TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH

STROJNÍCKA FAKULTA

MATEMATIKA 1
časť A
Funkcia jednej premennej a jej diferenciálny počet

Dušan Knežo, Miriam Andrejiová, Zuzana Kimáková

2010

RECENZOVALI: prof. RNDr. Jozef Doboš, CSc.
RNDr. Ján Buša, CSc.

Predhovor

Tento učebný text je určený poslucháčom prvého ročníka bakalárskeho štúdia Strojníckej fakulty Technickej univerzity v Košiciach a tematicky je orientovaný na predmety Matematika a Matematika I. Rovnako dobre však môže poslúžiť poslucháčom Fakulty baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií a Hutníckej fakulty Technickej univerzity v Košiciach.

V učebnom texte sú uvedené podstatné teoretické poznatky potrebné ku riešeniu úloh, riešené príklady a úlohy na riešenie týkajúce sa funkcie jednej reálnej premennej a jej diferenciálneho počtu. Obsah je spolu učebným textom „MATEMATIKA 1, časť B“ dostatočným základom pre štúdium a úspešné absolvovanie spomínaných predmetov.

Obom recenzentom prof. RNDr. Jozefovi Dobošovi, CSc. a RNDr. Jánovi Bušovi, CSc. ďakujeme za dôsledné posúdenie tejto učebnej pomôcky. Ich cenné pripomienky, rady a odporúčania prispeli ku zvýšeniu kvality tejto publikácie.

V Košiciach 16. 10. 2010 Autori

Obsah

Kapitola 1

Funkcia jednej premennej

1.1 Pojem funkcie

Definícia 1. *Nech M a P sú neprázdne podmnožiny množiny reálnych čísel $\mathbb{R}$. Hovoríme, že na množine M je definovaná* **funkcia** *f, ak je daný predpis, podľa ktorého je každému prvku z množiny M priradený jeden prvok z množiny P.*

Množinu M nazývame **definičným oborom** funkcie f a budeme ju označovať D_f. Množinu všetkých tých prvkov z P, ktoré sú funkciou f priradené nejakému prvku z M, nazývame **oborom hodnôt** funkcie f a budeme ju označovať H_f. Ak funkcia f priradzuje prvku $x \in D_f$ prvok y, zapisujeme to

$$y = f(x), \tag{1.1}$$

pričom číslo y resp. $f(x)$ nazývame hodnotou funkcie f v bode (čísle) x. Vo vzťahu (1.1) znak x nazývame **argumentom funkcie** alebo **nezávislou premennou**, znak y nazývame **závislou premennou**.

Funkcia f môže byť daná niekoľkými spôsobmi:

a) pomocou formálneho matematického zápisu rovnicou $y = f(x)$[1],

b) tabuľkou,

c) slovným vyjadrením,

d) graficky.

Grafom funkcie $f(x)$ je mnnožina všetkých bodov $[x, y]$ v rovine, ktoré majú nasledujúce vlastnosti:

1. x je z definičného oboru funkcie $f(x)$, t. j. $x \in D_f$,
2. y je hodnota funkcie $f(x)$ v bode x, t. j. $y = f(x)$.

Niekedy uvažujeme funkciu len na časti jej definičného oboru[2]. Vtedy hovoríme o tzv. parciálnej funkcii. Rozumieme tým nasledovné: Nech f je funkcia s definičným oborom D_f a $M_1 \subset D_f$. Hovoríme, že funkcia g je **parciálna funkcia** z f na M_1, ak $D_g = M_1$ a pre každé $x \in D_g$ platí $g(x) = f(x)$. Napríklad funkcia definovaná na $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ rovnicou $y = \sin x$ je parciálnou funkciou

[1] Kvôli stručnosti budeme namiesto „funkcia f s nezávislou premennou x“ hovoriť iba „funkcia $f(x)$“.

[2] Napríklad vtedy, ak funkcia nemá požadovanú vlastnosť na celom definičnom obore, ale na nejakej jeho časti ju má.

z funkcie danej rovnicou $y = \sin x$ (ktorej definičný obor je $\mathbb{R}$).

Postup pri určovaní definičného oboru:

Na určenie definičného oboru funkcie $f(x)$ je potrebné poznať definičné obory a vlastnosti elementárnych funkcií. Najčastejšie je potrebné vedieť, že:

- menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule,
- výraz pod párnou odmocninou musí byť nezáporný,
- logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argument,
- ak $a > 1$, potom $\log_a x > 0$ práve vtedy, ak $x > 1$,
- ak $0 < a < 1$, potom $\log_a x > 0$ práve vtedy, ak $0 < x < 1$,
- funkcie $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ sú definované pre $-1 \leq x \leq 1$.

Zapamätajme si:

$$\boxed{\begin{array}{c}
\frac{1}{\heartsuit} \quad \Rightarrow \quad \heartsuit \neq 0 \\[2ex]
\sqrt[2n]{\heartsuit} \quad \Rightarrow \quad \heartsuit \geq 0,\ n \in N \\[2ex]
\log_a \heartsuit \quad \Rightarrow \quad \heartsuit > 0,\ a > 0,\ a \neq 1 \\[2ex]
a > 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a \heartsuit > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \heartsuit > 1 \\[2ex]
0 < a < 1 \quad \Rightarrow \quad \log_a \heartsuit > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \heartsuit < 1 \\[2ex]
y = \arcsin \heartsuit \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \heartsuit \leq 1 \\[2ex]
y = \arccos \heartsuit \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \heartsuit \leq 1
\end{array}}$$

Príklad 1. Určme definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{x+3} + \ln(3 - 2x) + \dfrac{1}{x^2 - x}$.

Riešenie.

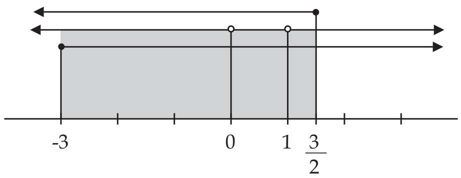
Vzhľadom na uvedené podmienky musí platiť

$$x + 3 \geq 0 \quad \wedge \quad 3 - 2x > 0 \quad \wedge \quad x^2 - x \neq 0.$$

Riešime sústavu nerovníc:

$$\begin{aligned}
x + 3 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \geq -3 \\
3 - 2x > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x < \tfrac{3}{2} \\
x^2 - x \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1.
\end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že definičný obor funkcie $f(x)$ je $D_f = \langle -3, 0) \cup (0, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$.



Definičný obor funkcie

Príklad 2. Určme definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$.

Riešenie.

Pod párnou odmocninou musí byť výraz nezáporný a menovateľ zlomku má byť rôzny od nuly, t. j. $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 5x + 6 \neq 0$. Teda

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) > 0.$$

Nerovnicu môžeme riešiť pomocou nulových bodov. Výraz $x^2 - 5x + 6$ nadobúda hodnotu 0 pre $x = 2, x = 3$. Tieto dva body rozdelia množinu $\mathbb{R}$ na tri intervaly, ktoré zapíšeme do tabuľky:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, \infty)$
$x^2 - 5x + 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

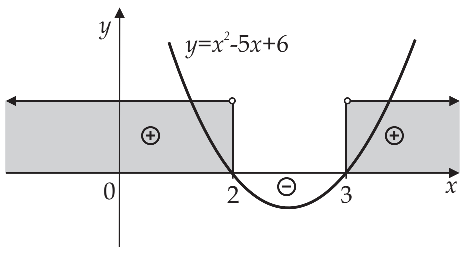
Dosadením ľubovoľných čísel z jednotlivých intervalov zistíme, kedy výraz $x^2 - 5x + 6$ nadobúda kladné a kedy záporné hodnoty:

$(-\infty, 2)$: $x = -3 \Rightarrow f(-3) = (-3)^2 - 5(-3) + 6 = 30 > 0$,
$(2, 3)$: $x = 2{,}5 \Rightarrow f(2{,}5) = (2{,}5)^2 - 5(2{,}5) + 6 = -0{,}25 < 0$,
$(3, \infty)$: $x = 4 \Rightarrow f(4) = (4)^2 - 5(4) + 6 = 2 > 0$.

Z tabuľky vyplýva, že definičný obor funkcie $f(x)$ je

$$D_f = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)\,.$$

Nerovnicu môžeme riešiť aj graficky. Grafom funkcie $y = x^2 - 5x + 6$ je parabola, ktorá pretína x-ovú os v bodoch $x = 2$, $x = 3$. Riešením nerovnice sú tie čísla, pre ktoré je graf funkcie nad osou o_x.



Definičný obor funkcie

Príklad 3. Určme definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{\frac{7-x}{x+2} - 2}$.

Riešenie.

Pre výraz pod párnou odmocninou musí platiť $\frac{7-x}{x+2} - 2 \geq 0$ a menovateľ zlomku má byť rôzny od nuly, t. j. $x \neq -2$. Riešime nerovnicu s neznámou v menovateli:

$$\frac{7-x}{x+2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+3}{x+2} \geq 0.$$

Nulové body sú $x = -2$, $x = 1$.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, \infty)$
$\frac{-3x+3}{x+2}$	$-$	$\times$	$+$	0	$-$

Definičný obor funkcie $f(x)$ je

$$D_f = (-2, 1\rangle\,.$$

Príklad 4. Určme definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{\log_{0,1}(2x+1)}$.

Riešenie.

Z podmienok pre výraz pod párnou odmocninou a pre argument logaritmu pri základe $a = 0{,}1$ vyplýva

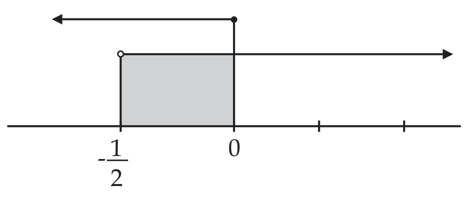
$$\log_{0,1}(2x+1) \geq 0 \quad \wedge \quad 2x+1 > 0.$$

Platí

$$\begin{aligned} \log_{0,1}(2x+1) &\geq 0 \\ \log_{0,1}(2x+1) &\geq \log_{0,1} 1 \\ 2x+1 &\leq 1. \end{aligned}$$

Riešime sústavu nerovníc:

$$\begin{aligned} 2x+1 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x > -\tfrac{1}{2} \\ 2x+1 \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq 0. \end{aligned}$$



Definičný obor funkcie

Definičný obor funkcie $f(x)$ je

$$D_f = \left(-\frac{1}{2}, 0\right\rangle.$$

Príklad 5. Určme definičný obor funkcie $f(x) = \arcsin \dfrac{2-3x}{4}$.

Riešenie.

Funkcia $y = \arcsin x$ je definovaná pre $-1 \leq x \leq 1$. Platí

$$
\begin{aligned}
-1 \leq \frac{2-3x}{4} &\leq 1 \quad / \cdot 4 \\
-4 \leq 2 - 3x \leq 4 &\quad / - 2 \\
-6 \leq -3x \leq 2 &\quad / : (-3) \\
2 \geq x &\geq -\frac{2}{3} \\
-\frac{2}{3} \leq x &\leq 2
\end{aligned}
$$

Definičný obor funkcie $f(x)$ je

$$D_f = \left\langle -\frac{2}{3}, 2 \right\rangle.$$

Príklad 6. Určme definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{25 - x^2}$.

Riešenie.

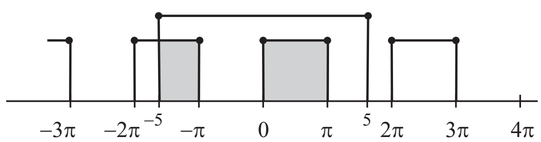
Z podmienok vyplýva

$$\sin x \geq 0 \quad \wedge \quad 25 - x^2 \geq 0.$$

Riešime podmienky:

$$\sin x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle\,,\; k \in \mathbb{Z},$$

$$25 - x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 25 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -5, 5 \rangle\,.$$



Definičný obor funkcie

Ak zoberieme do úvahy to, že $\pi = 3{,}1415926\ldots$, potom definičný obor funkcie $f(x)$ je

$$D_f = \langle -5, -\pi \rangle \cup \langle 0, \pi \rangle\,.$$

Úlohy

V úlohách 1.1 – 1.90 nájdite definičný obor.

1.1 $f(x) = \dfrac{3x+5}{7} + x^2$

1.2 $f(x) = \dfrac{1}{3x+5} + \dfrac{1}{1-2x}$

1.3 $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2-1}$

1.4 $f(x) = \dfrac{x^3-1}{2x^2+3x-9}$

1.5 $f(x) = \dfrac{1}{x+2} + \sqrt{3-x}$

1.6 $f(x) = \log_3(2x-1)$

1.7 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}} + \ln x$

1.8 $f(x) = \sqrt{1-|x|}$

1.9 $f(x) = \sqrt{x} - \ln(2x-3) + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$

1.10 $f(x) = \sqrt{1-x} + \log_3(x+1)$

1.11 $f(x) = \dfrac{2x}{\log(x+5)} - \dfrac{4}{x} + e^x$

1.12 $f(x) = \dfrac{5x-1}{\log_{0,5}(2x+1)} + \sqrt{3-x}$

1.13 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{\ln(9-x)}$

1.14 $f(x) = \dfrac{\ln(3-2x)}{\sqrt{x}}$

1.15 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{12-x-x^2}$

1.16 $f(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{1+2x}}$

1.17 $f(x) = \dfrac{2x}{x^3+8x^2+15x} + \sqrt{-x-4}$

1.18 $f(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{5+x}$

1.19 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-4x}} + \sqrt{4x+9}$

1.20 $f(x) = \sqrt{x^2-3x-4}$

1.21 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x^2-4}$

1.22 $f(x) = \dfrac{3-x^2}{\sqrt{x^2+9}}$

1.23 $f(x) = \sqrt{-2x^2+3x+2} + \sqrt[3]{x}$

1.24 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x-21}} + \dfrac{3}{x-8}$

1.25 $f(x) = \sqrt{-x^2+5x+14} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

1.26 $f(x) = \log_2(x^2-4x+4)$

1.27 $f(x) = \log(x^2-1) + \dfrac{3x}{x^2-4}$

1.28 $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-3x)}{x+5}$

1.29 $f(x) = \dfrac{3}{16-x^2} + \log(x^3-x)$

1.30 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2-4x+1}}$

1.31 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2x^2-5x-3}}$

1.32 $f(x) = \sqrt{x^2+4x-5} \cdot \ln(x+5)$

1.33 $f(x) = \log_4(2x+7) + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$

1.34 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-2x}} + \log(x^2-4x-5)$

1.35 $f(x) = \dfrac{2-3\log_5(2x-3)}{\sqrt{1-x}}$

1.36 $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2-6x+9}\right)$

1.37 $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1-4x^2)}$

1.38 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\ln(2x-4)}$

1.39 $f(x) = \dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{x^2+x+6}}$

1.40 $f(x) = \dfrac{\log_3(3-2x-x^2)}{\sqrt{x}-1}$

1.41 $f(x) = \log(x^2-4) + \dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$

1.42 $f(x) = \dfrac{\log(x^2+5x+6)}{\sqrt{x}}$

1.43 $f(x) = \dfrac{x+1}{\log_2(3x-5)} + \sqrt{1-x^2}$

1.44 $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x^2+9x+10}}{1-\log x}$

1.45 $f(x) = \sqrt{4x-x^3}$

1.46 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8-x^3}}$

1.47 $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+2}{x-3}}$

1.48 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-16}{x+2}}$

1.49 $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

1.50 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}} + \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

1.51 $f(x) = \dfrac{1}{2^x-8} + \sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$

1.52 $f(x) = \sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}$

1.53 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-3x-4}{2+x-x^2}}$

1.54 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+x-6}{x+1}}$

1.55 $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x-4}\right)$

1.56 $f(x) = \log_3\left(\dfrac{1-x}{2x+1}\right)$

1.57 $f(x) = \log\left(\dfrac{2}{5+x}-1\right)$

1.58 $f(x) = \log\dfrac{x^2+6}{x^2+3}$

1.59 $f(x) = \log_2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$

1.60 $f(x) = \log(\log x) + \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$

1.61 $f(x) = \sqrt{1-\log x}$

1.62 $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{1-\log_2 x}}$

1.63 $f(x) = \ln\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)$

1.64 $f(x) = \log_3(\ln x - 1)$

1.65 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-x}}{e^x-1}$

1.66 $f(x) = \sqrt{3^x-9}$

1.67 $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{x-1}$

1.68 $f(x) = \log(3^x-27)$

1.69 $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x-2}$

1.70 $f(x) = \sqrt{\log_4(1+5x)}$

1.71 $f(x) = \sqrt{\log_{0,3}(4-2x)}$

1.72 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\log_{0,1}(2x+4)}}$

1.73 $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\ln(3+5x)}}$

1.74 $f(x) = \sqrt{1-\log(x-1)} + \sqrt{\dfrac{4-x}{x+2}}$

1.75 $f(x) = \sqrt{\log\left(\dfrac{x^2-2x}{3}\right)}$

1.76 $f(x) = \sqrt{\log_3\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}$

1.77 $f(x) = \sqrt{\log_{0,4}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)}$

1.78 $f(x) = \sqrt{\log(\cos x)}$

1.79 $f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{4-x^2}$

1.80 $f(x) = \arccos(x+1)$

1.81 $f(x) = 3\arcsin(1-2x)$

1.82 $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x+1}{2}\right) + \dfrac{1+x}{\sqrt{1-3x}}$

1.83 $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x-3}{2}\right) + \ln(3-x)$

1.84 $f(x) = \arccos\left(\dfrac{3-2x}{15}\right) + \sqrt{x^2-2x-35}$

1.85 $f(x) = \sqrt{4-x^2} - 2\arccos\left(\dfrac{2x+5}{3}\right)$

1.86 $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-2x}{4}\right) + \dfrac{1}{\ln x}$

1.87 $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{3+2x}{2}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$

1.88 $f(x) = \log(2x^2+4x-6) + \arcsin\dfrac{x}{2}$

1.89 $f(x) = \arccos(x-1) + \dfrac{3x}{\ln(x-1)}$

1.90 $f(x) = \arcsin\dfrac{4}{x}$

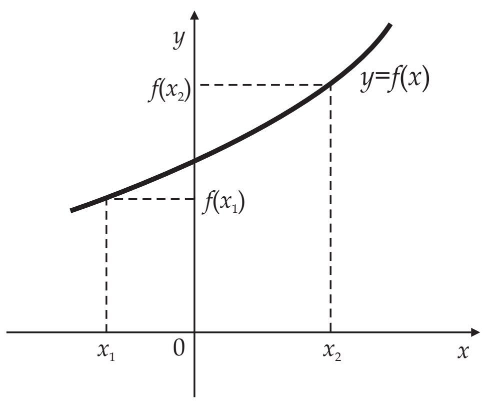
1.2 Základné vlastnosti funkcie

1.2.1 Monotónnosť funkcie

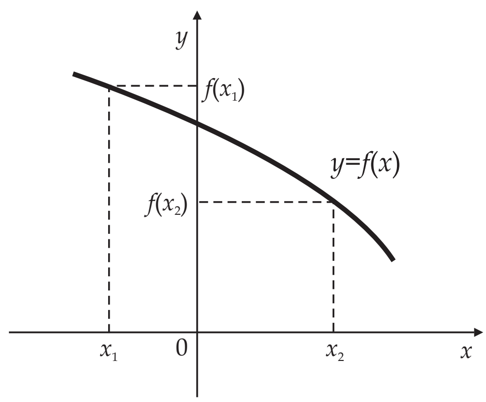
Funkcia $f(x)$ sa nazýva **rastúca (klesajúca)** na množine M_1, $M_1 \subset D_f$, ak pre každé $x_1, x_2 \in M_1$ také, že $x_1 < x_2$, platí

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \Big(f(x_1) > f(x_2)\Big).$$

Ak $M_1 = D_f$ hovoríme, že funkcia $f(x)$ je **rastúca (klesajúca)**.



Rastúca funkcia

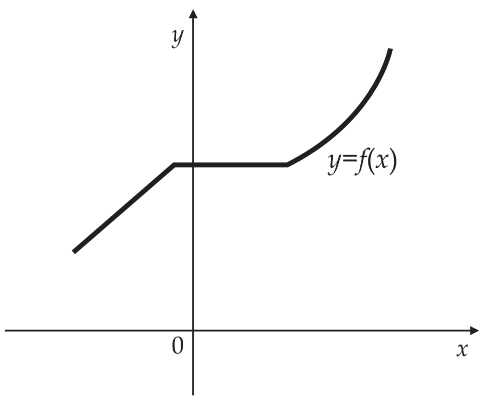


Klesajúca funkcia

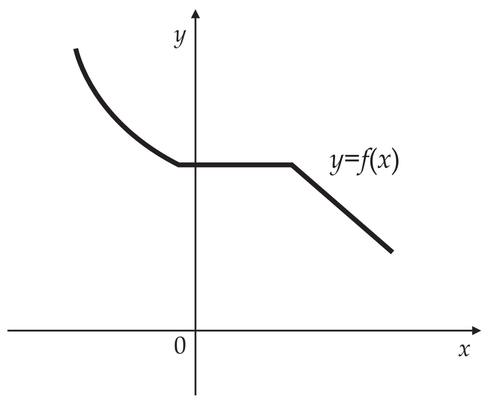
Funkcia $f(x)$ sa nazýva **neklesajúca (nerastúca)** na množine M_1, $M_1 \subset D_f$, ak pre každé $x_1, x_2 \in M_1$ také, že $x_1 < x_2$, platí

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \Big(f(x_1) \geq f(x_2)\Big).$$

Ak $M_1 = D_f$ hovoríme, že funkcia $f(x)$ je **neklesajúca (nerastúca)**. Každú neklesajúcu a každú nerastúcu funkciu nazývame **monotónnou**. Každú rastúcu a každú klesajúcu funkciu nazývame **rýdzomonotónnou**.



Neklesajúca funkcia

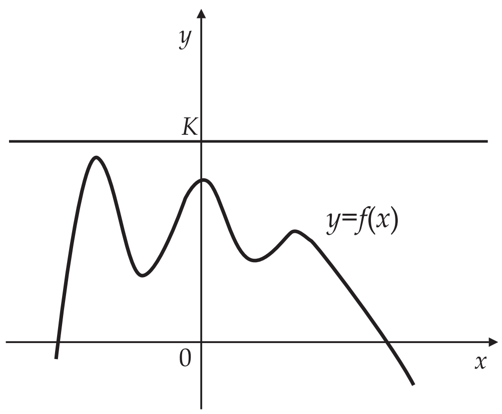


Nerastúca funkcia

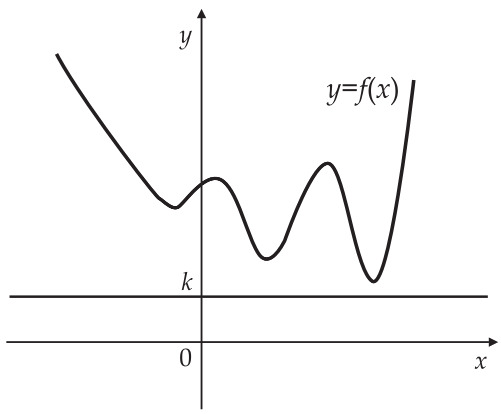
1.2.2 Ohraničenosť funkcie

Funkcia $f(x)$ je **zhora (zdola) ohraničená** na množine M_1, $M_1 \subset D_f$ práve vtedy, ak existuje také reálne číslo K, (resp. k), že pre každé $x \in M_1$ platí $f(x) \leq K$ $(f(x) \geq k)$.

Funkcia je **ohraničená** na množine M_1, ak je zhora i zdola ohraničená na množine M_1.



Funkcia ohraničená zhora



Funkcia ohraničená zdola

1.2.3 Párna a nepárna funkcia

Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je **párna**, ak

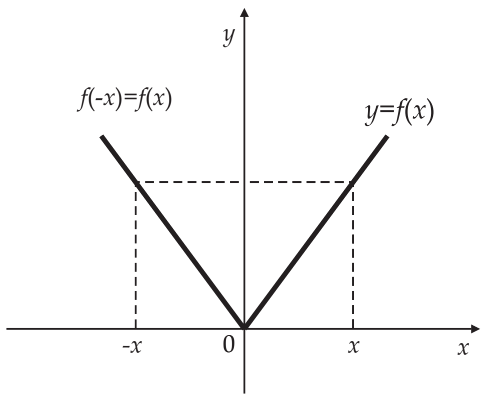
1. pre $\forall x \in D_f$ je $(-x) \in D_f$,

2. pre $\forall x \in D_f$ je $f(-x) = f(x)$.

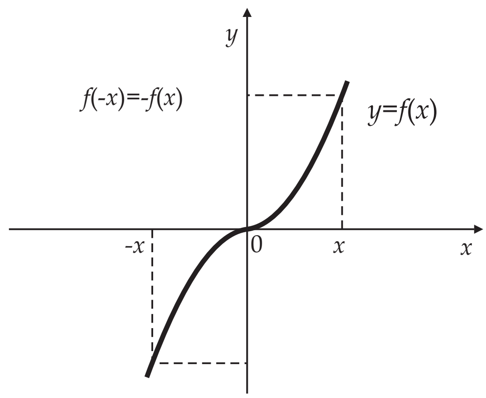
Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je **nepárna**, ak

1. pre $\forall x \in D_f$ je $(-x) \in D_f$,
2. pre $\forall x \in D_f$ je $f(-x) = -f(x)$.

Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi o_y pravouhlého súradnicového systému, **graf nepárnej funkcie** je súmerný podľa počiatku pravouhlého súradnicového systému.



Párna funkcia



Nepárna funkcia

Platí:

- súčet alebo rozdiel dvoch párnych (nepárnych) funkcií je párna (nepárna) funkcia,
- súčin alebo podiel dvoch nepárnych alebo dvoch párnych funkcií je párna funkcia,
- súčin alebo podiel jednej párnej a jednej nepárnej funkcie je nepárna funkcia.

1.2.4 Periodická funkcia

Funkciu $f(x)$ nazývame **periodickou**, ak existuje kladné reálne číslo p také, že platí:

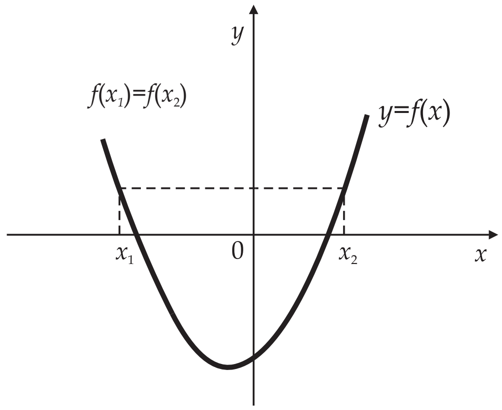
1. pre každé $x \in D_f$ je aj $(x + p) \in D_f$ a $(x - p) \in D_f$,
2. pre každé $x \in D_f$ platí: $f(x + p) = f(x)$, $f(x - p) = f(x)$.

Najmenšie kladné reálne číslo p daných vlastností nazývame **základnou periódou** funkcie $f(x)$ a označujeme ho T.

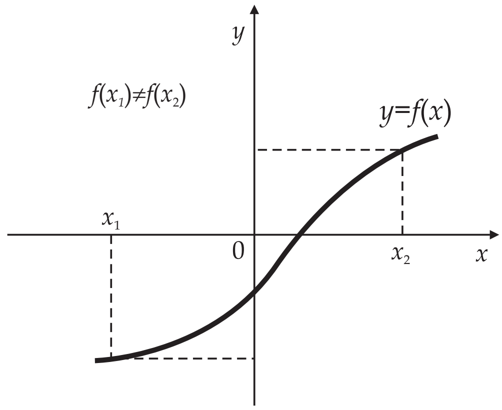
1.2.5 Prostá (jednojednoznačná) funkcia

Funkcia $f(x)$ sa nazýva **prostá**, ak pre každé $x_1, x_2 \in D_f$ také, že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Veta 1. *Každá rýdzomonotónna funkcia je prostá.*



Funkcia nie je prostá na D_f



Funkcia je prostá na D_f

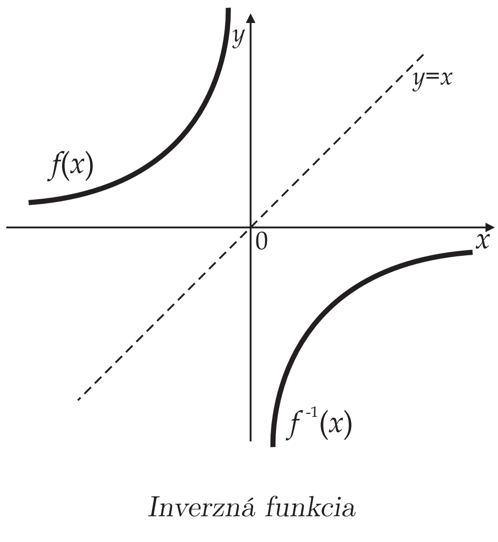
1.2.6 Inverzná funkcia

Nech $f(x)$ je prostá funkcia definovaná na množine D_f s oborom hodnôt H_f. Funkciu definovanú na H_f tak, že každému $y \in H_f$ priradí ten prvok $x \in D_f$, pre ktorý platí $y = f(x)$, nazývame **inverznou funkciou** k funkcii $f(x)$. Inverznú funkciu k funkcii $f(x)$ budeme označovať $f^{-1}(x)$.

Veta 2. *Nech $f(x)$ je rýdzomonotónna funkcia. Potom existuje k nej inverzná funkcia $f^{-1}(x)$. Funkcia $f^{-1}(x)$ je rastúca (klesajúca) vtedy, ak funkcia $f(x)$ je rastúca (klesajúca).*

Pre funkciu $f(x)$ a k nej inverznú funkciu $f^{-1}(x)$ platí:

- grafy funkcií $f(x)$ a $f^{-1}(x)$ sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$,
- $D_f = H_{f^{-1}}$, $H_f = D_{f^{-1}}$,
- $\forall x \in D_f$: $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in H_f$: $f(f^{-1}(x)) = x$.



Inverzná funkcia

Postup určenia predpisu inverznej funkcie k funkcii $y = f(x)$:

1. Zistíme, či je funkcia $y = f(x)$ prostá. Ak nie je (teda k nej neexistuje inverzná funkcia), snažíme sa určiť také intervaly definičného oboru, na ktorých sú príslušné parciálne funkcie (pozri str. 7) z funkcie $f(x)$ prosté a inverznú funkciu hľadáme pre tieto parciálne funkcie.
2. V rovnici $y = f(x)$ navzájom vymeníme x a y, t. j. dostaneme $x = f(y)$.
3. Z rovnice $x = f(y)$ vyjadríme y pomocou x.

Príklad 1. Vyšetrime párnosť, resp. nepárnosť funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = 3x^3 + 1$,

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$,

c) $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1}$,

d) $f(x) = x \sin x$,

e) $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$,

f) $f(x) = \ln(1 - x)$.

Riešenie.

a) Funkcia $f(x) = 3x^3 + 1$ je definovaná pre všetky reálne čísla x, t. j. pre $\forall x \in D_f$ je aj $-x \in D_f$.
Porovnáme $f(x)$ a $f(-x)$. Pretože

$$f(-x) = 3(-x)^3 + 1 = -3x^3 + 1,$$

existujú $x \in D_f$ také, že $f(-x) \neq f(x)$ a $f(-x) \neq -f(x)$, teda funkcia nie je párna, ani nepárna.

b) Definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ je $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, t. j. pre $\forall x \in D_f$ aj $-x \in D_f$.
Porovnáme $f(x)$ a $f(-x)$. Platí

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x),$$

odkiaľ vyplýva, že funkcia $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ je nepárna.

c) Definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{x}{2x - 1}$ je $D_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.
Pretože nie je splnená podmienka: pre $\forall x \in D_f$ je aj $-x \in D_f$, funkcia $f(x)$ nie je párna, ani nepárna.

d) Definičný obor funkcie $f(x) = x \sin x$ je $D_f = \mathbb{R}$, t. j. pre každé $x \in D_f$ je aj $-x \in D_f$. Platí

$$f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = (-x) \cdot (-\sin x) = x \sin x = f(x),$$

odkiaľ vyplýva, že funkcia $f(x) = x \sin x$ je párna.

e) Definičný obor funkcie $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ je $D_f=\mathbb{R}$, t. j. pre $\forall x\in D_f$ je aj $-x\in D_f$. Platí

$$f(-x)=\frac{2^{(-x)}-1}{2^{(-x)}+1}=\frac{\frac{1}{2^x}-1}{\frac{1}{2^x}+1}=\frac{\frac{1-2^x}{2^x}}{\frac{1+2^x}{2^x}}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-\frac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x).$$

Funkcia $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ je nepárna.

f) Definičný obor funkcie $f(x)=\ln(1-x)$ je $D_f=(-\infty,1)$.
Pretože nie je splnená podmienka: pre $\forall x\in D_f$ je aj $-x\in D_f$, funkcia $f(x)=\ln(1-x)$ nie je párna, ani nepárna.

Príklad 2. Nájdime inverznú funkciu k funkcii $f(x)$.

a) $f(x)=x^2$,

b) $f(x)=\dfrac{3x+2}{4-x}$,

c) $f(x)=\sqrt{3-x}$,

d) $f(x)=4\ln(3+2x)$,

e) $f(x)=2^{3x}+1$.

Riešenie.

a) Definičný obor funkcie $f(x)=x^2$ je $D_f=\mathbb{R}$. Funkcia je párna a na intervale $(-\infty,\infty)$ nie je prostá. Inverzná funkcia k nej neexistuje. Z grafu funkcie (pozri str. 23) je zrejmé, že parciálne funkcie $f(x)=x^2$, $x\in(0,\infty)$ a $f(x)=x^2$, $x\in(-\infty,0)$ sú prosté a existujú k nim inverzné funkcie.

Hľadajme teraz inverznú funkciu k funkcii $f(x)=x^2$ na intervale $(0,\infty)$. Definičný obor funkcie je $D_f=(0,\infty)$ a obor hodnôt $H_f=(0,\infty)$. Funkcia je rastúca a teda prostá, preto k nej existuje inverzná funkcia $f^{-1}(x)$, pričom $D_{f^{-1}}=H_f=(0,\infty)$, $H_{f^{-1}}=D_f=(0,\infty)$. Určíme inverznú funkciu:

$$x=y^2,$$
$$y^2=x.$$

Pretože $H_{f^{-1}}=(0,\infty)$, inverznou funkciou k funkcii $f(x)=x^2$ na intervale $(0,\infty)$ je funkcia

$$f^{-1}(x): y=\sqrt{x},\ x\in(0,\infty).$$

Hľadajme teraz inverznú funkciu k funkcii $f(x)=x^2$ na intervale $(-\infty,0)$. Definičný obor funkcie je $D_f=(-\infty,0)$ a obor hodnôt $H_f=(0,\infty)$. Funkcia je klesajúca a teda prostá, preto k nej existuje inverzná funkcia $f^{-1}(x)$, pričom

$$D_{f^{-1}}=H_f=(0,\infty),\ H_{f^{-1}}=D_f=(-\infty,0).$$

Určíme inverznú funkciu:

$$x=y^2,$$
$$y^2=x.$$

Pretože $H_{f^{-1}}=(-\infty,0)$, inverznou funkciou k funkcii $f(x)=x^2$ na intervale $(0,\infty)$ je funkcia

$$f^{-1}(x): y=-\sqrt{x},\ x\in(0,\infty).$$

b) Definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{3x+2}{4-x}$ je $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$, obor hodnôt $H_f = \mathbb{R} - \{-3\}$.

Funkcia je na celom definičnom obore rastúca a teda je prostá. Existuje k nej inverzná funkcia $f^{-1}(x)$ definovaná na množine $D_{f^{-1}} = H_f = \mathbb{R} - \{-3\}$.

Určíme inverznú funkciu:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3y+2}{4-y}, \\ x(4-y) &= 3y+2, \\ 4x-2 &= 3y+xy, \\ y(3+x) &= 4x-2, \\ y &= \frac{4x-2}{3+x}. \end{aligned}$$

Inverznou funkciou k funkcii $f(x) = \dfrac{3x+2}{4-x}$ je funkcia

$$f^{-1}(x) : y = \frac{4x-2}{3+x}, \ x \in \mathbb{R} - \{-3\}.$$

c) Definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{3-x}$ je $D_f = (-\infty, 3\rangle$, obor hodnôt $H_f = \langle 0, \infty)$. Funkcia je klesajúca a teda prostá. Existuje k nej inverzná funkcia $f^{-1}(x)$, ktorá je definovaná na intervale $D_{f^{-1}} = H_f = \langle 0, \infty)$.

Určíme inverznú funkciu:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3-y}, \\ x^2 &= 3-y, \\ y &= 3-x^2. \end{aligned}$$

Inverznou funkciou k funkcii $f(x) = \sqrt{3-x}$ je funkcia $f^{-1}(x) : y = 3 - x^2$, $x \in \langle 0, \infty)$.

d) Definičný obor funkcie $f(x) = 4\ln(3+2x)$ je $D_f = (-\frac{3}{2}, \infty)$, obor hodnôt $H_f = (-\infty, \infty)$. Funkcia je rastúca a teda prostá. Existuje k nej inverzná funkcia $f^{-1}(x)$, ktorá je definovaná na intervale $D_{f^{-1}} = H_f = (-\infty, \infty)$.

Určíme inverznú funkciu:

$$\begin{aligned} x &= 4\ln(3+2y), \\ \tfrac{x}{4} &= \ln(3+2y), \\ e^{\frac{x}{4}} &= 3+2y, \\ e^{\frac{x}{4}} - 3 &= 2y, \\ \tfrac{e^{\frac{x}{4}}-3}{2} &= y, \\ y &= \tfrac{e^{\frac{x}{4}}-3}{2}. \end{aligned}$$

Inverznou funkciou k funkcii $f(x) = 4\ln(3+2x)$ je funkcia

$$f^{-1}(x) : y = \frac{e^{\frac{x}{4}} - 3}{2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

e) Definičný obor funkcie $f(x) = 2^{3x} + 1$ je $D_f = \mathbb{R}$, obor hodnôt $H_f = (1, \infty)$. Funkcia je rastúca a teda prostá. Existuje k nej inverzná funkcia $f^{-1}(x)$, ktorá je definovaná na intervale $D_{f^{-1}} = H_f = (1, \infty)$.