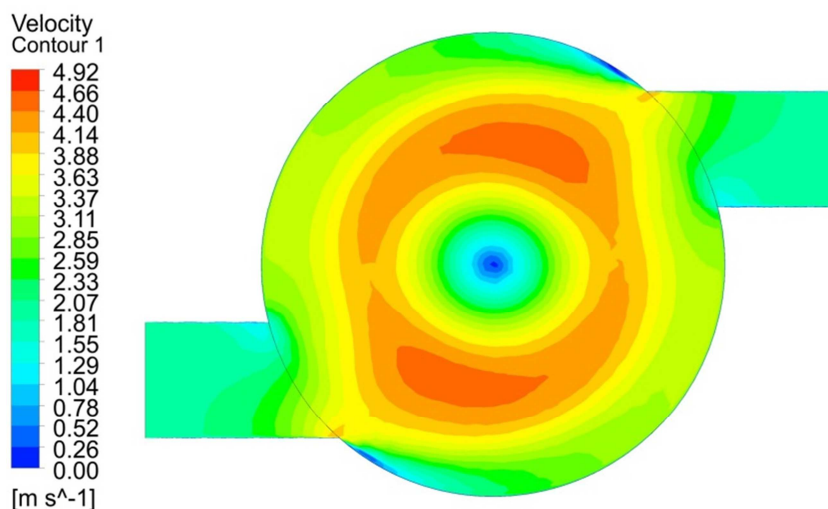


Obr. 79 Nastavenie parametrov kontúry

Základný popis:

#### GEOMETRY - definovanie kontúry

- **Domains** - tu volíme, či sa majú vyhodnotiť dáta zo všetkých oblastí.
- **Locations** - volíme, na ktorej entite bude vytvorená kontúra.
- **Variable** - volíme, akú veličinu budeme vyhodnocovať.
- **Range** - tu volíme rozsah, čiže max. a min. hodnotu vo farebnej škále. Možnosti voľby sú: *Global* - min. a max. hodnota sa určí z celej výpočtovej oblasti, *Local* - min. a max. hodnota sa určí z hodnôt danej roviny, *User Specified* - min. a max. hodnotu určí užívateľ, *Value List* - užívateľ definuje priamo hodnoty, ktoré sa zobrazia vo farebnej škále.
- **Colour Scale** - tu sa volí, ako bude zobrazená farebná stupnica, *Linear* - lineárne, *Logarithmic* - logaritmicke.
- **Colour Map** - definuje sa tu farebná schéma. Najčastejšie sa používa *Rainbow* - farby modrá až červená, *Rainbow6* - modrá až fialová, *Greyscale* - čiernobiela.
- **# of Contours** - určuje sa počet vykreslených kontúr v rozmedzí 2-9999.



Obr. 80 Zobrazenie rýchlostných kontúr


- Vyberte **Insert – Contour** alebo kliknite v menu na ikonku **Contour**.
- Nastavte **Name** na **Contour 1**. Potvrďte **OK**.
- V **Geometry - Location** nastavte **Plane 1**, **Variable** nastavte na **Velocity** a **Range** zmeňte na **Local**.
- Potvrďte **Apply**.

### Vytvorenie a zmena nevyplnenej legendy (Appearance of Legend)

Štandardne je legenda zobrazená vo vedeckom formáte. Pre zmenu umiestnenia a nastavenie fixného zobrazenia s definovaným počtom desatinných miest postupujeme nasledovne:

- V **Outline** tabuľke kliknite na **Default Legend View 1**.
- V **Details** okne pod **Definition**, vyberte **User Specified** pre **Title Mode**. Zmeňte **Title** na „Rýchlosť“.
- Zmeňte **X Justification** na **Left** (legendu zobrazí vľavo) a **Y Justification** na **Center** (legendu vycentruje po výške).
- V záložke **Appearance** zmeňte **Precision** na **2** a **Fixed** (zruší vedecké zobrazenie a definuje formát čísla).
- Potvrďte **Apply**

### Práca s animáciami

Animácia umožňuje vytvárať video súbory. Dialógové okno Animation  slúži na vytváranie keyframes (kľúčových snímok) a na export dát do video súborov.

Vyberte **Tools – Animation** alebo kliknite v menu na ikonku **Animation**. Zobrazí sa okno, ktoré môže byť premiestňované, obr. 81.

Pre vytvorenie animácií je potrebné definovať **Keyframes**. Nastaví sa prvá a posledná zobrazovacia snímka a potom sa nastaví počet interpolácií medzi týmito dvoma snímkami.

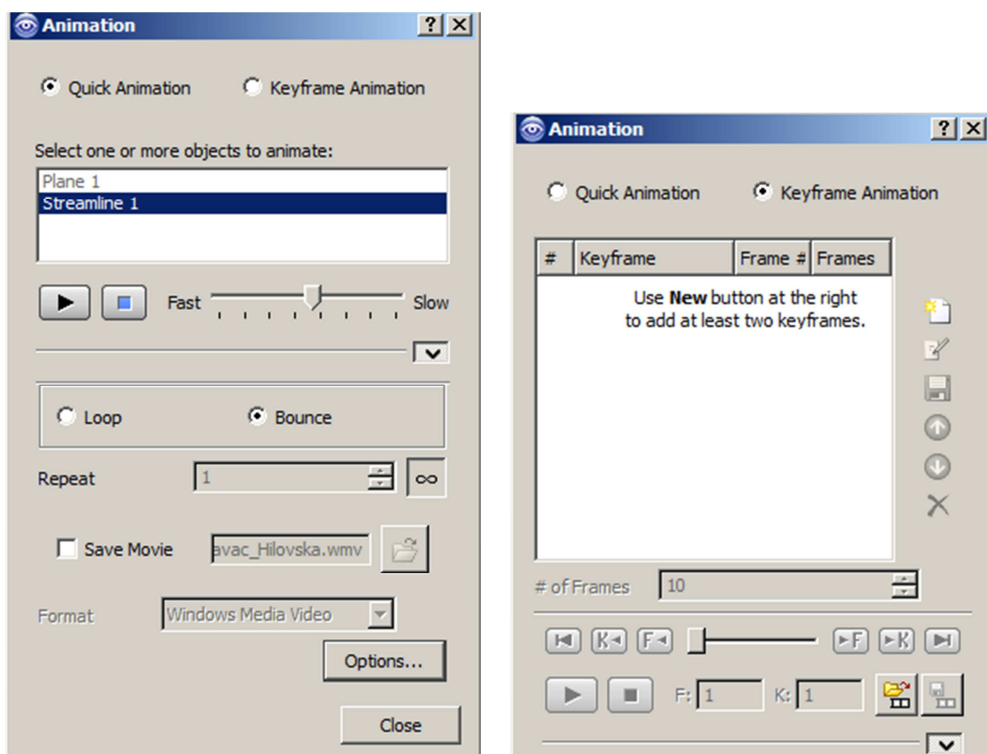
#### 1. Vytvorenie prvej Keyframe

- V dialógovom okne **Animation** kliknite vpravo na **New**.
- Automaticky sa vytvorí **KeyframeNo1**.

#### 2. Vytvorenie druhej Keyframe

- V okne **Plane** nastavte novú hodnotu **X**-ovej súradnice na **0.399 [m]**.
- Potvrďte **OK**. Rovina rezu sa presunie úplne na dno zmiešavacej nádoby.
- V dialógovom okne **Animation** kliknite vpravo na **New**.
- Automaticky sa vytvorí **KeyframeNo2**.
- V okne **Animation** vyberte **KeyframeNo1** a zmeňte **# of Frames** na **20**. To je počet interpolácií (obrázok) medzi jednotlivými snímkami.
- Potvrďte **OK**.

Stĺpec **Frame #** ukazuje poradové číslo keyframe. **KeyframeNo1** sa zobrazí ako snímka č. 1 a od nej sa začína animácia. **KeyframeNo2** je v poradí 22, čo znamená, že medzi nimi je 20 snímok.



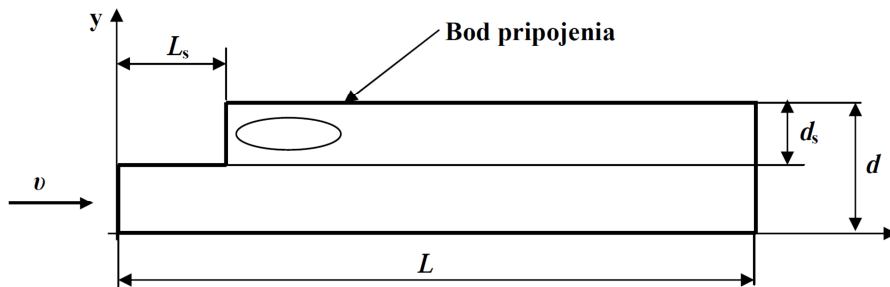
Obr. 81 Okno Animation

Často postačuje na vytvorenie animácie aj jednoduchšia forma „Quick Animation“. V oboch prípadoch sa animácia spúšťa stlačením tlačidla „Play“.

## 7 DVOJROZMERNÉ PRÚDENIE PRI NÁHLOM ROZŠÍRENÍ PRIEREZU

### 7.1 Zadanie

V tejto časti si ukážeme základy práce v Ansys CFX. Cieľom úlohy je vizualizácia prúdového poľa vzduchu a sledovanie zavírenia v rozširujúcej sa časti riešenej oblasti, obr. 82.



Obr. 82 Náčrt geometrie

#### Rozmery a fyzikálne vlastnosti

Dĺžka oblasti:  $L = 6$  m

Výška oblasti:  $d = 0,5$  m

Výška schodu:  $d_s = 0,2$  m

Dĺžka schodu:  $L_s = 1$  m

Rýchlosť na vstupe:  $u = 0,01$  m·s<sup>-1</sup>

Statický tlak na výstupe:  $p = 0$  Pa

Definícia Reynoldsovho čísla:  $Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{0,1 \cdot (0,5 - 0,2)}{15,55 \cdot 10^{-6}} = 1920$

kde  $D$  je charakteristický rozmer oblasti (m),

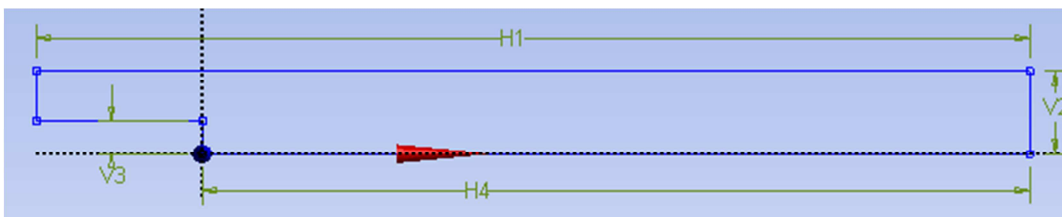
$\nu$  - kinematická viskozita (m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>).

Charakteristickým rozmerom je výška vstupnej hrany. V našom prípade ide o laminárne prúdenie, keďže  $Re < 2320$ .

### 7.2 Vytvorenie skice a modelu v „Geometry“

1. Vytvoríme si skicu profilu:

- Klikneme na základnú rovinu **YZPlane**, na ikonku **Sketch** a prepneme sa do **Sketching**.
- Z ponuky vyberieme **Polyline** a nakreslíme skicu podľa obr. 83. Skicu uzatvoríme kliknutím na pravé tlačidlo a vyberieme **Closed End**.
- Okótujeme podľa obrázka



Obr. 83 Náčrt profilu geometrie



Hlavné rozmery:


H1 = 6000 mm V3 = 200 mm

H4 = 5000 mm V2 = 500 mm

2. Vytvorenie telesa zo skice:

- Klikneme na **Modeling**, čím sa vrátíme späť do základného prostredia.
- V lište nástrojov klikneme na **Extrude**.
- V **Base Object** nechajte **Sketch1**.
- Zadaťte hĺbku vysunutia **Depth 5 mm**.
- Potvrdíme **Generate** a uložíme pomocou **Save Project**.

### 7.3 Vytvorenie siete v nástroji „Meshing“

1. Metódu siete vložíme kliknutím PM na položku „Mesh“ v stromovej štruktúre a výberom „Insert/Method“. V 3D okne si vyberieme teleso pomocou LM (zmení farbu na zeleno) a následne potvrdíme „Apply“ v položke „Geometry“. Položku „Method“ zmeníme z „Automatic“ na „Sweep“ (ťahanie siete). Ťahanie siete je výhodné hlavne pri dlhých a tenkých objektoch a umožňuje nám zadefinovať presný počet delení po dĺžke telesa. Výhodné je aj použitie pri 2D úlohách, kde je možné zadefinovať iba jeden element siete po hrúbke domény.
  - **Src/Trg Selection** zmeníme z **Automatic** na **Manual Source and Target**. To nám umožní určiť počiatok a koniec ťahania siete.
  - Klikneme na **Source** a vyberieme si jednu z čelných plôch, pričom zapneme ikonku **Face**  pre výber plôch. Po zvýraznení plochy zelenou farbou potvrdíme **Apply**.
  - Klikneme na **Target** a vyberieme si opačnú čelnú plochu. Po zvýraznení plochy zelenou farbou potvrdíme **Apply**.
  - V položke **Sweep Num Divs** zmeníme hodnotu na 1. Sieť bude rozdelená po hrúbke materiálu medzi **Source** a **Target** jedným elementom. Úloha bude teda riešená ako dvojrozmerná.
2. Veľkosť siete nastavíme pomocou „Mesh/Insert/Sizing“ v stromovej štruktúre.
  - „Geometry“ – vyberieme teleso a potvrdíme „Apply“,
  - „Element Size“ – nastavíme na **10 mm**.

Klikneme PM na **Mesh** a potvrdíme **Generate Mesh**.

Pri nastavovaní okrajových podmienok je často výhodné pomenovať jednotlivé plochy alebo skupinu plôch a neskôr pracovať s týmito názvami. Nasledujúcim postupom si pomenujeme vstup ako „Inlet“ a výstup ako „Outlet“:

- Vyberte vstupnú plochu v 3D okne, klikneme na ňu PM a zvolíte „Create Named Selection“. V otvorenom okne zadajte názov plochy „Inlet“.
- Vyberte výstupnú plochu v 3D okne, klikneme na ňu PM a zvolíte „Create Named Selection“. V otvorenom okne zadajte názov plochy „Outlet“.

Následne zapíšeme sieť tlačidlom **Update** v nástrojovej lište.

#### 7.3.1 Nastavenie podmienok jednoznačnosti v časti „Setup“

V ďalšom budeme modifikovať automaticky vytvorenú doménu **Default Domain**. Modifikáciu vykonáme dvojklikom na danú oblasť v strome. V pracovnom okne sa zobrazí záložka s vlastnosťami výpočtovej oblasti. V tejto záložke budeme definovať základné fyzikálne vlastnosti, ako sú prúdiaca látka, model turbulencie, gravitácia a pod.

Postup pri nastavení:

- V **General Options - Domain Type** necháme **Fluid Domain**.
- Vo **Fluids List** zmeňte na **Air at 25°C**.
- V **Pressure - Reference Pressure** nastavte **1 [atm]**.
- Vo **Fluid Models - Heat Transfer - Option** nastavte **Isothermal**.
- Vo **Fluid Temperature** napíšte hodnotu **25 [°C]**.
- V **Turbulence** vyberte model turbulencie **None (laminar)**.
- Po nastavení všetkých vlastností potvrdíme **Apply** a **Close**.

Po nastavení ešte premenujeme základnú doménu *Defaul Domain* na **Fluid**. Potvrdíme **OK**.

### Definovanie okrajových podmienok

Zadefinujeme si základné okrajové podmienky, ako sú vstup, výstup a symetrie.

1. Zadefinujeme si novú doménu pre **Inlet**:

- Pravým tlačidlom na myši klikneme na **Default Domain** a vyberieme z **Insert - Boundary**. Zmeníme **Name** na **Inlet**.
- V **Basing Settings - Boundery Type** nastavíme **Inlet** a **Location** na **Inlet**.
- V **Boundary Details** zadáme v **Mass And Momentum - Normal Speed** na **0.1 [m s<sup>-1</sup>]**.
- Potvrdíme **Apply** a **Close**.

2. Zadefinujeme si doménu pre **Outlet**:

- Pravým tlačidlom na myši klikneme na **Default Domain** a vyberieme z **Insert - Boundary**. Zmeníme **Name** na **Outlet**.
- V **Basing Settings - Boundery Type** nastavíme **Outlet** a **Location** na **Outlet**.
- V **Boundary Details** zadáme v **Mass And Momentum - Average Static Pressure** hodnotu **0 [Pa]**.
- Potvrdíme **Apply** a **Close**.

Po potvrdení sa nám zobrazí opäť strom a v grafickom okne sa objaví ako vstupná tak aj výstupná podmienka vo forme šípok v danej oblasti.

Pretože výpočet je definovaný ako 2D, je potrebné definovať obidve bočné steny, ktoré predstavujú plochy, ktorými bola oblasť oddelená zo skutočnej 3D oblasti. Týmto okrajovým podmienkam sa hovorí *symetria*. Okrajová podmienka *Symmetry* neumožňuje žiadne ďalšie nastavenie, ide teda vlastne o jej vytvorenie a potvrdenie umiestnenia. V našom prípade si nazveme jednotlivé symetrie *Symmetry1* a *Symmetry2*.

3. Zadefinujeme si doménu pre **Symmetry1**:

- Pravým tlačidlom na myši klikneme na **Default Domain** a vyberieme z **Insert - Boundary**. Zmeníme **Name** na **Symmetry1**.
- V **Basing Settings - Boundery Type** nastavíme **Symmetry** a **Location** vyberieme prednú plochu.
- Potvrdíme **Apply** a **Close**.

4. Zadefinujeme si doménu pre **Symmetry2**:

- Pravým tlačidlom na myši klikneme na **Default Domain** a vyberieme z **Insert - Boundary**. Zmeníme **Name** na **Symmetry2**.
- V **Basing Settings - Boundery Type** nastavíme **Symmetry** a **Location** vyberieme zadnú plochu.
- Potvrdíme **Apply** a **Close**.

Po potvrdení sa nám zobrazí opäť strom a v grafickom okne sa zobrazí podmienka symetrie na oboch bočných stenách vo forme červených šípok, ktoré znázorňujú rovinu zrkadlenia.

Ostala nám už len jedna podmienka *Fluid Default*. V tejto podmienke budú všetky plochy, ktoré sme doteraz nedefinovali. Táto podmienka je zvyčajne definovaná ako hladká stena bez prestupu tepla. Keďže naša úloha je bez prestupu tepla, takže nie je nutné podmienku definovať. Samotná podmienka stena - *Wall*, sa v grafickom okne nezobrazuje. Týmto máme zadefinované všetky okrajové podmienky, ktoré sú potrebné na riešenie úlohy.

### 7.3.2 Nastavenie riešiča pre úlohu

Každú úlohu musíme inicializovať. V našom prípade sa jedná o jednoduchú úlohu, preto ponecháme automatickú inicializáciu. Klikneme na ikonku inicializácie a potvrdíme *Apply* a *Close*. Nakoniec definujeme nastavenie riešiča.

- V **Outline** klikneme dvakrát na **Solver Control**. Otvorí sa záložka **Solver control** pre editáciu.
- V **Basic Settings - Option** nastavíme **High Resolution**.
- **Max. Iteration** ponecháme **200**.
- Vo **Fluid Timescale Control - Timescale Control** ponecháme **Auto Timescale**
- Potvrdíme **Ok**.

Po nastavení a uložení výsledkov spustíme **Solution** a následne potvrdíme **Start Run**.

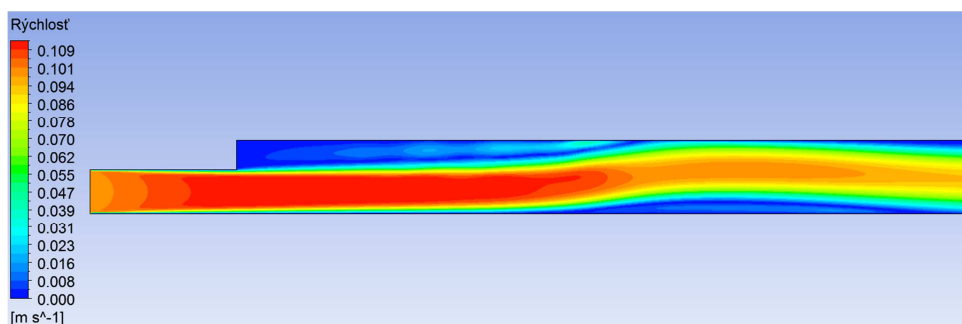
## 7.4 Zobrazenie výsledkov – „Results“

### Vytvorenie kontúr

Vyhodnotenie urobíme pre pole strednej rýchlosti.

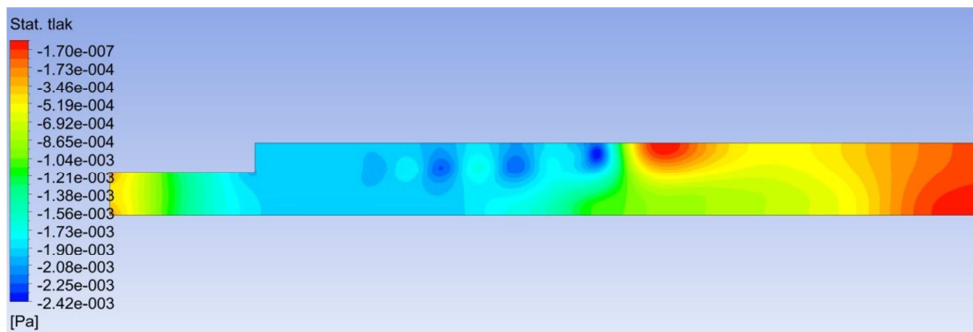
- Klikneme na ikonku **Contoure** z ikonového menu. Premenujeme názov na **Velocity**.
- V **Domains** ponecháme **All Domains**.
- V **Locations** zmeníme na **Symmetry1**.
- Vo **Variable** vyberieme **Velocity** a **Range** ponecháme na **Global**.
- Počet kontúr **# of Contours** zmeníme na 30. Rozsah škály sa tým rozdelí na 30 úrovní rýchlosti.
- Ostatné nastavenie nemeníme.
- Potvrdíme **OK**.

V strome sa objaví nová položka s názvom *Velocity* a v grafickom okne sa zobrazí pole pre strednú rýchlosť, obr. 84.



Obr. 84 Zobrazenie poľa strednej rýchlosti

Podobným spôsobom si vytvoríme pole statického tlaku. Nazveme ho **Static Pressure**, obr. 85, a premenná hodnota bude **Pressure** namiesto **Velocity**. Aby sa nám navzájom neprekrývali obidva obrázky, odškrtneme v stromovej štruktúre pole strednej rýchlosti.



Obr. 85 Zobrazenie poľa statického tlaku

### Vytvorenie vektorového poľa

Vektorové pole je ďalšou dôležitou súčasťou vyhodnocovania. Vektorové pole vytvoríme podobne ako kontúry.

Klikneme na ikonku **Vector** z ikonového menu. Necháme názov **Vector1**. Potvrdíme **OK**. V pracovnom okne sa nám otvorí okno pre definovanie vektorového poľa, obr. 86.

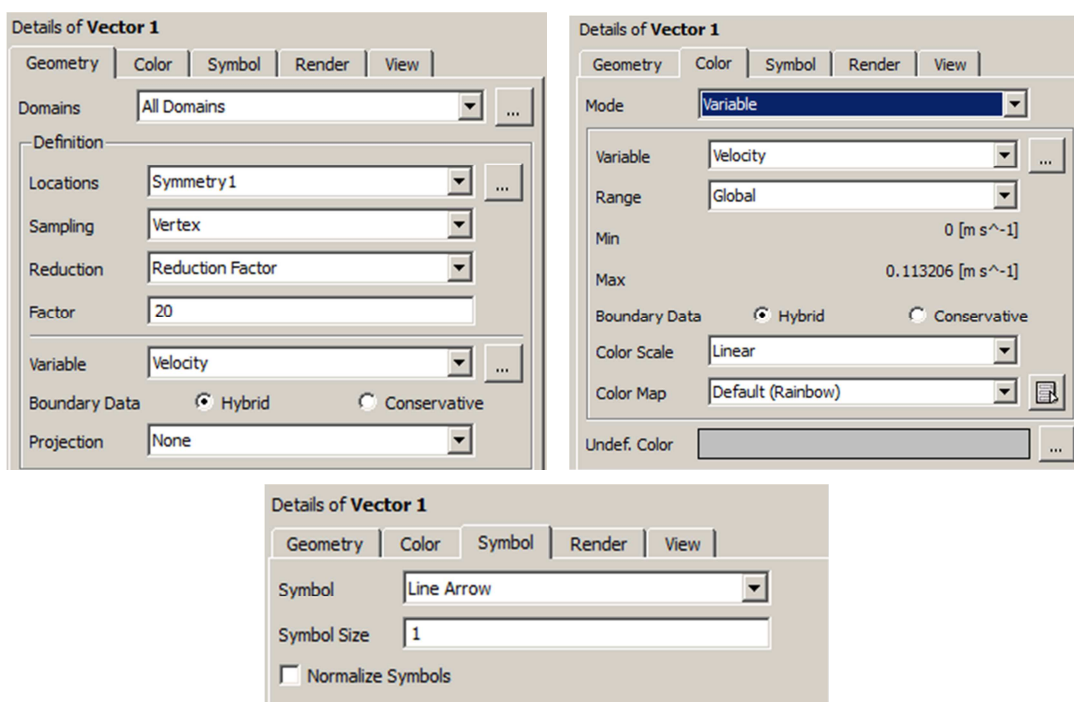
Základný popis:

#### 1. GEOMETRY - definícia vektorového poľa

- **Domains** - tu volíme, z akej oblasti má byť vyhodnotenie.
- **Locations** - volíme, na ktorej entite budeme vytvárať pole.
- **Sampling** - volíme tu vzorkovanie, čiže z ktorých hodnôt sa bude určovať veľkosť vektorov. Existuje viacej spôsobov, najpoužívanejší je *Vertex*.
- **Reduction** - zadávame akým spôsobom sa bude znižovať počet zobrazených vektorov.
- **Factor** - určíme redukčný faktor zobrazenia. 1 znamená, že sa zobrazí každý prvý vektor.
- **Variable** - volíme veličinu, z ktorej sa bude určovať absolútna veľkosť vektoru a jeho smer.
- **Projection** - tu definujeme spôsob projekcie vektorov do plochy.

#### 2. COLOR - farba vektorov

- **Mode** - tu sa zadáva, či má byť vektor vyfarbený vybranou veličinou alebo má mať konštantnú farbu.
- **Variable** - zadáva sa tu veličina, z ktorej budeme určovať absolútnu veľkosť vektorov a ich smer.
- **Range** - tu volíme rozsah, čiže min. a max. hodnotu vo farebnej škále. Existujú 4 spôsoby zadávania: *Global* - min. a max. hodnota sa určí z celej výpočtovej oblasti, *Local* - min. a max. hodnota sa určí z hodnôt danej roviny, *User Specified* - min. a max. hodnotu určí užívateľ a *Value List* - užívateľ definuje priamo hodnoty, ktoré sa zobrazia vo farebnej škále.
- **Colour Scale** - tu definujeme, ako bude zobrazená farebná stupnica. Máme na výber z 2 volieb: *Linear* - lineárna a *Logarithmic* - logaritmickejšia.
- **Colour Map** - tu definujeme farebnú škálu. Najčastejšie sa používa *Rainbow* – farby modrá až červená, *Rainbow6* - modrá až fialová, *Greyscale* - čiernobiela.



Obr. 86 Vytvorenie vektorového poľa

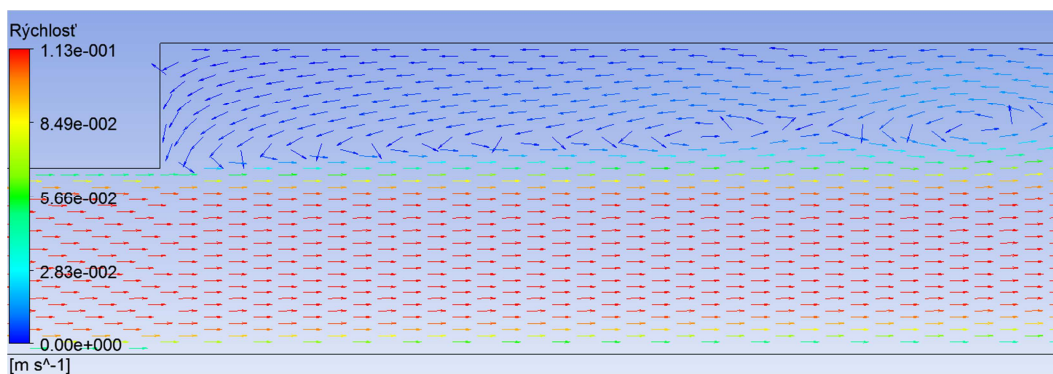
### 3. SYMBOL - vlastnosti grafického symbolu vektora

- **Symbol** - volíme tu vzhľad vektora. Máme na výber viaceré možnosti, napr.: šípka, kužel, kocka a pod. Najčastejšie sa používa symbol šípka.
- **Symbol Size** - upravujeme tu veľkosť vektora v závislosti na rýchlosti.
- **Normalize Symbols** - táto položka umožňuje vypnutie vplyvu rýchlosti na veľkosť vektora. Keď je zaškrtnutá táto položka, potom všetky vektory budú mať rovnakú veľkosť, meniť sa bude len ich smer a farba.

V našom prípade nastavíme:

- V **Definition - Locations** nastavíme **Symmetry1**.
- V **Definition - Factor** zmeníme hodnotu z **1** na **8**. Čiže sa nám zobrazí každý štvrtý vektor.
- V záložke **Colour** zmeníme v **Mode** z **Use Plot Variable** na **Variable**.
- V záložke **Symbol - Symbol Size** zmeníme veľkosť vektora na **0.1** a zaškrtneme položku **Normalize Symbols**.
- Potvrdíme **Apply**.

V grafickom okne sa nám zobrazí vektorové pole, obr. 87.

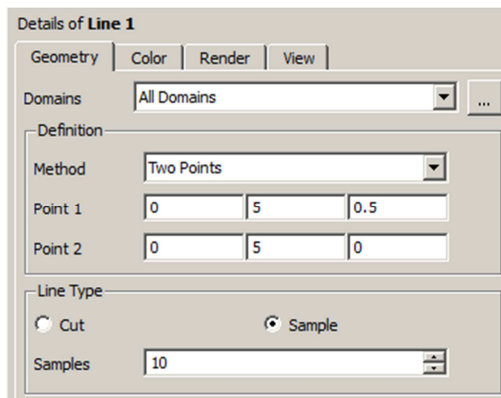


Obr. 87 Zobrazenie vektorového poľa

### Vytvorenie grafu – rýchlostný profil na výstupe z domény

Pre vytvorenie rýchlostného profilu na výstupe z domény je potrebné definovať priamku na ktorej sa bude vyhodnocovať rýchlosť.

- V **Location** vyberieme **Line** a ponecháme názov **Line1**.
- Potvrdíme **OK**.
- Priamku je možné definovať len dvoma bodmi.
- V záložke **Geometry - Definition** zmeníme súradnice bodov podľa obr. 88.
- Potvrdíme **Apply**.



Obr. 88 Vytvorenie a nastavenie priamky




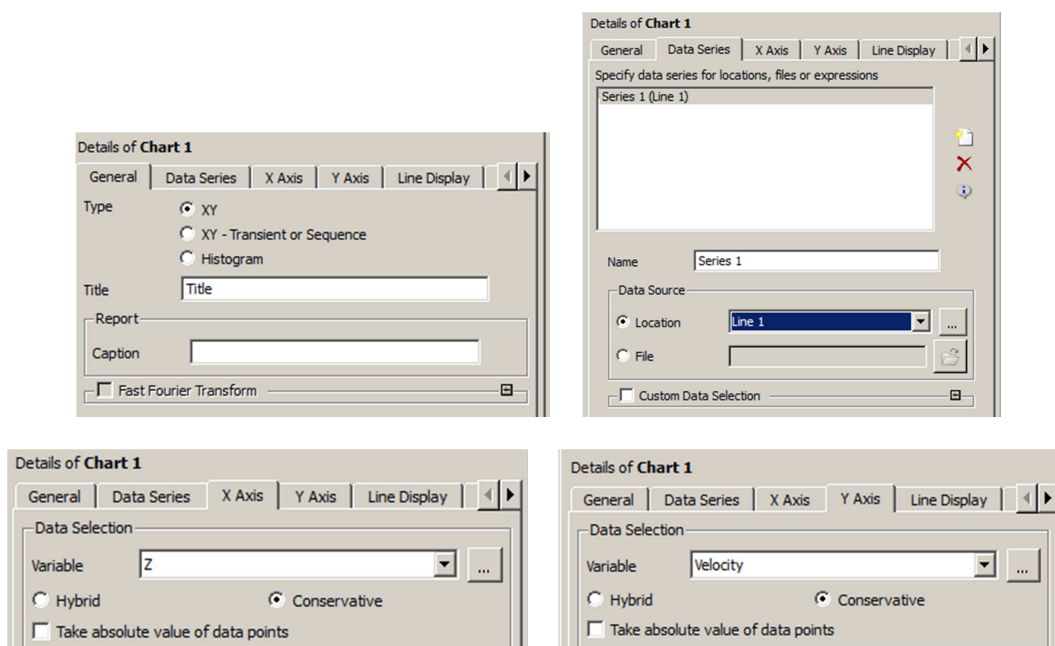
Obr. 89 Zobrazenie úsečky na výstupe z domény (žltá čiara)

Základný popis:

**GEOMETRY** - definícia priamky:

- **Domains** - volíme, či má priamka prechádzať všetkými oblasťami.
- **Point 1, 2** - definujeme začiatok a koniec bodov priamky.
- **Samples** - definujeme, na koľko úsekov bude priamka rozdelená. Táto položka súvisí s rozdelením grafu.

Po vytvorení priamky, môžeme vytvoriť graf kliknutím na ikonku **Chart** . Ponecháme názov **Chart1** a potvrdíme **OK**. Otvorí sa nám okno pre definovanie grafu, obr. 90.



Obr. 90 Postup nastavenia grafu

Základný popis:

### 1. General - definícia typu grafu:

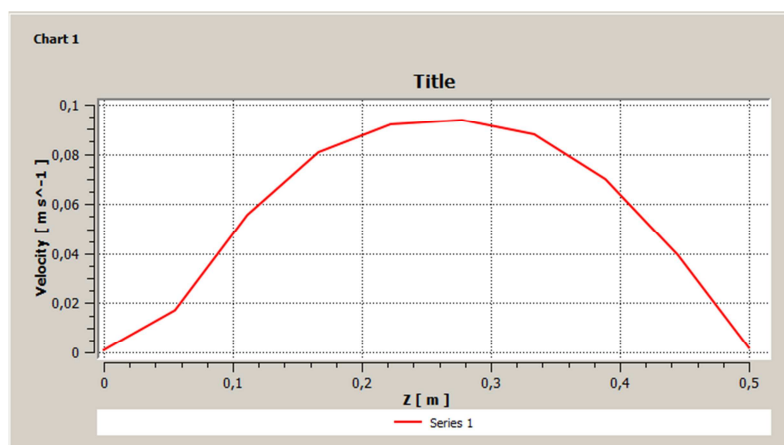
- **Type** - volíme typ grafu. XY - vyžaduje dva stĺpce dát a XY - *Transient* slúži na vyjadrenie závislosti vybranej premennej na čase.
- **Title** - názov grafu. Text môže byť ľubovoľný a bude vyobrazený uprostred nad grafom.

### 2. Data Series – definovanie zdroja dát.

- **Name** – Definovanie názvu radu.
- **Location** – Lokalizácia zdroja dát (Volíme priamku **Line1**)

### 3. X Axis a Y Axis – X-ová a Y-ová súradnica grafu:

- **Variable** - volíme premennú pre príslušajúcu os. Pre X-ovú súradnicu grafu volíme Z-ovú súradnicu z 3D priestoru domény, pretože po Z-ovej osi sa mení výška úsečky.

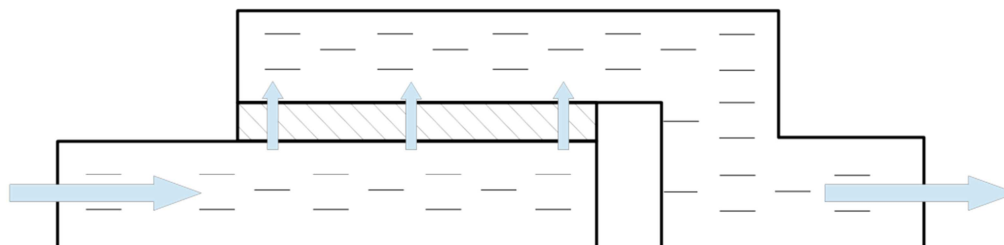


Obr. 91 Zobrazenie grafu – rýchlostný profil na výstupe z domény.

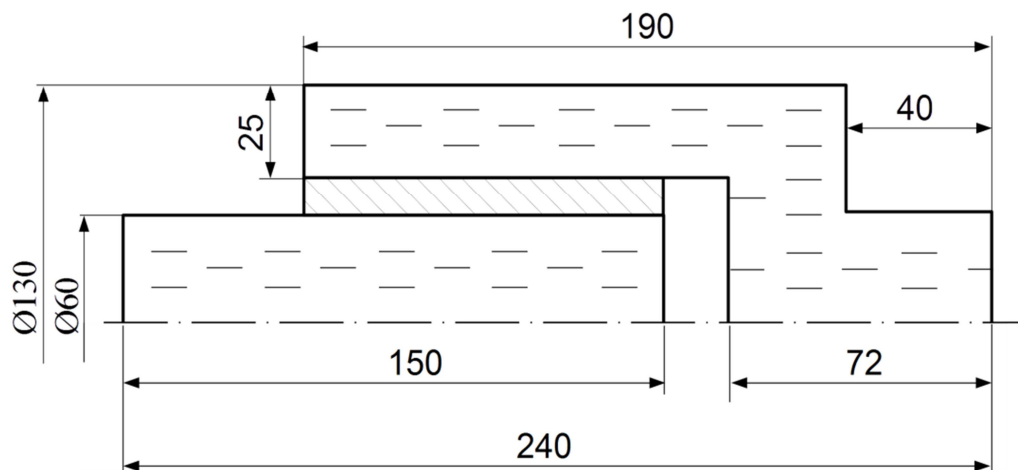
## 8 PRÚDENIE TEKUTÍN CEZ PORÉZNE MATERIÁLY

### 8.1 Zadanie

V tejto časti bude popísaný postup pre numerickú simuláciu prúdenia tekutiny cez porézny materiál, ktorého vlastnosti sú definované permeabilitou a odporovým koeficientom. Cieľom úlohy je vizualizácia prúdového poľa vzduchu a získanie informácie o tlakovej strate filtra.



Obr. 92 Náčrt toku fluidného média



Obr. 93 Náčrt geometrie s rozmermi

Vzduch vstupuje cez potrubie s vnútorným priemerom 60 mm a dĺžkou 150 mm. Následne prechádza cylindrickým filtrom s vnútorným priemerom 60 mm, vonkajším priemerom 80 mm a dĺžkou 100 mm. Po prefiltrovaní prechádza vzduch výstupnou časťou s rozmermi podľa obr. 93.

#### Fyzikálne vlastnosti

Rýchlosť vzduchu na vstupe:  $v = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Teplota vzduchu na vstupe:  $t = 25 \text{ }^\circ\text{C}$

Statický tlak na výstupe:  $p = 0 \text{ Pa}$

Permeabilita filtračného materiálu:  $k_f = 3,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$

Odporový koeficient filtračného materiálu:  $\beta = 8,2 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$

Definícia Reynoldsovho čísla:  $Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{2 \cdot 0,06}{15,55 \cdot 10^{-6}} = 7\,717$

kde  $D$  je priemer vstupného potrubia (m),

$\nu$  - kinematická viskozita vzduchu pri teplote  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  ( $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ).

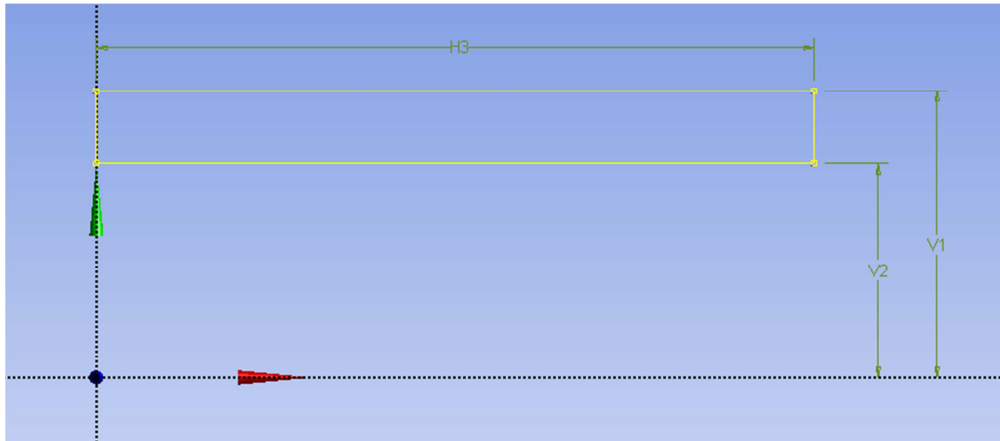
V našom prípade ide o turbulentné prúdenie, keďže  $Re > 2320$ .



## 8.2 Vytvorenie skice a modelu v „Geometry“

1. Vytvoríme si skicu filtra:

- Klikneme na základnú rovinu **XYPlane**, na ikonku **New Sketch** a prepneme sa do **Sketching**.
- Z ponuky vyberieme **Rectangle** a nakreslíme skicu podľa obr. 94.
- Okótujeme podľa obrázka.



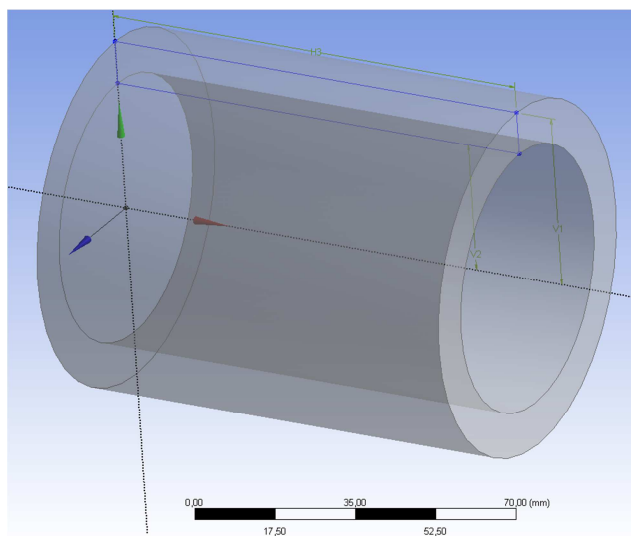
Obr. 94 Náčrt profilu geometrie

Hlavné rozmery:

$$V1 = 40 \text{ mm} \quad V2 = 30 \text{ mm}$$
$$H3 = 100 \text{ mm}$$

2. Vytvorenie telesa filtra zo skice:

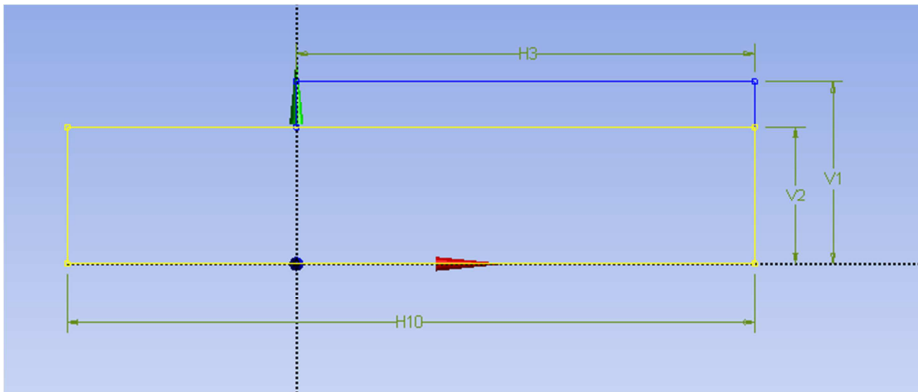
- Klikneme na **Modeling**, čím sa vrátíme späť do základného prostredia.
- V lište nástrojov klikneme na **Revolve**. Tento nástroj nám umožní rotáciu skice okolo zvolenej osi, teda slúži na vytváranie rotačných modelov.
- Pre položku **Axis** zvolíte x-ovú os v hlavnom 3D okne.
- Ponechajte uhol rotácie skice **Angle** na 360°.
- Potvrdíme **Generate**.



Obr. 95 Pohľad na model filtra

## 3. Vytvoríme si skicu prívodu vzduchu:

- Klikneme na základnú rovinu **XYPlane**, stlačíme ikonku **New Sketch**, čím sa vytvorí nový Sketch2 a po jeho aktivovaní sa prepne do **Sketching**.
- Z ponuky vyberieme **Rectangle** a nakreslíme skicu podľa obr. 96.
- Okótujeme podľa obrázka



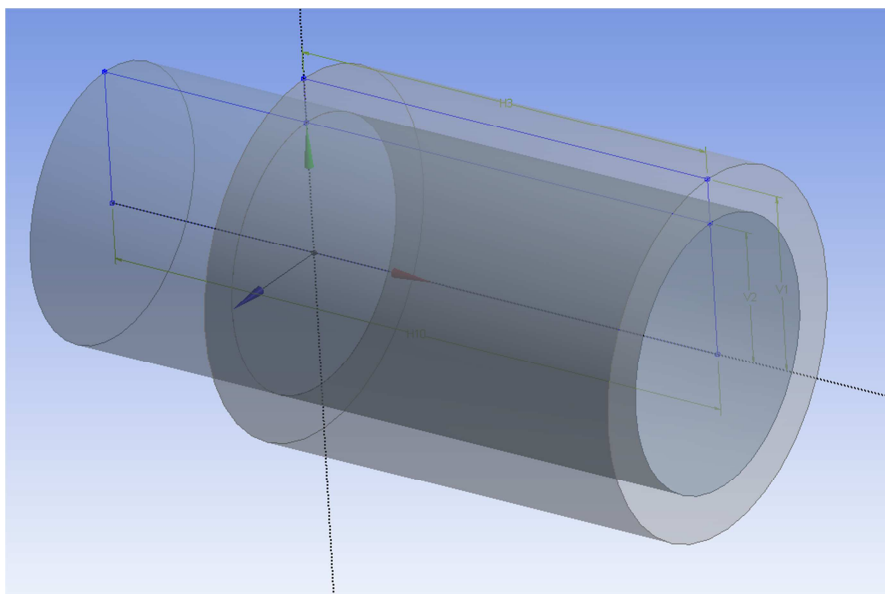
Obr. 96 Náčrt profilu geometrie

Hlavné rozmery:

$$H10 = 150 \text{ mm}$$

## 4. Vytvorenie telesa vstupného vzduchu zo skice:

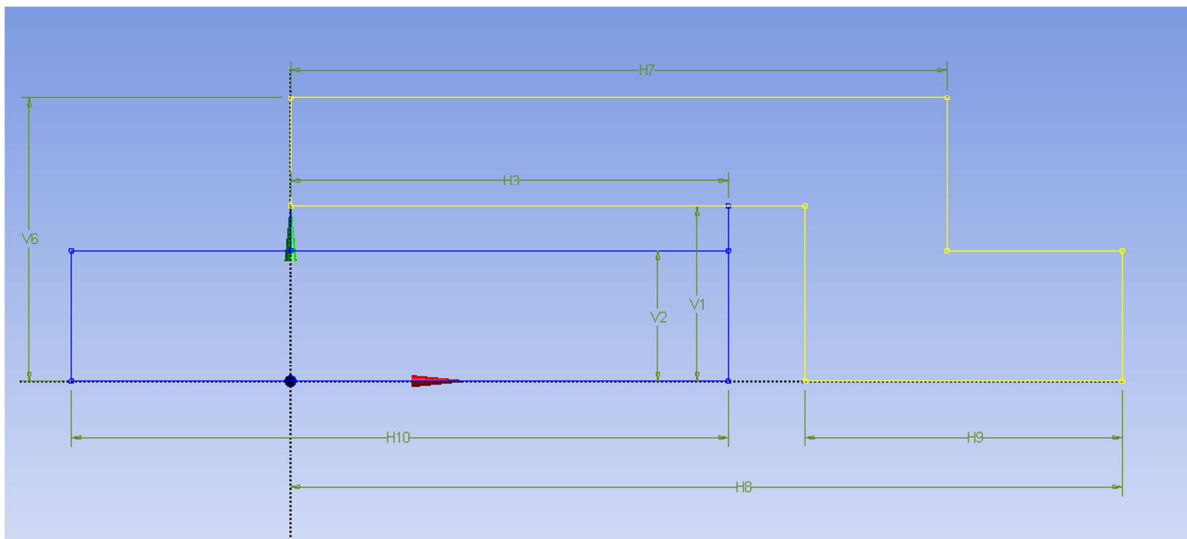
- Pred vytvorením druhého objektu je nutné pôvodnú geometriu **zamraziť** pomocou **Tools/Freeze** z nástrojovej lišty. Bez zamrzenia geometrie by totiž došlo k „zliatiu“ dvoch objektov, ktoré sa bezprostredne dotýkajú. Zamrzenie geometrie sa používa pri vytváraní zostáv, kde je potrebné simulovať viacero domén s rôznymi vlastnosťami.
- Klikneme na **Modeling**, čím sa vrátíme späť do základného prostredia.
- V lište nástrojov klikneme na **Revolve**.
- Pre položku **Axis** zvolíte x-ovú os v hlavnom 3D okne.
- Ponechajte uhol rotácie skice **Angle** na  $360^\circ$ .
- Potvrdíme **Generate** a zamrazíme geometriu pomocou **Tools/Freeze**.



Obr. 97 Pohľad na model filtra

5. Vytvoríme si skicu výstupu vzduchu:

- Klikneme na základnú rovinu **XYPlane**, stlačíme ikonku **New Sketch**, čím sa vytvorí nový Sketch3 a po jeho aktivovaní sa prepneme do **Sketching**.
- Z ponuky vyberieme **Polyline** a nakreslíme skicu podľa obr. 98.
- Okótujeme podľa obrázka



Obr. 98 Náčrt profilu geometrie

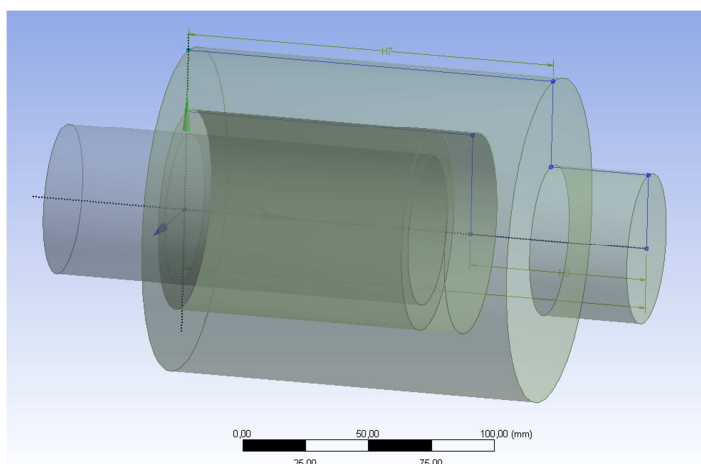
Hlavné rozmery:

$$V6 = 65 \text{ mm} \quad H7 = 150 \text{ mm}$$

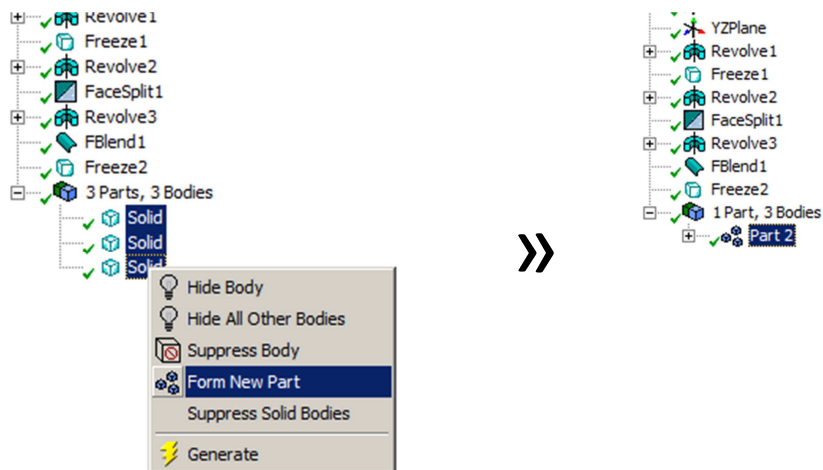
$$H8 = 190 \text{ mm} \quad H9 = 72 \text{ mm}$$

6. Vytvorenie telesa výstupného vzduchu zo skice:

- V tomto kroku nie je nutné zamrazenie geometrie, pretože bolo vytvorené na konci kroku 4.
- Klikneme na **Modeling**, čím sa vrátíme späť do základného prostredia.
- V lište nástrojov klikneme na **Revolve**.
- Pre položku **Axis** zvolíte x-ovú os v hlavnom 3D okne.
- Ponechajte uhol rotácie skice **Angle** na 360°.
- Potvrdíme **Generate** a uložíme pomocou **Save Project**.



Obr. 99 Pohľad na model filtra




Obr. 100 Zoskupenie telies

Pri pohľade na spodnú časť stromovej štruktúry je možné vidieť, že 3D oblasť obsahuje 3 nezávislé telesá. Pre následné nastavenie simulácie je nevyhnutné zoskupiť tieto geometrie tak, aby vznikol jeden diel pozostávajúci z 3 telies. Po rozbalení položky 3 Parts, 3 Bodies a označení všetkých telies, je možné ich zoskupenie pomocou stlačenia PM a zvolenia **Form New Part** (Obr. 100). Pomocou zoskupenia je možné definovať spoločné vlastnosti pre použitý materiál prúdiaceho vzduchu a súčasne nastaviť parametre pre subdoménu filtra.

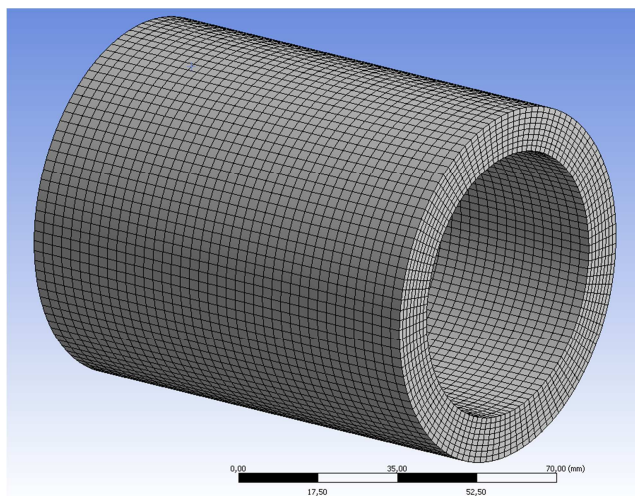
### 8.3 Vytvorenie siete v nástroji „Meshing“

Pri vytvorení siete je možné nezávisle diskretizovať jednotlivé telesá, pričom ich predchádzajúce zoskupenie má za následok, že je sieť jednotlivých telies vzájomne spojená do celku.

- Filter je vzhľadom na svoj valcovitý tvar s konštantným prierezom, ako aj predpoklad vytvorenia cylindrických izobarických plôch v ňom, je vhodné sieťovať pomocou metódy sweep. Metódu siete vložíme kliknutím PM na položku „Mesh“ v stromovej štruktúre a výberom „Insert/Method“. V 3D okne si vyberieme teleso pomocou LM a následne potvrdíme „Apply“ v položke „Geometry“. Položku „Method“ zmeníme z „Automatic“ na „Sweep“ (ťahanie siete). Pre zobrazenie iba zvoleného telesa filtra je po stlačení PM v 3D okne možné zvoliť skrytie všetkých ostatných domén pomocou **Hide All Other Bodies**.
  - **Src/Trg Selection** zmeníme z **Automatic** na **Manual Source and Target**. To nám umožní určiť počiatok a koniec ťahania siete.
  - Klikneme na **Source** a vyberieme si jednu z čelných plôch, pričom zapneme ikonku **Face**  pre výber plôch. Po zvýraznení plochy zelenou farbou potvrdíme **Apply**.
  - Klikneme na **Target** a vyberieme si opačnú čelnú plochu. Po zvýraznení plochy zelenou farbou potvrdíme **Apply**.
  - V položke **Sweep Num Divs** zmeníme hodnotu na 40. Sieť bude rozdelená po dĺžke materiálu medzi **Source** a **Target** 40 elementami.
- Veľkosť siete nastavíme pomocou „Mesh/Insert/Sizing“ v stromovej štruktúre.
  - „Geometry“ – vyberieme teleso a potvrdíme „Apply“,
  - „Element Size“ – nastavíme na **2 mm**.

3. Pre vytvorenie štruktúrovanej siete s cylindrickým rozmiestnením jednotlivých elementov je možné využiť mapovanie siete pomocou „Mesh/Insert/Mapped Face Meshing“. Pri položke Geometry v okne detailov je potrebné zvoliť v 3D okne jednu z čelných plôch.

Klikneme PM na **Mesh** a potvrdíme **Generate Mesh**. Pohľad na vytvorenú sieť je na obr. 101.

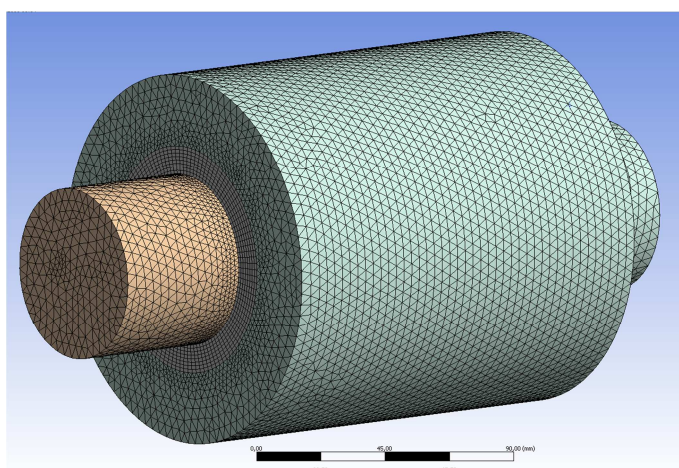


Obr. 101 Sieť pre doménu filtra

Pre opätovné zobrazenie telies klikneme PM na prázdny priestor v 3D okne a zvolíme položku Show All Bodies.

4. Metódu siete pre vstupnú a výstupnú časť vytvoríme kliknutím PM na položku „Mesh“ v stromovej štruktúre a výberom „Insert/Method“. V 3D okne si vyberieme telesá pomocou stlačenej klávesy „Ctrl“ a LM a následne potvrdíme „Apply“ v položke „Geometry“. Položku „Method“ zmeníme z „Automatic“ na „Tetrahedrons“.
5. Veľkosť siete nastavíme pomocou „Mesh/Insert/Sizing“.
  - „Geometry“ – vyberieme teleso na vstupe a výstupe a potvrdíme „Apply“,
  - „Element Size“ – nastavíme na **4 mm**.

Klikneme PM na **Mesh** a potvrdíme **Generate Mesh**. Pohľad na vytvorenú sieť je na obr. 102.



Obr. 102 Celková sieť zoskupených domén

Pre zjednodušenie nebudeme zhusťovať sieť pre simuláciu medznej vrstvy. Postup pre jej vytvorenie je popísaný v kapitole 6.3. Následne zapíšeme sieť tlačidlom **Update** v nástrojovej lište.

## 8.4 Nastavenie podmienok jednoznačnosti v časti „Setup“

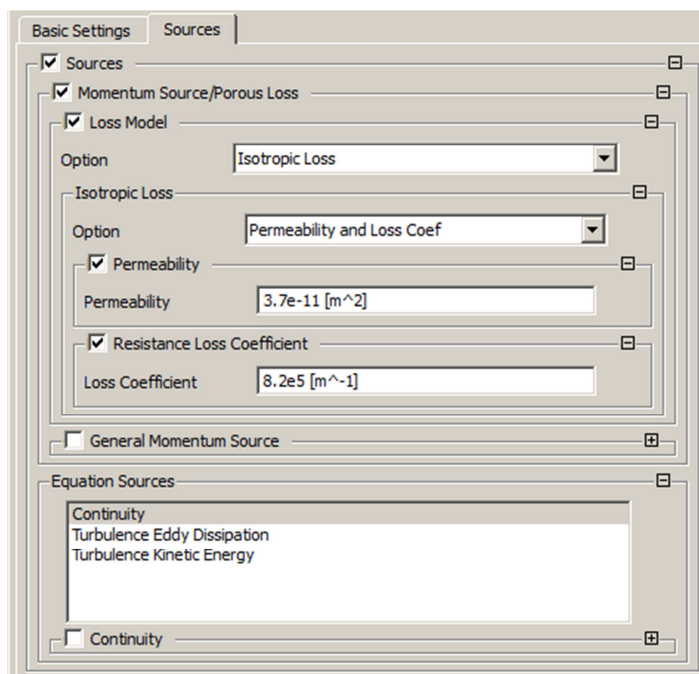
V ďalšom budeme modifikovať automaticky vytvorenú doménu **Default Domain**. Modifikáciu prevedieme dvojklikom na danú oblasť v strome. V pracovnom okne sa zobrazí záložka s vlastnosťami výpočtovej oblasti. V tejto záložke budeme definovať základné fyzikálne vlastnosti, ako sú prúdiaca látka, model turbulencie, gravitácia a pod.

Postup pri nastavení:

- V **General Options - Domain Type** necháme **Fluid Domain**.
- Vo **Fluids List** zmeňte na **Air at 25°C**.
- V **Pressure - Reference Pressure** nastavte **1 [atm]**.
- Vo **Fluid Models - Heat Transfer - Option** nastavte **Isothermal**.
- Vo **Fluid Temperature** napíšte hodnotu **25 [°C]**.
- V **Turbulence** vyberte model turbulencie **k-ε**.
- Po nastavení všetkých vlastností potvrdíme **Apply** a **Close**.

### Vytvorenie subdomény

- V stromovej štruktúre klikneme PM na doménu **Default Domain** a zvolíme „Insert/Subdomain“. Vytvorenie subdomény nám umožňuje definovať rozličné správanie sa časti modelu od ostatných telies. Ide napr. o definovanie vnútorného zdroja tepla, alebo o definovanie poréznych materiálov a filtrov. Vzduch prechádza všetkými doménami, ale práve v časti filtra je vytvorená tlaková strata vplyvom prúdenia cez porézny materiál.
- V časti **Location** vyberieme doménu filtra,
- V záložke **Sources** zaškrtneme **Sources/Momentum Source/Loss Model**,



Obr. 103 Nastavenie subdomény

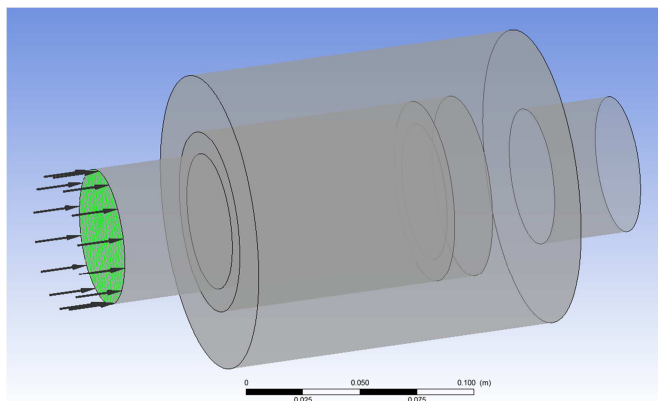
- V **Option** zvolíme **Isotropic Loss**,
- V položke **Isotropis loss/Option** zvolíme **Permeability and Loss Coef**,
- Následne je možné po aktivácii položiek **Permeability** a **Resistance Loss Coefficient** zdefinovať permeabilitu a odporový koeficient filtra (Obr. 103).

## Definovanie okrajových podmienok

Zadefinujeme si základné okrajové podmienky vstup a výstup.

1. Zadefinujeme si novú okrajovú podmienku pre vstup **Inlet**:

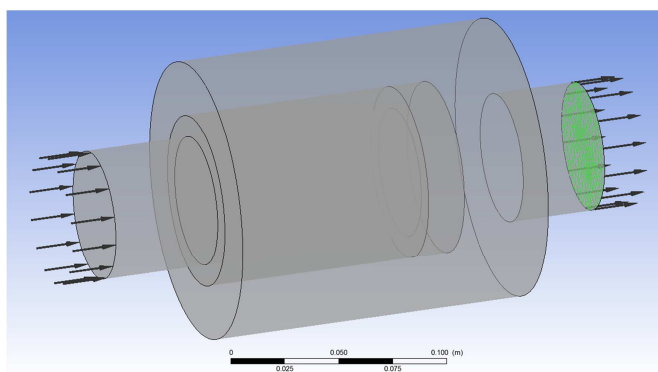
- Pravým tlačidlom na myši klikneme na **Default Domain** a vyberieme z **Insert - Boundary**. Zmeníme **Name** na **Inlet**.
- V **Basing Settings - Boundary Type** nastavíme **Inlet** a v **Location** si vyberieme čelnú kruhovú plochu, odkiaľ vstupuje vzduch.
- V **Boundary Details** zadáme v **Mass And Momentum - Normal Speed** na **2 [m s<sup>-1</sup>]**.
- Potvrdíme **Apply** a **Close**.



Obr. 104 Definovanie okrajovej podmienky na vstupe vzduchu do telesa

2. Zadefinujeme si doménu pre **Outlet**:

- Pravým tlačidlom na myši klikneme na **Default Domain** a vyberieme z **Insert - Boundary**. Zmeníme **Name** na **Outlet**.
- V **Basing Settings - Boundary Type** nastavíme **Outlet** a v **Location** si vyberieme čelnú kruhovú plochu, odkiaľ vystupuje vzduch.
- V **Boundary Details** zadáme v **Mass And Momentum - Average Static Pressure** hodnotu **0 [Pa]**.
- Potvrdíme **Apply** a **Close**.



Obr. 105 Definovanie okrajovej podmienky na výstupe vzduchu z telesa

Týmto máme zadefinované všetky okrajové podmienky, ktoré sú potrebné na definíciu úlohy.

### Nastavenie riešiča pre úlohu

- V **Outline** klikneme dvakrát na **Solver Control**. Otvorí sa záložka **Solver control** pre editáciu.
- V **Basic Settings - Option** nastavíme **High Resolution**.
- **Max. Iteration** nastavíme na **200**.
- Vo **Fluid Timescale Control - Timescale Control** ponecháme **Auto Timescale**
- **Residual Target** nastavíme na „**1E-6**“ ( $1 \cdot 10^{-6}$ )
- Potvrdíme **Ok**.

Po nastavení a uložení výsledkov spustíme **Solution** a následne potvrdíme **Start Run**.

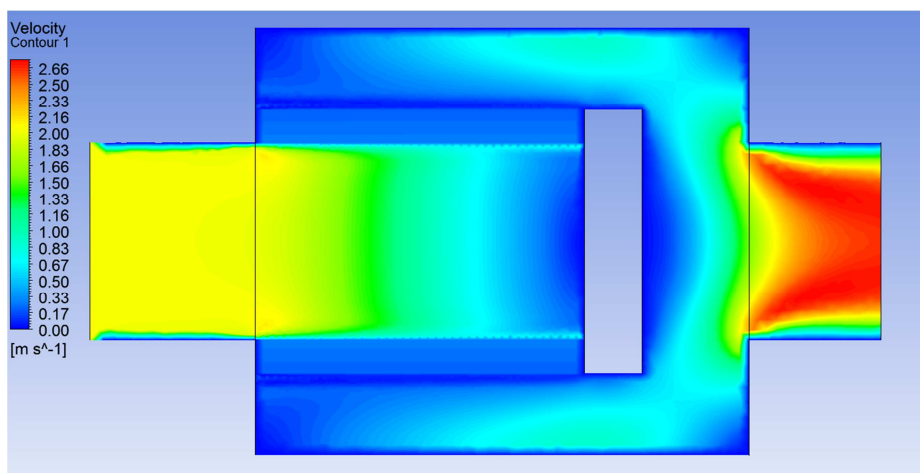
## 8.5 Zobrazenie výsledkov – „Results“

### Vytvorenie kontúr

Vyhodnotenie urobíme pre pole strednej rýchlosti.

- Pomocou rozbaľovacej ikony **Locations** z nástrojovej lišty vyberieme nástroj pre tvorbu roviny **Plane**. **Method** nastavíme na **XY Plane** a **Z** ponecháme na 0.0 m. Potvrdíme **Apply**.
- Klikneme na ikonku **Contoure** z ikonového menu. Premenujeme názov na **Velocity** (Názov je možné upraviť podľa vlastných požiadaviek).
- V **Domains** ponecháme **All Domains**.
- V **Locations** zmeníme položku na vytvorenú rovinu **Plane 1**. Kontúra bude zobrazená na rovine Plane 1.
- Vo **Variable** vyberieme **Velocity** a **Range** ponecháme na **Global**.
- Počet kontúr **# of Contours** zmeníme na 100. Rozsah škály sa tým rozdelí na 100 úrovní rýchlosti.
- Ostatné nastavenia ponecháme na predvolených hodnotách.
- Potvrdíme **OK**.

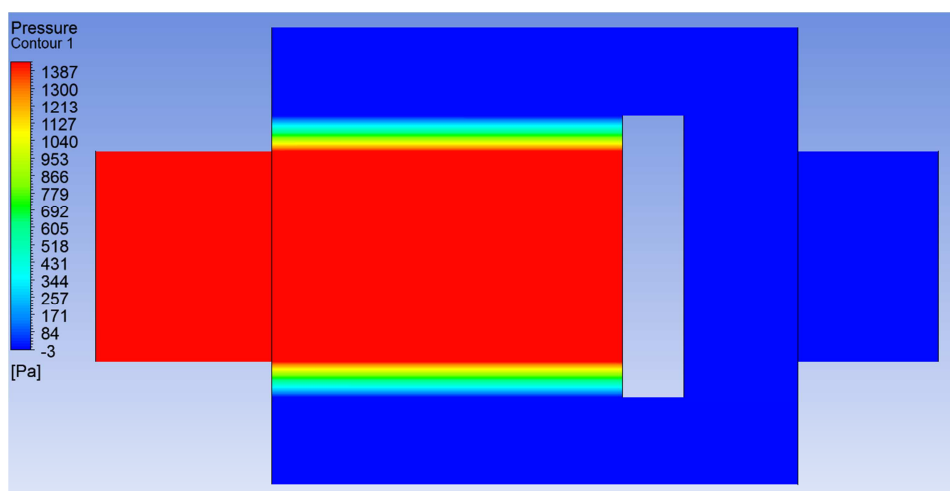
V stromovej štruktúre sa objaví nová položka s názvom *Velocity* a v grafickom okne sa zobrazí pole pre strednú rýchlosť, obr. 106.



Obr. 106 Zobrazenie poľa strednej rýchlosti

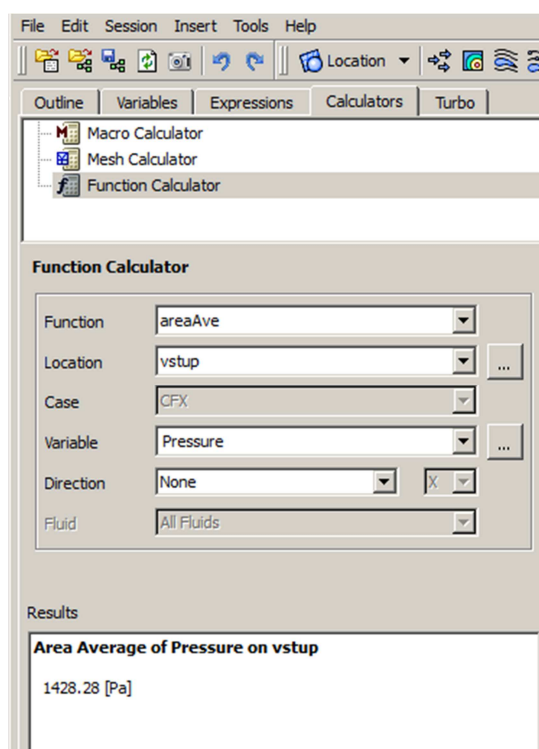
Podobným spôsobom si vytvoríme pole statického tlaku. Nazveme ho **Static Pressure**, obr. 107, a premenná hodnota bude **Pressure** namiesto **Velocity**. Aby sa nám navzájom neprekryvali obidva obrázky, odškrtneme v stromovej štruktúre pole strednej rýchlosti.





Obr. 107 Zobrazenie poľa statického tlaku.

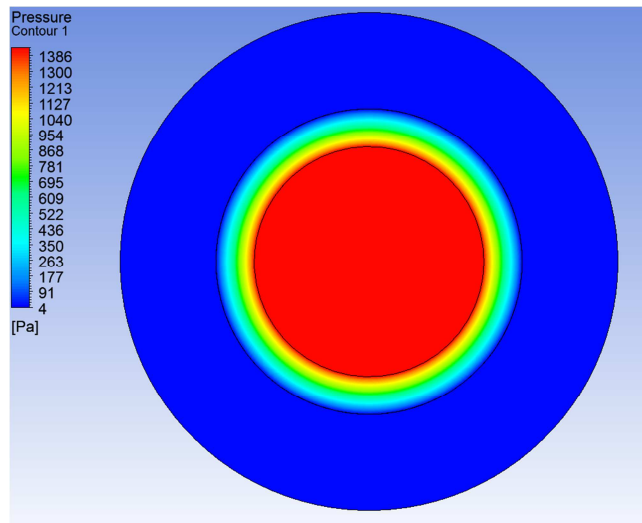
Z numerického výpočtu a výsledných izobarických plôch je zrejmé, že takmer k celkovému tlakovému spádu medzi vstupom a výstupom dochádza práve na filtračnej vložke. Celková tlaková strata je približne 1,4 kPa. Presnejšie je možné stanoviť hodnotu tlakovej straty na celom filtračnom zariadení využitím **Function Calculator**, ktorého funkcia je bližšie opísaná v kap. 5.3.4.3. Po kliknutí na záložku **Calculators**, umiestnenej nad stromovou štruktúrou, je možné spustiť **Function Calculator**. Nastavenie kalkulátora je zobrazené na obr. 108.



Obr. 108 Nastavenie **Function Calculator**

Výsledná tlaková strata filtra spolu s prívodným a výstupným potrubím je 1428 Pa. Pre porovnanie je možné uskutočniť aj analytický výpočet podľa nasledujúceho postupu. Matematický popis tlakovej straty na filtračnej vložke, opísaný ďalej, je založený na predstave prúdenia plynu radiálnym smerom z vnútorného priestoru filtra (Obr. 110) do okolia pri zanedbaní zmeny hustoty vplyvom zmeny tlaku. Vzhľadom na radiálny smer rýchlosti plynu do steny vložky budú tlakové

izobary tvorené súosovými valcami o dĺžke odpovedajúcej samotnej dĺžke filtračnej vložky. Tento predpoklad potvrdzuje aj numerický výpočet (Obr. 109). Výpočet tlakovej straty je preto možné riešiť v cylindrických súradniciach  $r$ ,  $\varphi$  a  $z$ .



Obr. 109 Izobarické plochy v reze kolmom na os filtra

Tlakovú stratu na filtri možno popísať diferenciálnou rovnicou odvodenou z Darcyho rovnice pre laminárne prúdenie, a to pridaním člena pre turbulentné prúdenie. Jej tvar je

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\eta}{k_f} \cdot v + \beta \cdot \rho \cdot v^2 \quad (\text{Pa} \cdot \text{m}^{-1}) \quad (198)$$

kde  $\eta$  je dynamická viskozita vzduchu ( $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ),

$k_f$  - permeabilita vložky ( $\text{m}^2$ ),

$v$  - rýchlosť prúdenia poréznym materiálom ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ),

$p$  - tlak plynu (Pa),

$r$  - radiálna vzdialenosť elementu filtra (m),

$\beta$  - odporový koeficient vložky ( $\text{m}^{-1}$ ),

$\rho$  - hustota prúdiacej tekutiny ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ).

Prietok plynu z vnútornej strany filtra do jej vonkajšieho priestoru je rovnaký a riadi sa rovnicou kontinuity:

$$Q_{v2} = Q_v = Q_{v1} \quad (\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}) \quad (199)$$

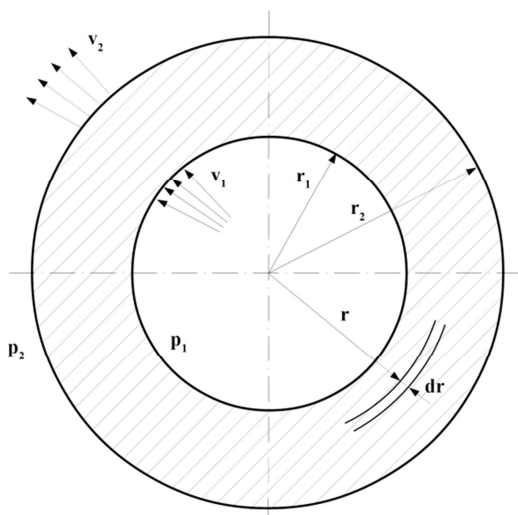
$$S_2 \cdot v_2 = S \cdot v = S_1 \cdot v_1 \quad (\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}) \quad (200)$$

kde  $Q_v$  je objemový prietok vzduchu ( $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ),

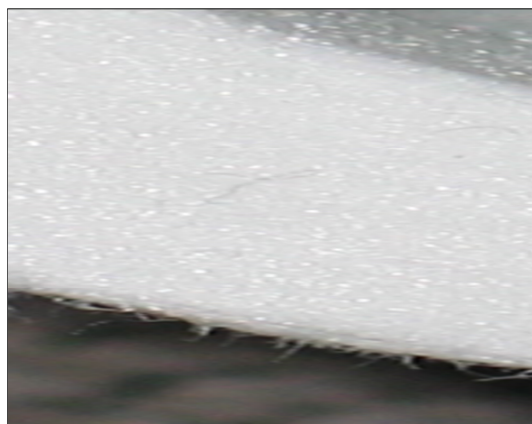
$S$  - valcová prietoková plocha na polomere  $r$  ( $\text{m}^2$ ),

$v_2$  - rýchlosť plynu na výstupe z materiálu filtra ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ),

$v_1$  - rýchlosť plynu na vstupe do materiálu filtra ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).



Obr. 110 Geometria filtra s okrajovými podmienkami



Obr. 111 Detail materiálu riešeného filtra

Zanedbaním zmeny hustoty vplyvom tlakového spádu po hrúbke filtračnej vložky je možné pre všeobecnú súradnicu polomeru  $r$  popísať rýchlosť prúdiaceho plynu v tvare

$$v = \frac{v_1 \cdot r_1}{r} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \quad (201)$$

Dosadením rovnice (201) do (198) dostávame výraz v tvare

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\eta}{k_f} \cdot \frac{v_1 \cdot r_1}{r} + \beta \cdot \rho \cdot \frac{v_1^2 \cdot r_1^2}{r^2} \quad (202)$$

Ďalším riešením vzťahu (202), a jeho úpravou, získame vzťah pre vyjadrenie tlakovej straty v nasledovnom vyjadrení

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\eta}{k_f} \cdot \frac{v_1 \cdot r_1}{r} dr + \int_{r_1}^{r_2} \beta \cdot \rho \cdot \frac{v_1^2 \cdot r_1^2}{r^2} dr$$

$$\Delta p = \frac{\eta}{k_f} \cdot v_1 \cdot r_1 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \beta \cdot \rho \cdot v_1^2 \cdot r_1^2 \cdot \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \quad (203)$$

Ako vyplýva z rovnice (203), jej aplikácia pri určovaní tlakovej straty je podmienená poznaním konkrétnej hodnoty permeability materiálu filtra  $k_f$ , odporového koeficientu filtra  $\beta$ , rýchlosti plynu na vstupe do vložky  $v_1$ , hustoty plynu  $\rho$  a jeho dynamickej viskozity  $\eta$ . Pri výpočte tlakovej straty podľa vzťahu (203) dostávame hodnotu 1937 Pa. Odchýlka výsledku získaného numerickým výpočtom je oproti analytickému výsledku je 26,3 %. Zníženie odchýlky je možné dosiahnuť zjemnením siete filtra a zvýšením iteračnej presnosti. Pri zmenšení elementov filtra na 1 mm a zvýšením iteračnej presnosti na  $10^{-7}$  sa dosiahne odchýlka iba 18,8 %.

## LITERATÚRA

- [1] RYBÁR, R., KUDELAS, D. Energetické zdroje – klasifikácia a výklad pojmov v súvislostiach, *Acta Montanistica Slovaca*, 2007, č. 2, roč. 12, ISSN 1335-1788, s. 269 – 273.
- [2] HIL'OVSKÁ, E. – GALLIK, R. : Počítačová podpora projektovania EZ pomocou ANSYS CFX : zbierka príkladov 1 - 1. vyd. - Košice : Sjf TU, 2008. - 129 s. - ISBN 978-80-553-0135-8.
- [3] VACEK, V., HLAVAČKA, V.: Prenos tepla a hmoty. ČVUT, Praha 1990
- [4] VDI Wärmeatlas, GVC, Berlin, 2006, 10. vydanie, ISBN-10 3-540-25504-4,
- [5] ROHSENOW, WARREN M.; HARTNETT, JAMES P.; CHO, YOUNG I.: Handbook of Heat Transfer , 1998 McGraw-Hill, 3. vydanie, 2007, ISBN 978-0-07-053555-8
- [6] NAKAYAMA, Y., BOUCHER, R.F.: Introduction to Fluid Mechanics, Elsevier, 2000, ISBN 978-0-340-67649-3, 333 str.
- [7] THUMANN, A., MEHTA, P. D.: Handbook of Energy Engineering, 2008 Fairmont Press, Inc., ISBN 978-1-4200-8768-0
- [8] NOSKIEVIČ, J. A KOL.: Mechanika tekutin, Praha : SNTL, 1987. - 354 s.

Tomáš BRESTOVIČ, Natália JASMINSKÁ

**NUMERICKÉ METÓDY A MODELOVANIE V ENERGETIKE**

1. vydanie

náklad 50 ks CD

113 strán, 111 obrázkov, 3 tabuľky

rok vydania 2015

Vydavateľ: Strojnícka fakulta Technickej univerzity v Košiciach

Tlač: Strojnícka fakulta

**ISBN 978-80-553-2067-0**