TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH
STROJNÍCKA FAKULTA

MATEMATIKA 1
časť B
Neurčitý integrál. Algebra. Analytická geometria.

Dušan Knežo, Miriam Andrejiová, Zuzana Kimáková

2010

RECENZOVALI: prof. RNDr. Jozef Doboš, CSc.
RNDr. Ján Buša, CSc.

Predhovor

Tento učebný text je určený poslucháčom prvého ročníka bakalárskeho štúdia Strojníckej fakulty Technickej univerzity v Košiciach a tematicky je orientovaný na predmety Matematika a Matematika I. Rovnako dobre však môže poslúžiť poslucháčom Fakulty baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií a Hutníckej fakulty Technickej univerzity v Košiciach.

V učebnom texte sú uvedené podstatné teoretické poznatky potrebné ku riešeniu úloh, riešené príklady a úlohy na riešenie týkajúce sa integrálneho počtu funkcie jednej reálnej premennej (neurčitý integrál), lineárnej algebry a základov analytickej geometrie v priestore. Obsah je spolu učebným textom „MATEMATIKA 1, časť A" dostatočným základom pre štúdium a úspešné absolvovanie spomínaných predmetov.

Obom recenzentom prof. RNDr. Jozefovi Dobošovi, CSc. a RNDr. Jánovi Bušovi, CSc. ďakujeme za dôsledné posúdenie tejto učebnej pomôcky. Ich cenné pripomienky, rady a odporúčania prispeli ku zvýšeniu kvality tejto publikácie.

V Košiciach 16. 10. 2010 Autori

Obsah

Kapitola 1

Neurčitý integrál

1.1 Pojem primitívnej funkcie

Definícia 1. *Funkciu $F(x)$ nazývame primitívnou funkciou k funkcii $f(x)$ na intervale (a, b), ak pre všetky $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$.*

Veta 1. *Každá spojitá funkcia na intervale (a, b) má primitívnu funkciu.*

Veta 2. *Ak funkcia $F(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale (a, b) a c je ľubovoľná reálna konštanta, potom aj funkcia $F(x) + c$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale (a, b).*

Dôkaz. Platí

$$[F(x) + c]' = F'(x) = f(x), \quad \text{pre} \quad x \in (a, b)\,.$$

Z vety vyplýva, že ak k danej funkcii existuje primitívna funkcia, existuje ich nekonečne mnoho. Dá sa dokázať, že všetky primitívne funkcie sa dajú zapísať v tvare $F(x) + c$.

1.2 Neurčitý integrál. Základné vzorce

Množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii $f(x)$ na intervale (a, b) nazývame **neurčitý integrál** funkcie $f(x)$ na intervale (a, b) a označujeme ho

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,$$

kde $\int$ je znak integrálu, $f(x)$ je integrovaná funkcia (integrand), symbol $\mathrm{d}x$ označuje integračnú premennú x, $F(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ a c je integračná konštanta.

Poznámka 1. *Z definície primitívnej funkcie a neurčitého integrálu priamo vyplýva vzťah*

$$\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]' = f(x).$$

Poznámka 2. *Proces určenia primitívnej funkcie k danej funkcii nazývame integrovanie.*

Veta 3. *Ak k funkciám $f(x)$ a $g(x)$ existujú primitívne funkcie a $k \in R$, tak platí*

$$\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) dx + \int g(x) \, dx,$$

$$\int [f(x) - g(x)] \, dx = \int f(x) dx - \int g(x) \, dx,$$

$$\int [k \cdot f(x)] \, dx = k \cdot \int f(x) dx.$$

Základné vzorce integrovania

1. $\displaystyle\int dx = x + c,$
2. $\displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1,$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c,$
4. $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + c,$
5. $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \, a \neq 1,$
6. $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$
7. $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + c,$
8. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c,$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c,$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + c, \end{cases} \quad a > 0,$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c, \quad a > 0,$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + c, \\ -\arccos \frac{x}{a} + c, \end{cases} \quad a > 0,$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} \, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + c, \quad k \neq 0,$
14. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + c.$

Vzorce platia pre tie intervaly, ktoré sú podmnožinou prieniku definičných oborov integrovanej funkcie a príslušnej primitívnej funkcie. O správnosti vzorcov sa môžeme presvedčiť derivovaním.

1.3 Integrovanie rozkladom a úpravou

Pri integrovaní rozkladom a úpravou sa snažíme rozložiť integrovanú funkciu pomocou algebraických úprav a goniometrických vzťahov na súčet jednoduchších funkcií, ktoré potom integrujeme pomocou základných vzorcov.

Príklad 1. Vypočítajme $\int \left(5x^2 + 3 - \frac{2}{x^3}\right) \mathrm{d}x$.

Riešenie.

Pri výpočte integrálu použijeme vetu 3 a integračné vzorce 1 a 2. Platí

$$\int \left(5x^2 + 3 - \frac{2}{x^3}\right) \mathrm{d}x = 5\int x^2\,\mathrm{d}x + 3\int \mathrm{d}x - 2\int x^{-3}\,\mathrm{d}x = 5 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 3x - 2 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c =$$
$$= \frac{5}{3}x^3 + 3x + \frac{1}{x^2} + c.$$

Príklad 2. Vypočítajme $\int (\sin x + 4\cos x + 5^x)\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

Integrál rozložíme na súčet troch integrálov a použijeme integračné vzorce 6, 7 a 5. Platí

$$\int (\sin x + 4\cos x + 5^x)\,\mathrm{d}x = \int \sin x\,\mathrm{d}x + 4\int \cos x\,\mathrm{d}x + \int 5^x\,\mathrm{d}x = -\cos x + 4\sin x + \frac{5^x}{\ln 5} + c.$$

Príklad 3. Vypočítajme $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

Najprv upravíme integrand na tvar mocninovej funkcie a potom použijeme vzorec 2. Platí:

$$\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \int \left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \int \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c =$$
$$= \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + c.$$

Príklad 4. Vypočítajme $\int \frac{(2x-1)^2 - x^5}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

Funkciu je potrebné upraviť a následne integrovať podľa vzorcov 3 a 2.

$$\int \frac{(2x-1)^2 - x^5}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x^2 - 4x + 1 - x^5}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{4x^2}{x^3} - \frac{4x}{x^3} + \frac{1}{x^3} - \frac{x^5}{x^3}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(\frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} - x^2\right) \mathrm{d}x = 4\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - 4\int x^{-2}\,\mathrm{d}x + \int x^{-3}\,\mathrm{d}x - \int x^2\,\mathrm{d}x =$$
$$= 4\ln|x| - 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{x^3}{3} + c = 4\ln|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{x^3}{3} + c.$$

Príklad 5. Vypočítajme $\displaystyle\int e^x\left(5e^{-x}+2-\frac{6}{xe^x}\right)\mathrm{d}x.$

Riešenie.

Výraz pod integrálom roznásobíme a použijeme základné integračné vzorce 1, 4 a 3.

$$\int e^x\left(5e^{-x}+2-\frac{6}{xe^x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(5e^x\cdot e^{-x}+2e^x-e^x\cdot\frac{6}{xe^x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(5+2e^x-\frac{6}{x}\right)\mathrm{d}x=$$
$$=5\int\mathrm{d}x+2\int e^x\,\mathrm{d}x-6\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=5x+2e^x-6\ln|x|+c.$$

Príklad 6. Vypočítajme $\displaystyle\int\frac{x+1}{x-2}\,\mathrm{d}x.$

Riešenie.

Integrovanú funkciu upravíme vydelením čitateľa menovateľom. Dostaneme

$$\int\frac{x+1}{x-2}\,\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x+3\int\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x=x+3\ln|x-2|+c,$$

kde integrál $\displaystyle\int\frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x$ sme vypočítali pomocou vzorca $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\ln|f(x)|+c.$

Príklad 7. Vypočítajme $\displaystyle\int\frac{x^2}{x+3}\,\mathrm{d}x.$

Riešenie.

Integrovanú funkciu môžeme upraviť delením čitateľa menovateľom podobne ako v predchádzajúcom príklade. Túto úpravu však môžeme nahradiť pripočítaním a odpočítaním vhodného čísla v čitateli a ďalším rozkladom zlomku na také výrazy, ktoré sa dajú integrovať.

$$\int\frac{x^2}{x+3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+(-9+9)}{x+3}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x^2-9}{x+3}+\frac{9}{x+3}\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\int\left[\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}+\frac{9}{x+3}\right]\mathrm{d}x=\int\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-3x+9\ln|x+3|+c.$$

Príklad 8. Vypočítajme $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{3x^2-12}}\,\mathrm{d}x.$

Riešenie.

Po úprave integrovanej funkcie použijeme vzorec $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}\,\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+c.$

$$\int\frac{1}{\sqrt{3x^2-12}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{3(x^2-4)}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+c.$$

Príklad 9. Vypočítajme $\displaystyle\int \frac{5x^3}{x^4-3}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

Integrovanú funkciu upravíme tak, aby v čitateli bola derivácia menovateľa a potom použijeme vzorec $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$.

$$\int \frac{5x^3}{x^4-3}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{x^3}{x^4-3}\,\mathrm{d}x = \left[\text{derivácia menovateľa je } (x^4-3)' = 4x^3\right] = 5\cdot\frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{5}{4}\ln|x^4-3| + c.$$

Príklad 10. Vypočítajme $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\,x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

Pri úprave integrovanej funkcie použijeme goniometrické vzťahy:

$$\mathrm{tg}\,x = \tfrac{\sin x}{\cos x}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

$$\int \mathrm{tg}^2\,x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x - x + c.$$

Na záver uvedieme ďalšie, často používané goniometrické vzťahy:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \qquad \sin x = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \qquad \mathrm{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Úlohy

V úlohách 1.1 – 1.80 vypočítajte neurčitý integrál.

1.1 $\displaystyle\int (x+1)\,\mathrm{d}x$

1.2 $\displaystyle\int (3x^4 + 2x + 5 - 4x^3)\,\mathrm{d}x$

1.3 $\displaystyle\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

1.4 $\displaystyle\int \frac{x^2 + 6x - 5x^6}{3}\,\mathrm{d}x$

1.5 $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} + x^{-2} - \frac{3}{x^5}\right)\mathrm{d}x$

1.6 $\displaystyle\int \left(4\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2}\right)\mathrm{d}x$

1.7 $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$

1.8 $\displaystyle\int \left(\frac{3}{\sqrt[5]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}\right)\mathrm{d}x$

1.9 $\displaystyle\int \left(x - \frac{3}{x}\right)^2\mathrm{d}x$

1.10 $\displaystyle\int \left(1+\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x$

1.11 $\displaystyle\int x^2\left(\frac{3x}{2}-10\right)\mathrm{d}x$

1.12 $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\cdot\left(2-\frac{7}{x}\right)\mathrm{d}x$

1.13 $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

1.14 $\displaystyle\int \frac{10x^7-8}{x^3}\,\mathrm{d}x$

1.15 $\displaystyle\int \frac{3x^4+2x^2-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

1.16 $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$

1.17 $\displaystyle\int \frac{4-x^2}{2+x}\,\mathrm{d}x$

1.18 $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

1.19 $\displaystyle\int \frac{x^5-1}{x-1}\,\mathrm{d}x$

1.20 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+3x-2x^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

1.21 $\displaystyle\int \frac{2+\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$

1.22 $\displaystyle\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

1.23 $\displaystyle\int (e^x-3^x+e)\,\mathrm{d}x$

1.24 $\displaystyle\int e^x\left(5-\frac{3e^{-x}}{x^4}\right)\mathrm{d}x$

1.25 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+x^3e^x+x^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$

1.26 $\displaystyle\int 2^x(1+3x^2 2^{-x})\,\mathrm{d}x$

1.27 $\displaystyle\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}\,\mathrm{d}x$

1.28 $\displaystyle\int \frac{5^x+2^x}{10^x}\,\mathrm{d}x$

1.29 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}\mathrm{d}x$

1.30 $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sin^2 x}+\sqrt{3}\cos x\right)\mathrm{d}x$

1.31 $\displaystyle\int \frac{2\sin^2 x-5}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.32 $\displaystyle\int \frac{7-4\sin^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.33 $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x-\sin x\cos^2 x+1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.34 $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$

1.35 $\displaystyle\int (\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x)^2\,\mathrm{d}x$

1.36 $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

1.37 $\displaystyle\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

1.38 $\displaystyle\int \left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$

1.39 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.40 $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

1.41 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos 2x+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.42 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6}}\,\mathrm{d}x$

1.43 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,\mathrm{d}x$

1.44 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$

1.45 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{12-x^2}}\,\mathrm{d}x$

1.46 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,\mathrm{d}x$

1.47 $\displaystyle\int \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{9}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

1.48 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+16}\,\mathrm{d}x$

1.49 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3}}{x^2+10}\,\mathrm{d}x$

1.50 $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

1.51 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+16}\,\mathrm{d}x$

1.52 $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

1.53 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-16}\,\mathrm{d}x$

1.54 $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-6}\,\mathrm{d}x$

1.55 $\displaystyle\int \frac{4}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

1.56 $\displaystyle\int \frac{1}{5-x^2}\,\mathrm{d}x$

1.57 $\displaystyle\int \frac{1}{x+5}\,\mathrm{d}x$

1.58 $\displaystyle\int \frac{1}{2-5x}\,\mathrm{d}x$

1.59 $\displaystyle\int \frac{2}{3x+7}\,\mathrm{d}x$

1.60 $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+2}\,\mathrm{d}x$

1.61 $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x$

1.62 $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

1.63 $\displaystyle\int \frac{x+1}{4-2x-x^2}\,\mathrm{d}x$

1.64 $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

1.65 $\displaystyle\int \frac{x+4}{x-1}\,\mathrm{d}x$

1.66 $\displaystyle\int \frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x$

1.67 $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$

1.68 $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{x+2}\,\mathrm{d}x$

1.69 $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$

1.70 $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

1.71 $\displaystyle\int 2\operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$

1.72 $\displaystyle\int \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{cotg} x\right)\mathrm{d}x$

1.73 $\displaystyle\int \operatorname{cotg} 2x\,\mathrm{d}x$

1.74 $\displaystyle\int \frac{2\cos x}{4+\sin x}\,\mathrm{d}x$

1.75 $\displaystyle\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x$

1.76 $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x$

1.77 $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

1.78 $\displaystyle\int \frac{e^{4x}}{1-6\,e^{4x}}\,\mathrm{d}x$

1.79 $\displaystyle\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ **1.80** $\displaystyle\int \frac{3-2\operatorname{cotg}^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.4 Integrovanie substitučnou metódou

Jednou z dôležitých metód na výpočet neurčitých integrálov je substitučná metóda. Použitie substitučnej metódy má opodstatnenie v prípadoch, keď funkcia je zložitá a neexistuje na jej integrovanie žiaden vzorec. Integrovanie pomocou substitúcie spočíva v zjednodušení integrovaného výrazu zavedením novej premennej.

Veta 4. (Substitučná metóda)
Nech funkcia $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale $(\alpha,\ \beta)$. Nech funkcia $t=\varphi(x)$ má v intervale $(a,\ b)$ deriváciu $\varphi'(x)$. Nech pre každé $x\in(a,\ b)$ je $\varphi(x)\in(\alpha,\ \beta)$. Potom v intervale $(a,\ b)$ platí

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(\varphi(x)\big)+c.$$

Vzorec vo vete 4 používame nasledovne. Pretože $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale (α,β), tak

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+c.$$

Pre $x\in(a,b)$ a $t\in(\alpha,\beta)$ platí:

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{rcl}\varphi(x) &=& t\\ \varphi'(x)\,\mathrm{d}x &=& \mathrm{d}t\end{array}\right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)+c = F\big(\varphi(x)\big)+c.$$

Aký výraz volíme za novú premennú, závisí od tvaru funkcie. Často využívame podobnosť počítaného integrálu so základným integračným vzorcom alebo v prípade, že sa v integráli vyskytuje funkcia $f(x)$ a súčasne jej derivácia, volíme novú premennú $t=f(x)$ atď.

Príklad 1. Vypočítajme $\displaystyle\int \frac{1}{(3-7x)^5}\,\mathrm{d}x.$

Riešenie.

Integrál riešime pomocou substitúcie $3-7x=t$.

$$\int \frac{1}{(3-7x)^5}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r}3-7x=t\\ -7\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{7}\,\mathrm{d}t\end{array}\right| = -\frac{1}{7}\int t^{-5}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{7}\cdot\frac{t^{-4}}{-4}+c = \frac{1}{28(3-7x)^4}+c.$$

Príklad 2. Vypočítajme $\displaystyle\int x\,\cos x^2\,\mathrm{d}x.$

Riešenie.

$$\int x\,\cos x^2\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r}x^2=t\\ 2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\\ x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t\end{array}\right| = \int \cos t\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sin t+c = \frac{1}{2}\sin x^2+c.$$

Príklad 3. Vypočítajme $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} e^x = t \\ e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t + c = \operatorname{arctg} e^x + c.$$

Príklad 4. Vypočítajme $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+5}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x^3+5 = t \\ 3x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{2}{9}(x^3+5)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5} + c.$$

Príklad 5. Vypočítajme $\displaystyle\int \cos^2 x\,\sin x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

$$\int \cos^2 x\,\sin x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^2(-\mathrm{d}t) = -\int t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{t^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c.$$

Príklad 6. Vypočítajme $\displaystyle\int 3x\,\sqrt{x-5}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

$$\int 3x\,\sqrt{x-5}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x-5 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x = t+5 \end{array} \right| = \int 3(t+5)\cdot\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 3\int \left(t^{\frac{3}{2}} + 5t^{\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$= 3\left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 5\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + c = \frac{6}{5}\sqrt{t^5} + 10\sqrt{t^3} + c = \frac{6}{5}t^2\sqrt{t} + 10t\sqrt{t} + c = 2t\sqrt{t}\left(\frac{3}{5}t+5\right) + c =$$

$$= 2(x-5)\sqrt{x-5}\left[\frac{3}{5}(x-5)+5\right] + c = 2(x-5)\sqrt{x-5}\left(\frac{3}{5}x+2\right) + c.$$

Príklad 7. Vypočítajme $\displaystyle\int \frac{\ln x - 2}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

$$\int \frac{\ln x - 2}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{t-2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int \left(t^{\frac{1}{2}} - 2t^{-\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} - 4\sqrt{\ln x} + c.$$

Príklad 8. Vypočítajme $\displaystyle\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

Integrál rozdelíme na dva integrály $\displaystyle I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ a $\displaystyle I_2 = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

$$I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} 1-x^2 = t^2 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x = -t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \frac{t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int \mathrm{d}t = -t + c = -\sqrt{1-x^2} + c.$$

$$I_2 = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \arcsin x = z \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z \end{array} \right| = \int z\,\mathrm{d}z = \frac{z^2}{2} + c = \frac{\arcsin^2 x}{2} + c.$$

Výsledný integrál sa rovná súčtu výsledkov jednotlivých integrálov I_1, I_2:

$$\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin^2 x}{2} + c.$$

Úlohy

V úlohách 1.81 – 1.170 pomocou vhodnej substitúcie vypočítajte neurčitý integrál.

1.81 $\displaystyle\int (x+5)^{10}\,\mathrm{d}x$

1.82 $\displaystyle\int (4x-1)^3\,\mathrm{d}x$

1.83 $\displaystyle\int \frac{1}{(5x+4)^6}\,\mathrm{d}x$

1.84 $\displaystyle\int \frac{2}{(3x+1)^4}\,\mathrm{d}x$

1.85 $\displaystyle\int \sqrt{2x-3}\,\mathrm{d}x$

1.86 $\displaystyle\int \sqrt[4]{10-3x}\,\mathrm{d}x$

1.87 $\displaystyle\int \sqrt[3]{x+1}\,\mathrm{d}x$

1.88 $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt[3]{3-5x}}\,\mathrm{d}x$

1.89 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,\mathrm{d}x$

1.90 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{36-5x^2}}\,\mathrm{d}x$

1.91 $\displaystyle\int \frac{1}{25x^2+49}\,\mathrm{d}x$

1.92 $\displaystyle\int \sin 8x\,\mathrm{d}x$

1.93 $\displaystyle\int \cos 3x\,\mathrm{d}x$

1.94 $\displaystyle\int \sin\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$

1.95 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(3x+2)}\,\mathrm{d}x$

1.96 $\displaystyle\int \frac{2}{\cos^2(1-x)}\,\mathrm{d}x$

1.97 $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

1.98 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

1.99 $\int \frac{1}{x^2}\,\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

1.100 $\int \frac{1}{x^3}\,\sin\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

1.101 $\int x\,\cos(x^2+5)\,\mathrm{d}x$

1.102 $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}\,\mathrm{d}x$

1.103 $\int \frac{x}{5x^2+2}\,\mathrm{d}x$

1.104 $\int \frac{5x}{3x^2+6}\,\mathrm{d}x$

1.105 $\int \frac{x}{(x^2-5)^5}\,\mathrm{d}x$

1.106 $\int \frac{x}{(x^2+3)^6}\,\mathrm{d}x$

1.107 $\int \frac{x^2}{1-3x^3}\,\mathrm{d}x$

1.108 $\int \frac{2x^3}{10+x^4}\,\mathrm{d}x$

1.109 $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

1.110 $\int \frac{x^3}{x^8+1}\,\mathrm{d}x$

1.111 $\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

1.112 $\int e^{\frac{x}{4}}\,\mathrm{d}x$

1.113 $\int e^{3x+5}\,\mathrm{d}x$

1.114 $\int e^{\frac{2-3x}{4}}\,\mathrm{d}x$

1.115 $\int 5^{-3x}\,\mathrm{d}x$

1.116 $\int 2^{1+2x}\,\mathrm{d}x$

1.117 $\int \frac{3^x}{1+3^{2x}}\,\mathrm{d}x$

1.118 $\int x\,2^{x^2}\,\mathrm{d}x$

1.119 $\int x\,e^{-x^2}\mathrm{d}x$

1.120 $\int 2x^3\,e^{4-x^4}\,\mathrm{d}x$

1.121 $\int x\,10^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

1.122 $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

1.123 $\int \frac{e^x}{(3-2e^x)^2}\,\mathrm{d}x$

1.124 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

1.125 $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

1.126 $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}\,\mathrm{d}x$

1.127 $\int \frac{3\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x$

1.128 $\int \frac{2\sin x}{\sqrt[3]{\cos^5 x}}\,\mathrm{d}x$

1.129 $\int \cos x\,\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$

1.130 $\int \sin^2 x\,\cos x\,\mathrm{d}x$

1.131 $\int \sin x\,(\cos^3 x+1)\,\mathrm{d}x$

1.132 $\int (2+3\sin x)^4\,\cos x\,\mathrm{d}x$

1.133 $\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}\,\mathrm{d}x$

1.134 $\int \frac{\sin x}{(2-\cos x)^4}\,\mathrm{d}x$

1.135 $\displaystyle\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x$

1.136 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{4+\sin x}} \,\mathrm{d}x$

1.137 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+4}} \,\mathrm{d}x$

1.138 $\displaystyle\int \frac{2\sin x}{\sqrt{7+\cos^2 x}} \,\mathrm{d}x$

1.139 $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2} \,\mathrm{d}x$

1.140 $\displaystyle\int \operatorname{tg} 3x \,\mathrm{d}x$

1.141 $\displaystyle\int \operatorname{cotg}\frac{x}{3} \,\mathrm{d}x$

1.142 $\displaystyle\int \operatorname{tg}(4x+3) \,\mathrm{d}x$

1.143 $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$

1.144 $\displaystyle\int \frac{2-\sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x$

1.145 $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+5} \,\mathrm{d}x$

1.146 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x$

1.147 $\displaystyle\int x\sqrt{3x^2+4} \,\mathrm{d}x$

1.148 $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{x+1} \,\mathrm{d}x$

1.149 $\displaystyle\int x\sqrt[3]{2x^2+3} \,\mathrm{d}x$

1.150 $\displaystyle\int \frac{2x-5}{\sqrt{3+x^2}} \,\mathrm{d}x$

1.151 $\displaystyle\int x\sqrt{x+7} \,\mathrm{d}x$

1.152 $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+1} \,\mathrm{d}x$

1.153 $\displaystyle\int (x+2)\sqrt{x-3} \,\mathrm{d}x$

1.154 $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x} \,\mathrm{d}x$

1.155 $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x+1}} \,\mathrm{d}x$

1.156 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \,\mathrm{d}x$

1.157 $\displaystyle\int \sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x}+1} \,\mathrm{d}x$

1.158 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$

1.159 $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$

1.160 $\displaystyle\int \frac{2}{x\ln^2 x} \,\mathrm{d}x$

1.161 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} \,\mathrm{d}x$

1.162 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\,(4+\ln^2 x)} \,\mathrm{d}x$

1.163 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\,(1-\ln^2 x)} \,\mathrm{d}x$

1.164 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}} \,\mathrm{d}x$

1.165 $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}} \,\mathrm{d}x$

1.166 $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$

1.167 $\displaystyle\int \frac{e^{\arcsin x}+x+1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$

1.168 $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

1.169 $\displaystyle\int \frac{2x\,\ln(x^2+1)}{x^2+1} \,\mathrm{d}x$

1.170 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})}} \,\mathrm{d}x$

1.5 Integrovanie metódou per partes

Veta 5. (Metóda per partes)
Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú na intervale $(a,\, b)$ derivácie $f'(x)$ a $g'(x)$. Nech funkcia $f(x)g'(x)$ má primitívnu funkciu na intervale $(a,\, b)$. Potom platí

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

pre každé $x \in (a,\, b)$.

Dôkaz. Zo vzorca pre deriváciu súčinu dvoch funkcií platí

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$f(x)g(x)' = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x),$$

odkiaľ integrovaním dostaneme

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka 3. *Výhodou integrovania metódou per partes (po častiach) je to, že namiesto integrálu $\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$ počítame integrál $\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$, ktorý môže byť jednoduchší ako pôvodný integrál.*

Poznámka 4. *Metódu per partes možno viackrát zopakovať.*

Poznámka 5. *Integrály typu $\int P_n(x)\cdot e^{ax+b}\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\cdot\cos(ax+b)\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\cdot\sin(ax+b)\,\mathrm{d}x$ môžeme počítať metódou per partes tak, že $P_n(x)$ volíme za nederivovanú funkciu. V integráloch typu $\int P_n(x)\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\cdot\arcsin x\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\cdot\arccos x\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\cdot\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\cdot\mathrm{arccotg}\,x\,\mathrm{d}x$ polynóm $P_n(x)$ volíme za derivovanú funkciu.*

Príklad 1. Vypočítajme $\displaystyle\int (x+2)\cos x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

Pri výpočte integrálu použijeme metódu per partes. Za funkciu $f(x)$ zvolíme $(x+2)$. Platí

$$\int (x+2)\cos x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} f(x) = x+2, & g'(x) = \cos x \\ f'(x) = 1, & g(x) = \sin x \end{array}\right| = (x+2)\sin x - \int 1\cdot\sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= (x+2)\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = (x+2)\sin x - (-\cos x) + c = (x+2)\sin x + \cos x + c.$$

Príklad 2. Vypočítajme $\displaystyle\int 4x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

Integrál riešime metódou per partes, pričom za funkciu $f(x)$ zvolíme $4x^2$. Platí

$$\int 4x^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f(x) = 4x^2, & g'(x) = e^{2x} \\ f'(x) = 8x, & g(x) = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right| = 4x^2\,\frac{e^{2x}}{2} - \int 8x \cdot \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2x^2\,e^{2x} - \int 4x \cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x = [\text{integrujeme ešte raz metódou per partes}] =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} f(x) = 4x, & g'(x) = e^{2x} \\ f'(x) = 4, & g(x) = \frac{e^{2x}}{2} \end{array} \right| = 2x^2e^{2x} - \left[4x\,\frac{e^{2x}}{2} - \int 4\,\frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x \right] = 2x^2e^{2x} - 2xe^{2x} + 2\int e^{2x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2x^2e^{2x} - 2xe^{2x} + e^{2x} + c.$$

Príklad 3. Vypočítajme $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

Riešenie.

Integrovanú funkciu napíšeme ako súčin dvoch funkcií a za funkciu $f(x)$ zvolíme funkciu $\ln x$. Platí

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x, & g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \\ f'(x) = \frac{1}{x}, & g(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} \end{array} \right| =$$

$$= 2\sqrt{x}\,\ln x - \int \frac{1}{x}\,2\,\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2\,\sqrt{x}\,\ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\,\sqrt{x}\,\ln x - 2\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\,\sqrt{x}\,\ln x - 4\,\sqrt{x} + c.$$

Príklad 4. Vypočítajme $\displaystyle\int \arcsin x\,\mathrm{d}x.$

Riešenie.

Integrovanú funkciu napíšeme ako súčin jednotky a pôvodnej funkcie a za funkciu $f(x)$ zvolíme $\arcsin x$.

$$\int \arcsin x\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arcsin x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \arcsin x, & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & g(x) = x \end{array} \right| =$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = [\text{integrál vypočítame substitučnou metódou }] =$$

$$= \left| \begin{array}{r} 1 - x^2 = t^2 \\ -2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x = -t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = x \arcsin x + \int \frac{t}{t}\,\mathrm{d}t = x \arcsin x + \int \mathrm{d}t =$$

$$= x \arcsin x + t + c = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Príklad 5. Vypočítajme $\displaystyle\int \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$

Riešenie.

Funkcia je v tvare zlomku. Zapíšeme ju ako súčin dvoch funkcií a použijeme metódu per partes.

$$\int \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int x\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} f(x)=x, & g'(x)=\frac{1}{\sin^2 x} \\ f'(x)=1, & g(x)=-\operatorname{cotg} x\end{array}\right| =$$

$$= -x\operatorname{cotg} x - \int 1\cdot(-\operatorname{cotg} x)\,\mathrm{d}x = -x\operatorname{cotg} x + \int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x = -x\operatorname{cotg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -x\operatorname{cotg} x + \ln|\sin x| + c.$$

Integrál $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ môžeme vypočítať pomocou vzorca $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$. Platí

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \left[\ f(x) = \sin x,\quad f'(x) = \cos x\ \right] = \ln|\sin x| + c.$$

Príklad 6. Vypočítajme $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

Analogicky ako v príklade 5, funkciu zapíšeme v tvare súčinu a integrujeme metódou per partes.

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int \arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} f(x)=\arcsin x, & g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}} \\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & g(x)=2\sqrt{1+x}\end{array}\right| =$$

$$= 2\sqrt{1+x}\,\arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot 2\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{1+x}\,\arcsin x - 2\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\sqrt{1+x}\,\arcsin x - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{1+x}\,\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + c.$$

Integrál $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ vypočítame pomocou substitúcie $1+x=t$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ a teda

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{t} + c = 2\sqrt{1+x} + c.$$

Integrál $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$ počítame podobne, použijeme substitúciu $1-x=t$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Príklad 7. Vypočítajme $\displaystyle\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie.

Pri výpočte integrálu použijeme dvakrát metódu per partes.

$$\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} f(x)=e^{2x}, & g'(x)=\cos x \\ f'(x)=2e^{2x}, & g(x)=\sin x\end{array}\right| = e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} f(x)=e^{2x}, & g'(x)=\sin x \\ f'(x)=2e^{2x}, & g(x)=-\cos x\end{array}\right| = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Ak označíme $I = \int e^{2x} \cos x \,\mathrm{d}x$, potom dostaneme

$$I = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4\,I.$$

Odtiaľ

$$5\,I = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x$$

$$I = \int e^{2x} \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left(e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x\right) + c.$$

Úlohy

V úlohách 1.171– 1.230 vypočítajte metódou per partes neurčitý integrál

1.171 $\int x\, e^{x} \,\mathrm{d}x$

1.172 $\int (2x+3)\, e^{x} \,\mathrm{d}x$

1.173 $\int x\, e^{-4x} \,\mathrm{d}x$

1.174 $\int x\, e^{\frac{x}{4}} \,\mathrm{d}x$

1.175 $\int 9x\, e^{3x} \,\mathrm{d}x$

1.176 $\int (1-x)\, e^{2x} \,\mathrm{d}x$

1.177 $\int 3x\, e^{1+3x} \,\mathrm{d}x$

1.178 $\int (4+x)\, 3^{x} \,\mathrm{d}x$

1.179 $\int (2x-3)\, 5^{x} \,\mathrm{d}x$

1.180 $\int x\, \sin x \,\mathrm{d}x$

1.181 $\int (x+4)\, \sin x \,\mathrm{d}x$

1.182 $\int x\, \sin \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x$

1.183 $\int (2x+1)\, \cos x \,\mathrm{d}x$

1.184 $\int (25x+10)\, \sin 5x \,\mathrm{d}x$

1.185 $\int x\, \cos 3x \,\mathrm{d}x$

1.186 $\int x\, \sin^2 \frac{x}{2} \,\mathrm{d}x$

1.187 $\int x\, \mathrm{tg}^2\, x \,\mathrm{d}x$

1.188 $\int \cos \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$

1.189 $\int e^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

1.190 $\int x^2\, e^{x} \,\mathrm{d}x$

1.191 $\int \frac{x^2}{e^x} \,\mathrm{d}x$

1.192 $\int (x^2+1)\, e^{-x} \,\mathrm{d}x$

1.193 $\int (2x-x^2)\, e^{x} \,\mathrm{d}x$

1.194 $\int x^2\, e^{x+1} \,\mathrm{d}x$

1.195 $\int (x^2-1)\, e^{\frac{x}{3}} \,\mathrm{d}x$

1.196 $\int x^2\, e^{-4x} \,\mathrm{d}x$

1.197 $\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$

1.198 $\int x^2 \sin 2x \, \mathrm{d}x$

1.199 $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

1.200 $\int \ln(x+1) \, \mathrm{d}x$

1.201 $\int \ln(x^2+1) \, \mathrm{d}x$

1.202 $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$

1.203 $\int (x+1) \ln 2x \, \mathrm{d}x$

1.204 $\int (x^2+1) \ln x \, \mathrm{d}x$

1.205 $\int x^3 \ln x \, \mathrm{d}x$

1.206 $\int \sqrt{x} \ln x \, \mathrm{d}x$

1.207 $\int \frac{\ln x}{x^2} \, \mathrm{d}x$

1.208 $\int \frac{1 - \ln x}{x^2} \, \mathrm{d}x$

1.209 $\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$

1.210 $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$

1.211 $\int x \operatorname{arccotg} x \, \mathrm{d}x$

1.212 $\int (2x+2) \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$

1.213 $\int x^2 \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$

1.214 $\int x \operatorname{arctg}^2 x \, \mathrm{d}x$

1.215 $\int \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1} \, \mathrm{d}x$

1.216 $\int \arccos x \, \mathrm{d}x$

1.217 $\int \arcsin \frac{x}{3} \, \mathrm{d}x$

1.218 $\int \arcsin^2 x \, \mathrm{d}x$

1.219 $\int \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

1.220 $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$

1.221 $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} \, \mathrm{d}x$

1.222 $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$

1.223 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}x$

1.224 $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} \, \mathrm{d}x$

1.225 $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$

1.226 $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$

1.227 $\int \frac{\sin x}{e^x} \, \mathrm{d}x$

1.228 $\int (e^x - \cos x)^2 \, \mathrm{d}x$

1.229 $\int \cos(\ln x) \, \mathrm{d}x$

1.230 $\int \sqrt{16 - x^2} \, \mathrm{d}x$