



**TECHNICKÁ
UNIVERZITA
V KOŠICIACH**

Jozef BOCKO
Štefan SEGLA

NUMERICKÉ METÓDY MECHANIKY TUHÝCH A PODDAJNÝCH TELIES



EDÍCIA VEDECKEJ A ODBORNEJ LITERATÚRY
Košice, 2016

© prof. Ing. Jozef BOCKO, CSc.
prof. Ing. Štefan SEGLA, CSc.

Numerické metódy mechaniky tuhých a poddajných telies

Lektori:

prof. Ing. Milan Žmindák, CSc. – ŽU v Žiline

prof. Ing. Ján Vavro, PhD. – TrU A. Dubčeka

prof. Ing. František Šimčák, CSc. – TU v Košiciach

ISBN 978-80-553-3065-5

EAN 9788055330655



Obsah

Predhovor	7
1. ÚVOD.....	8
I. KINEMATIKA A DYNAMIKA MECHANICKÝCH SÚSTAV.....	11
2. TEÓRIA ZLOŽENIA SÚSTAV TELIES	12
2.1 Základné pojmy.....	12
2.2 Kinematické reťazce	12
2.3 Mechanizmy. Viazané mechanické sústavy.....	14
2.4 Opis mechanických sústav	16
2.5 Štrukturálne (topologické) matice.....	17
3. KINEMATIKA ROVINNÝCH A PRIESTOROVÝCH MECHANICKÝCH SÚSTAV.....	21
3.1 Kinematické dvojice.....	21
3.1.1 Kinematika rovinného pohybu.....	21
3.1.2 Kinematika priestorového pohybu.....	23
3.1.3 Kinematika rovinného pohybu bodu a telesa v maticovej formulácii.....	26
3.2 Kinematika rovinného pohybu mechanickej sústavy	29
s uvažovaním väzieb.....	29
3.2.1 Aktívne (hnacie) väzby	30
3.2.2 Pasívne väzby.....	31
3.3 Počítačová formulácia úloh kinematickej analýzy	36
3.4 Počítačová implementácia.....	41
3.4.1 Počítačová formulácia pasívnych väzieb.....	42
3.5 Kinematika priestorového pohybu mechanickej sústavy	49
s uvažovaním väzieb.....	49
3.6 Eulerove uhly.....	51
4. DYNAMIKA ROVINNÝCH MECHANICKÝCH SÚSTAV	67
4.1 Princíp virtuálnych prác.....	67
4.1.1 Virtuálne výchylky	67
4.1.2 Princíp virtuálnych prác v dynamike.....	68
4.1.3 Silové prvky (pružiny, tlmiče a aktuátory).....	70



4.2	Dynamika rovinného pohybu mechanickej sústavy.....	73
	s uvažovaním väzieb.....	73
4.2.1	Zotrvačné účinky telesa.....	74
4.2.2	Matica hmotnosti telesa.....	74
4.3	Pohybové rovnice telesa	76
4.4	Pohybové rovnice mechanickej sústavy.....	78
4.5	Eliminácia väzbových síl.....	78
4.6	Lagrangeove multiplikátory	83
4.7	Pohybové rovnice mechanickej sústavy s uvažovaním väzieb	89
4.8	Numerické metódy dynamiky.....	94
4.8.1	Metódy numerickej integrácie.....	94
4.8.2	Algebro-diferenciálne rovnice.....	98
5.	DYNAMIKA PRIESTOROVÝCH MECHANICKÝCH SÚSTAV	100
5.1	Súradnice, rýchlosti a zrýchlenia.....	100
5.2	Zovšeobecnené zotrvačné sily.....	102
5.3	Zovšeobecnené vonkajšie sily.....	104
5.4	Pohybové rovnice telesa	109
5.5	Pohybové rovnice mechanickej sústavy.....	110
5.6	Väzbové rovnice kinematických dvojíc.....	112
II.	MECHANIKA KONTINUA.....	117
6.	ZÁKLADNÁ FORMULÁCIA MECHANIKY KONTINUA.....	118
6.1	Materiálový a priestorový popis.....	118
6.2	Deformačný gradient.....	119
6.3	Tenzory pomerných deformácií.....	120
6.4	Materiálová derivácia.....	123
6.5	Zákon zachovania hmoty	125
6.6	Hybnosť.....	125
6.7	Vektor napätia.....	126
6.8	Rovnováha hybností	129
6.9	Vlastnosti tenzora napätia.....	130



6.10	Časová derivácia virtuálnej práce	132
6.11	Prvý a druhý Piola-Kirchhoffov tenzor napätia.....	133
6.12	Kinetická energia.....	134
6.13	Prvý zákon termodynamiky	134
6.14	Energetická rovnica	136
6.15	Druhý zákon termodynamiky	137
7.	METÓDA KONEČNÝCH OBJEMOV.....	140
7.1	Úvod.....	140
7.2	Semi-diskretizované rovnice.....	140
7.2.1	Integrácia toku po povrchoch elementu.....	142
7.2.2	Objemová integrácia zdrojového člena.....	143
7.2.3	Diskrétna rovnica zachovania pre jeden integračný bod	144
7.2.4	Linearizácia toku	145
7.3	Okrajové podmienky	146
7.3.1	Dirichletova okrajová podmienka	146
7.3.2	Neumannova okrajová podmienka.....	147
7.4	Stupeň presnosti.....	148
7.4.1	Aproximácia polohovej zmeny	148
7.4.2	Aproximácia strednou hodnotou.....	149
7.5	Prechodová semi-diskrétna rovnica	151
7.5.1	Presnosť	152
7.5.2	Konvergencia	152
7.6	Usporiadanie premenných.....	153
7.6.1	MKO s vyhodnotením premenných vo vrchoch buniek	153
7.6.2	MKO s vyhodnotením premenných v ťažiskách buniek.....	154
7.7	Implicitné versus explicitné výpočtové metódy.....	155
8.	VÝPOČTOVÉ METÓDY V NELINEÁRNEJ MECHANIKE KONTINUA.....	157
8.1	Formulácia metódy konečných prvkov	158
8.1.1	Odvodenie nelineárnej metódy konečných prvkov	158
8.2	Iteračné riešenie sústavy nelineárnych rovníc Newton- Raphsonovou metódou	161



8.2.1	Výpočet tangenciálnej matice tuhosti.....	162
8.2.2	Alternatívne vyjadrenie tangenciálneho tenzora \mathcal{A}	164
8.3	Pružnosť v oblasti konečných deformácií	166
8.3.1	Princíp materiálovej objektivity	166
8.3.2	Izotropia.....	168
8.3.3	Hyperelasticita	169
8.3.4	Neo-Hookeovský materiálový model.....	170
8.3.5	Ogdenov materiálový model.....	171
8.3.6	Výpočet tenzora \mathcal{L}	171
8.4	Reologické modely.....	174
8.4.1	Viskoelasticita.....	174
8.5	Formulácia mechaniky kontinua pre MKP	177
8.5.1	Viskoelasticita.....	177
8.5.2	Poškodenie.....	178
8.6	Implementácia metódy konečných prvkov	181
8.6.1	Výpočet \mathbf{Z} (lokálna iterácia).....	183
8.6.2	Výpočet $\Delta\mathbf{Z}$	184
8.6.3	Správanie sa materiálu nezávislé od rýchlosti deformácie	185
8.7	Špecifikácie pre konkrétne materiálové modely	187
8.7.1	Viskoelasticita.....	187
9.	KLASICKÁ FORMULÁCIA PLASTICITY.....	190
9.1	Úvod.....	190
9.2	Úvodné poznámky	191
9.2.1	Rozklad deformácie.....	191
9.2.2	Efektívne napätie a rýchlosť plastickej deformácie.....	192
9.3	Podmienka plasticity	193
9.3.1	Normálová hypotéza plasticity.....	195
9.3.2	Podmienka konzistencie	197
9.4	Izotropné spevnenie	199
9.4.1	Lineárne izotropné spevnenie.....	200



9.5	Kinematické spevnenie.....	202
9.5.1	Nelineárne kinematické spevnenie.....	203
9.5.2	Funkcia plasticity pri kinematickom spevnení.....	204
9.6	Kombinované izotropné a kinematické spevnenie.....	206
9.7	Viskoplasticita a creep	208
9.7.1	Mocninový zákon pre creep.....	211
9.7.2	Potenciál a ekvivalencia funkcie tečenia	211
10.	ÚVOD DO NANOŠTRUKTÚR	213
10.1	Historická rešerš	213
10.2	Nanorúrky.....	214
10.3	Štruktúra uhlíkových nanorúrok.....	215
10.4	Vlastnosti uhlíkových nanorúrok.....	216
10.5	Riešenie voľného kmitania uhlíkových nanorúrok pomocou programu Matlab .	218
A.	LINEÁRNA ALGEBRA A ANALÝZA.....	231
A.1	Matice.....	231
A.2	Maticové operácie.....	231
A.2.1	Maticové sčítanie	231
A.2.2	Maticové násobenie	232
A.2.3	Determinant matice.....	232
A.2.4	Inverzná matica.....	232
A.2.5	Ortogonalna matica	233
A.3	Vektory	233
A.3.1	Derivovanie.....	234
A.3.2	Lineárna nezávislosť.....	236
A.4	Trojrozmerné vektory.....	237
A.4.1	Vektorový súčin	237
A.4.2	Antisymetrická matica	237
A.5	Riešenie sústav algebraických rovníc.....	238
A.5.1	Pivotácia a normovanie	239
A.6	Trojuholníková faktorizácia	239



A.6.1	Choleskeho metóda	240
	Zoznam použitej literatúry	242

Predhovor

Mechanika je jednou zo základných vied strojárstva, stavebníctva a iných inžinierskych odborov. Fyzikálne javy skúmané v mechanike sú často veľmi zložité a pri ich štúdiu sa nedá v súčasnosti vystačiť s analytickými metódami riešenia. Od nástupu využitia výpočtovej techniky pre riešenie úloh mechaniky, ktorý začal v šesťdesiatych rokoch 20. storočia, tento spôsob riešenia problémov nadobudol obrovský význam nielen pri riešení teoretických problémov, ale i pri riešení úloh praxe.

Predložená monografia predstavuje moderné numerické postupy mechaniky týkajúce sa oboch jej základných súčastí – mechaniky mechanizmov a mechaniky kontinua. Obe hrajú oddávna kľúčovú úlohu v strojárstve a snaha o zvyšovanie výkonu a rýchlosti strojov a procesov ich dôležitosť len zväčšuje. Cieľom monografie je oboznámiť čitateľa s jednotlivými formami riešenia problémov numerickými metódami v oboch relatívne samostatne sa vyvíjajúcich odboroch. Čitateľovi predstavuje rôzne metódy a techniky, ktoré môžu poslúžiť pre modelovanie, analýzu, návrh, modifikáciu a optimalizáciu strojov a zariadení.

Kompletné počítačové spracovanie monografie vrátane kreslenia obrázkov bolo realizované s pomocou doktorandov Katedry aplikovanej mechaniky a strojného inžinierstva Strojníckej fakulty Technickej univerzity v Košiciach Ing. Martina Čajku, Ing. Petra Čaráka, Ing. Tomáša Kulu a Ing. Petra Pavelku. Výpočty nanoštruktúr realizoval Ing. Pavol Lengvarský. Textovú časť monografie prepísala Ing. Eva Dzurišová a Alena Nudzíková.

Monografia bola vypracovaná v rámci riešenia projektu Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky KEGA 054TUKE-4/2014 „Využitie moderných numerických metód mechaniky ako základu vedeckého konštruovania pre rozvoj vedomostnej bázy študentov druhého a tretieho stupňa vysokoškolského štúdia“.

Veríme, že monografia bude vítanou pomôckou nielen pre vedeckých pracovníkov univerzít, akademie vied a rezortných výskumných ústavov, ale i projektantov, konštruktérov a ostatných pracovníkov v praxi, ktorí využívajú moderné numerické metódy mechaniky.

Košice 9.10.2016

Autori