

# Obsah

<b>Predhovor</b>	<b>11</b>
<b>Úvod</b>	<b>13</b>
<b>1 Základné rovnice a princípy</b>	<b>15</b>
1.1 Základné rovnice teórie pružnosti . . . . .	15
1.1.1 Geometrické rovnice . . . . .	15
1.1.2 Diferenciálne rovnice rovnováhy . . . . .	16
1.1.3 Konštitučné rovnice materiálu . . . . .	17
1.1.4 Okrajové podmienky . . . . .	19
1.2 Základné princípy . . . . .	20
1.2.1 Princíp virtuálnych posunutí . . . . .	20
1.2.2 Princíp minima celkovej potenciálnej energie . . . . .	23
<b>2 Metóda konečných prvkov</b>	<b>27</b>
2.1 Úvodné poznámky . . . . .	27
2.2 Interpolácia v metóde konečných prvkov . . . . .	28
2.3 Rovnice pre určenie uzlových posunutí . . . . .	32
2.4 Konvergencia riešenia . . . . .	37
<b>3 Prvky pre rovinné úlohy</b>	<b>39</b>
3.1 Typy rovinných úloh . . . . .	39
3.1.1 Rovinná napätosť . . . . .	39
3.1.2 Rovinná deformácia . . . . .	40
3.2 Pravouhlé prvky . . . . .	41
3.3 Trojuholníkový prvok . . . . .	44
3.4 Osová symetria . . . . .	48
3.5 Izoparametrické prvky . . . . .	51
3.6 Numerická integrácia . . . . .	53

<b>4</b>	<b>Telesové prvky</b>	<b>55</b>
4.1	Šesťsteny . . . . .	55
4.1.1	Lineárny 8-uzlový prvok . . . . .	55
4.1.2	Kvadratický 20-uzlový prvok . . . . .	58
4.2	Štvorsteny . . . . .	59
4.2.1	Objemové súradnice . . . . .	59
4.2.2	Lineárny štvorsten . . . . .	60
4.2.3	Kvadratický a kubický štvorsten . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Prútové a nosníkové prvky</b>	<b>63</b>
5.1	Prútové prvky . . . . .	63
5.1.1	Rovinný prútový prvok . . . . .	63
5.1.2	Priestorový prútový prvok . . . . .	65
5.1.3	Transformačné rovnice . . . . .	67
5.2	Rovinné nosníkové prvky . . . . .	70
5.2.1	Základné vzťahy . . . . .	70
5.2.2	Bernoulliho nosník . . . . .	73
5.2.3	Timošenkov nosník . . . . .	77
5.2.4	Transformácia súradníc a zostavenie rovníc . . . . .	82
5.3	Priestorový nosníkový prvok . . . . .	85
5.3.1	Vzťahy pre napätia a deformácie . . . . .	85
5.3.2	Interpolácia funkcií . . . . .	89
5.3.3	Transformácia do globálnej súradnicovej sústavy . . . . .	90
5.4	Použitie prútových a nosníkových prvkov . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Dosky a škrupiny</b>	<b>99</b>
6.1	Základné vzťahy pre dosky . . . . .	99
6.2	Doskové prvky . . . . .	105
6.2.1	Úvodné poznámky . . . . .	105
6.2.2	Trojuholníkový prvok pre tenké dosky . . . . .	107
6.2.3	Trojuholníkový prvok pre hrubé dosky . . . . .	111
6.3	Škrupinové prvky . . . . .	113
6.3.1	Typy škrupinových prvkov . . . . .	113
6.3.2	Ploché škrupinové prvky . . . . .	114
6.3.3	Zakrivené škrupinové prvky . . . . .	117
6.4	Modelovanie tenkostenných konštrukcií . . . . .	121
<b>7</b>	<b>Špeciálne konečné prvky</b>	<b>125</b>
7.1	Pružinový prvok . . . . .	125
7.2	Spojovací prvok . . . . .	126

7.3	Kontaktné prvky . . . . .	127
<b>8</b>	<b>Nelineárne úlohy</b>	<b>129</b>
8.1	Úvod . . . . .	129
8.1.1	Lineárne a nelineárne úlohy . . . . .	129
8.1.2	Koncepcia časových kriviek . . . . .	131
8.2	Riešenie sústav nelineárnych rovníc . . . . .	132
8.2.1	Dotyčnicová matica tuhosti . . . . .	132
8.2.2	Prírastková metóda . . . . .	133
8.2.3	Newton-Raphsonova metóda . . . . .	134
8.2.4	Modifikovaná Newton-Raphsonova metóda . . . . .	135
8.2.5	Lineárna akcelerácia . . . . .	136
8.2.6	Kvázinewtonovské metódy . . . . .	137
8.2.7	Metóda dĺžky oblúka . . . . .	137
8.2.8	Kritériá konvergenzie . . . . .	139
8.3	Úvod do nelineárnej mechaniky kontinua . . . . .	140
8.3.1	Kinematika konečných deformácií . . . . .	140
8.3.2	Polárny rozklad . . . . .	144
8.3.3	Miery deformácie . . . . .	147
8.3.4	Rýchlosť deformácie . . . . .	151
8.3.5	Miery napätosti . . . . .	152
8.3.6	Konjugované miery napätí a deformácií . . . . .	156
8.3.7	Rýchlosti napätí . . . . .	162
8.4	Nelineárne pružný materiál . . . . .	163
8.4.1	Jednoosová napätosť . . . . .	163
8.4.2	Viacosová napätosť . . . . .	165
8.5	Pružne plastický materiál . . . . .	167
8.5.1	Jednoosová napätosť . . . . .	167
8.5.2	Priestorová napätosť . . . . .	172
8.5.3	Integrácia konštitučných rovníc . . . . .	178
8.6	Diskretizácia konečnými prvkami . . . . .	184
8.6.1	Lagrangeovské siete konečných prvkov . . . . .	184
8.6.2	Aktualizovaná lagrangeovská formulácia . . . . .	185
8.6.3	Totálna lagrangeovská formulácia . . . . .	189
8.7	Linearizácia podmienok rovnováhy . . . . .	192
<b>9</b>	<b>Dynamické namáhanie</b>	<b>195</b>
9.1	Pohybová rovnica . . . . .	195
9.2	Explicitná metóda . . . . .	198
9.3	Implicitná metóda . . . . .	202

9.4	Príklady aplikácií . . . . .	206
9.4.1	Použitie explicitnej metódy . . . . .	206
9.4.2	Použitie implicitnej metódy . . . . .	208
<b>10</b>	<b>Riešenie teplotných polí</b>	<b>211</b>
10.1	Základné rovnice . . . . .	211
10.2	Variačná formulácia . . . . .	214
10.3	Riešenie metódou konečných prvkov . . . . .	217
10.3.1	Rovnice pre určenie uzlových teplôt . . . . .	217
10.3.2	Riešenie rovníc . . . . .	220
10.4	Príklady aplikácií . . . . .	225
10.4.1	Teplotné pole pri oblúkovom zvaraní . . . . .	225
10.4.2	Simulácia skúšky tepelnej odolnosti . . . . .	229
<b>11</b>	<b>Metóda hraničných prvkov</b>	<b>233</b>
11.1	Úvod . . . . .	233
11.2	Jednorozmerné úlohy . . . . .	234
11.2.1	Prút . . . . .	234
11.2.2	Nosník . . . . .	237
11.3	Viacrozmerné úlohy . . . . .	243
11.3.1	Deformačný stav telesa . . . . .	243
11.3.2	Hraničné integrálne reprezentácie a rovnice . . . . .	246
11.3.3	Diskretizácia hraničnými prvkami . . . . .	250
11.3.4	Problém s neohraničeným telesom . . . . .	259
11.3.5	Okrajové úlohy s nejednoznačným riešením . . . . .	263
11.3.6	Symetrická Galerkinova metóda hraničných prvkov . . . . .	265
<b>12</b>	<b>Použitie metódy hraničných prvkov pre problémy s rozhraním</b>	<b>277</b>
12.1	Kontaktná úloha bez trenia . . . . .	277
12.1.1	Príklady . . . . .	282
12.2	Variačná formulácia pre úlohu s rozhraním . . . . .	290
12.2.1	Príklady . . . . .	298
<b>A</b>	<b>Numerická integrácia</b>	<b>307</b>
A.1	Newtonova-Cotesova kvadratura . . . . .	307
A.2	Gaussova kvadratura a ortogonálne polynómy . . . . .	308
A.2.1	Ortogonálne polynómy . . . . .	309
A.2.2	Gaussova kvadratura . . . . .	310

<b>B</b>	<b>Vektorový a tenzorový počet</b>	<b>313</b>
B.1	Vektory, tenzory, matice . . . . .	313
B.2	Vlastné čísla a invarianty tenzorov . . . . .	316
<b>C</b>	<b>Izotropný hyperelastický materiál</b>	<b>319</b>
C.1	Formulácia pomocou hlavných invariantov . . . . .	319
C.2	Formulácia pomocou hlavných natiahnutí . . . . .	320
C.3	Funkcia hustoty deformačnej energie . . . . .	320
<b>D</b>	<b>Singulárne integrály</b>	<b>323</b>
D.1	Singulárne integrály v 1D . . . . .	323
D.2	Niektoré iné singulárne integrály . . . . .	327
<b>E</b>	<b>Fundamentálne riešenia</b>	<b>331</b>
E.1	Využitie Fourierovej transformácie . . . . .	331
E.2	Využitie Airyho funkcie napätia . . . . .	335
	<b>Literatúra</b>	<b>339</b>
	<b>Register</b>	<b>351</b>

