TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH - VÝZVA pre tvoju BUDÚCNOSŤ

Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť/
Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

PRÍPRAVNÝ KURZ ZO STREDOŠKOLSKEJ MATEMATIKY

Strojnícka fakulta

Andrea Feňovčíková
Gabriela Ižaríková

Európska únia
Európsky sociálny fond

Agentúra
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR
pre štrukturálne fondy EÚ

Operačný program
VZDELÁVANIE

Táto publikácia vznikla za finančnej podpory z **Európskeho sociálneho fondu** v rámci Operačného programu **VZDELÁVANIE**.

Prioritná os 1 Reforma vzdelávania a odbornej prípravy
Opatrenie 1.2 Vysoké školy a výskum a vývoj ako motory rozvoja vedomostnej spoločnosti.

Názov projektu: Balík inovatívnych prvkov pre reformu vzdelávania na TUKE

Autori: Andrea Feňovčíková
Gabriela Ižaríková

ISBN 978-80-553-1123-4

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.
Za odbornú a obsahovú stránku zodpovedajú autori.

TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH - VÝZVA pre tvoju BUDÚCNOSŤ

**Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť/
Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ**

PRÍPRAVNÝ KURZ ZO STREDOŠKOLSKEJ MATEMATIKY

Strojnícka fakulta

Andrea Feňovčíková
Gabriela Ižaríková

Európska únia
Európsky sociálny fond

Agentúra
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR
pre štrukturálne fondy EÚ

Operačný program
VZDELÁVANIE

Obsah

Predhovor

Súčasná doba kladie veľký dôraz na dosiahnutie vysokoškolského vzdelania. Zo spoločenských potrieb sa do popredia opäť dostávajú smery technického zamerania. Zvládnutie štúdia technických disciplín a potom následné pretavenie získaných vedomostí a skúseností do praxe sa nemôže zaobísť bez kvalitného matematického základu.

Jednou z najčastejších príčin zanechania štúdia na vysokých školách je práve nezvládnutie matematických predmetov. Cieľom tejto zbierky je zopakovať a prehĺbiť tie poznatky zo stredoškolskej matematiky, ktorých poznanie je dôležité pre základný kurz vysokoškolskej matematiky.

Zbierka je rozdelená do 8 kapitol. Každá kapitola obsahuje množstvo podrobne riešených príkladov a neriešených úloh rôznej obtiažnosti s uvedenými výsledkami. V kapitolách je uvedený teoretický základ učiva, ktorý má slúžiť ako pomôcka pri riešení úloh. Na konci každej kapitoly sú štyri testy, pričom vyriešenie týchto testov pomôže čitateľovi zorientovať sa v tom, či zvláda príslušnú tematickú oblasť.

Sme presvedčení, že prepočítanie tejto zbierky prispeje k bezproblémovému štúdiu a úspešnému zvládnutiu skúšok z matematických predmetov nielen na Technickej univerzite v Košiciach, ale aj na iných vysokých školách technického zamerania.

Čitateľovi by sme tiež radi dali do pozornosti publikáciu *Podporný kurz zo základov vysokoškolskej matematiky, M. Andrejiová, Z. Kimáková, TUKE, Košice 2012.* Ako už jej názov napovedá, zbierka obsahuje rozsiahly materiál základného kurzu vysokoškolskej matematiky.

Spoločnou snahou týchto dvoch zbierok je prispieť k odbúraniu strachu a stresu z matematiky a poukázať na to, že matematika môže byť zaujímavá a zábavná.

Chceli by sme sa poďakovať RNDr. Zuzane Kimákovej, PhD. a Mgr. Marcele Lascsákovej, PhD. za starostlivé prečítanie textu a prepočítanie príkladov a úloh a množstvo pripomienok a návrhov, ktoré výraznou mierou prispeli ku skvalitneniu tejto zbierky.

Košice, jún 2012

autori

1 Základné poznatky o číselných množinách

Číselnou množinou nazývame takú množinu, ktorej všetky prvky sú čísla.

1.1 Prirodzené, celé, racionálne a iracionálne čísla

Prirodzené čísla ... $\mathbb{N}$ ... $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
Množina všetkých prirodzených čísel je uzavretá vzhľadom na operácie sčítania a násobenia.

Celé čísla ... $\mathbb{Z}$ ... $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
Množinu celých čísel dostaneme rozšírením množiny prirodzených čísel o nulu a opačné čísla k prirodzeným číslam. Množina všetkých celých čísel je uzavretá vzhľadom na operácie sčítania, odčítania a násobenia.

Racionálne čísla ... $\mathbb{Q}$
Každé racionálne číslo sa dá zapísať v tvare podielu

$$\frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},$$

teda v tvare zlomku. Číslo p nazývame čitateľ a číslo q menovateľ zlomku. Tento spôsob zápisu však nie je jednoznačný. Medzi všetkými zlomkami, ktorými môžeme zapísať dané racionálne číslo, existuje jeden, ktorého čitateľ je nesúdeliteľný s menovateľom. Hovoríme, že racionálne číslo je zapísané zlomkom v základnom tvare.

Množina všetkých racionálnych čísel je uzavretá vzhľadom na operácie sčítania, odčítania, násobenia a delenia.

Príklad 1.1. *Zlomky* $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{5}{10}, \frac{100}{200}$ *označujú to isté racionálne číslo.* •

Pravidlá pre počítanie so zlomkami. Nech $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{N}$, $c \neq 0$. Platí.

sčítanie (odčítanie) zlomkov	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
násobenie zlomkov	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
delenie zlomkov	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Príklad 1.2. *Vypočítajme.*

a) $\frac{3}{4} + \frac{7}{6} = \frac{3 \cdot 3 + 7 \cdot 2}{12} = \frac{9 + 14}{12} = \frac{23}{12}.$

b) $-\frac{3}{5} + 2 = \frac{-3 + 2 \cdot 5}{5} = \frac{-3 + 10}{5} = \frac{7}{5}.$

c) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 9} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{2}{15}.$

d) $\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 4}{7} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 1}{7} = \frac{6}{7}.$ •

Iracionálne čísla ... $\mathbb{I}$
Iracionálne čísla sú čísla, ktoré sa nedajú zapísať v tvare zlomku $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Príkladom iracionálnych čísel sú $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\sin 10°$, $e, \dots$

Úlohy

1.1. Vypočítajte.

a) $\frac{1}{2}+1$. **b)** $\frac{3}{4}-1$. **c)** $\frac{5}{6}-1$. **d)** $-\frac{1}{2}+1$. **e)** $-\frac{3}{2}-1$.

f) $1+\frac{2}{3}$. **g)** $\frac{3}{2}-1$. **h)** $-\frac{3}{2}+1$. **i)** $\frac{3}{2}+1$. **j)** $-\frac{3}{4}-1$.

1.2. Vypočítajte a zjednodušte.

a) $\frac{2}{5}+\frac{5}{12}$. **b)** $-\frac{3}{4}-\frac{7}{6}$. **c)** $\frac{3}{8}-\frac{6}{10}$. **d)** $\frac{6}{5}+\frac{5}{6}$. **e)** $-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$.

f) $-\frac{9}{14}\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)$. **g)** $\frac{3}{5}:\frac{6}{10}$. **h)** $\frac{3}{5}:2$. **i)** $8:\frac{2}{3}$. **j)** $\dfrac{\frac{4}{15}}{\frac{6}{5}}$.

Výsledky

1.1. **a)** $\frac{3}{2}$. **b)** $-\frac{1}{4}$. **c)** $-\frac{1}{6}$. **d)** $\frac{1}{2}$. **e)** $-\frac{5}{2}$. **f)** $\frac{5}{3}$. **g)** $\frac{1}{2}$. **h)** $-\frac{1}{2}$. **i)** $\frac{5}{2}$. **j)** $-\frac{7}{4}$.

1.2. **a)** $\frac{49}{60}$. **b)** $-\frac{23}{12}$. **c)** $-\frac{9}{40}$. **d)** $\frac{61}{30}$. **e)** $-\frac{3}{10}$. **f)** $\frac{3}{4}$. **g)** 1. **h)** $\frac{3}{10}$. **i)** 12. **j)** $\frac{2}{9}$.

1.2 Reálne čísla

Reálne čísla $\dots$ $\mathbb{R}$
Množina, ktorá obsahuje všetky racionálne a iracionálne čísla, sa nazýva množina *reálnych čísel.*

Medzi jednotlivými množinami platia nasledujúce vzťahy

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R},\quad \mathbb{Q}\cup\mathbb{I}=\mathbb{R},\quad \mathbb{Q}\cap\mathbb{I}=\emptyset.$$

Množina všetkých reálnych čísel je uzavretá vzhľadom na operácie sčítania, odčítania, násobenia a delenia. Pre operácie s reálnymi číslami platia tieto pravidlá. Nech $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Pravidlá pre vzťah rovnosti	
$a=a$	reflexívnosť
$a=b\Rightarrow b=a$	symetrickosť
$a=b,\ b=c\Rightarrow a=c$	tranzitívnosť
Pravidlá pre sčítanie	
$a+b=b+a$	komutatívnosť
$(a+b)+c=a+(b+c)$	asociatívnosť
$a+0=0+a=a$	existencia nulového prvku
$\forall a\in\mathbb{R},\ \exists b\in\mathbb{R}:a+b=0$	existencia opačného prvku k prvku a, označenie $b=-a$

Pravidlá pre násobenie	
$ab = ba$	komutatívnosť
$(ab)c = a(bc)$	asociatívnosť
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	existencia jednotkového prvku
$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists b \in \mathbb{R} : a \cdot b = 1$	existencia inverzného prvku k prvku a, označenie $b = \frac{1}{a}$
$(a + b)c = ac + bc$	distributívnosť

Na množine reálnych čísel je definovaná relácia usporiadania, teda reálne čísla sú usporiadané podľa veľkosti. Na označenie usporiadania sa používa vzťah menší $<$, respektíve väčší $>$.

Absolútna hodnota reálneho čísla. Ku každému reálnemu číslu a môžeme priradiť práve jedno nezáporné reálne číslo, ktoré označujeme $|a|$ a nazývame absolútna hodnota čísla a. Platí

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ak } a \geq 0 \\ -a, & \text{ak } a < 0. \end{cases}$$

Absolútna hodnota čísla a vyjadruje jeho vzdialenosť od nuly.

Príklad 1.3. *Platí* $|-4| = 4,\ |3| = 3,\ |0| = 0,\ |-2,72| = 2,72,\ |-\pi| = \pi.$ •

Okrem sčítania, odčítania, násobenia a delenia môžeme reálne čísla aj odmocňovať.

Mocniny ... *n-tá mocnina čísla a* ... a^n

a – základ mocniny (mocnenec)

n – exponent (mocniteľ)

- *mocniny s prirodzeným exponentom* $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
  ... $a^1 = a, \quad a^{n+1} = a \cdot a^n$

- *mocniny s celočíselným exponentom* $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$
  ... Ak $n = 0$, $a \neq 0$, tak definujeme $a^0 = 1$.
  ... Ak $n < 0$, $a \neq 0$, tak definujeme $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.

- *odmocniny* $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
  ... Ak $a > 0$, tak n-tá odmocnina čísla a je také kladné reálne číslo x, pre ktoré platí $x^n = a$. Číslo x označujeme symbolom $\sqrt[n]{a}$ alebo $a^{\frac{1}{n}}$.
  ... Ak $a < 0$ a n je nepárne, tak definujeme $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

- *mocniny s racionálnym exponentom* $a \in \mathbb{R}, a > 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$
  ... $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$

- *mocniny s reálnym exponentom* $a, r \in \mathbb{R}, a > 0$ ... a^r

Pravidlá pre počítanie s mocninami

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$a^0 = 1$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[n\cdot m]{a^m}}{\sqrt[n\cdot m]{b^n}} = \sqrt[n\cdot m]{\frac{a^m}{b^n}}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^x = \sqrt[n]{a^{mx}}$
$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	

Príklad 1.4. *Vypočítajme.*

a) $(-2)^2 + 2^{-2} - \left(\frac{2}{7}\right)^0 = 4 + \frac{1}{2^2} - 1 = 4 + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{13}{4}.$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^1 + \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{\frac{9}{4}} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 2 + 3}{2} = \frac{7}{2}.$

Úlohy

1.3. Vypočítajte.

a) 2^0. **b)** 2^3. **c)** 2^5. **d)** $3 \cdot 10^4$. **e)** $5 \cdot 10^{-3}$.

f) 3^{-1}. **g)** $\sqrt{4}$. **h)** $\sqrt{-8}$. **i)** $4^{\frac{1}{2}}$. **j)** $4^{-\frac{1}{2}}$.

1.4. Vypočítajte.

a) $\sqrt[3]{64}$. **b)** $\sqrt[3]{-27}$. **c)** $(-1)^{2n}$. **d)** $(-1)^{2n+1}$. **e)** $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$.

f) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$. **g)** $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$. **h)** $\sqrt{18}$. **i)** $\sqrt{\frac{8}{25}}$. **j)** $(8^2)^{-\frac{1}{3}}$.

1.5. Vypočítajte.

a) 3^0. **b)** 4^{-1}. **c)** 5^{-3}. **d)** $(-3)^{-4}$. **e)** $(-2)^{-6}$.

f) $8^{\frac{4}{3}}$. **g)** $36^{\frac{5}{2}}$. **h)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$. **i)** $9^{\frac{1}{2}}$. **j)** $16^{-\frac{1}{2}}$.

k) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$. **l)** $\left(\frac{1}{2}\right)^4$. **m)** $\left(\frac{25}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$. **n)** $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$. **o)** $(\sqrt[4]{81})^2$.

1.6. Vypočítajte.

a) $\frac{16^{\frac{1}{4}}}{8^{\frac{1}{3}}}$. **b)** $\frac{625}{\sqrt{25}}$. **c)** $\sqrt{243} \cdot \sqrt{27}$. **d)** $\sqrt[4]{16^3}$. **e)** $\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{4}}}$.

f) $2\left(\left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$. **g)** $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[6]{144}}$. **h)** $81^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{1}{4}}$. **i)** $125^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{-1}{2}}$. **j)** $20^{\frac{1}{4}} \cdot 20^{\frac{3}{4}}$.

k) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{12}$. **l)** $\sqrt[3]{4^2}:\sqrt{4^3}$. **m)** $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+81^{\frac{1}{2}}}$. **n)** $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{16}-\sqrt[3]{125}}$. **o)** $\frac{9}{\sqrt[3]{27^4}}$.

1.7. Zjednodušte.

a) $5^{\frac{1}{2}}\cdot 25^{-0,4}\cdot 125\cdot 5^{\frac{4}{5}}$. **b)** $\sqrt[3]{6,4}\cdot\sqrt[3]{56}\cdot\sqrt[3]{0,49}$. **c)** $\frac{(\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt{27})^{-3}}{(25^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{\frac{1}{8}})^{-2}}\cdot\frac{3\sqrt{9}}{\sqrt[3]{27^2}}$.

d) $2^5+2^6+2^7$. **e)** $\frac{2^3+2^4+2^7}{2^5+2^6+2^8}$. **f)** $5^0+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$.

g) $27^{\frac{1}{2}}+12^{\frac{1}{2}}$. **h)** $\sqrt{32}+\sqrt{50}$. **i)** $2\cdot\sqrt[3]{16}+12\cdot\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}$.

Výsledky

1.3. **a)** 1. **b)** 8. **c)** 32. **d)** 30 000. **e)** 0, 005. **f)** $\frac{1}{3}$. **g)** 2. **h)** Neexistuje. **i)** 2. **j)** $\frac{1}{2}$.

1.4. **a)** 4. **b)** -3. **c)** 1. **d)** -1. **e)** $\frac{2}{3}$. **f)** $\frac{3}{2}$. **g)** $\frac{3}{2}$. **h)** $3\sqrt{2}$. **i)** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **j)** $\frac{1}{4}$.

1.5. **a)** 1. **b)** $\frac{1}{4}$. **c)** $\frac{1}{125}$. **d)** $\frac{1}{81}$. **e)** $\frac{1}{64}$. **f)** 16. **g)** 6^5. **h)** $\frac{4}{9}$. **i)** 3. **j)** $\frac{1}{4}$. **k)** $\frac{8}{27}$. **l)** $\frac{1}{16}$. **m)** $\frac{3}{5}$. **n)** $\frac{4}{5}$. **o)** 9.

1.6. **a)** 1. **b)** 125. **c)** 81. **d)** 8. **e)** $2^{\frac{1}{3}}$. **f)** $2^{\frac{11}{8}}$. **g)** $2^{\frac{1}{3}}$. **h)** 11. **i)** $\sqrt{5}$. **j)** 20. **k)** $6\sqrt{6}$. **l)** $2^{-\frac{5}{3}}$. **m)** 5. **n)** -2. **o)** $\frac{1}{9}$.

1.7. **a)** $5^{\frac{7}{2}}$. **b)** $\frac{28}{5}$. **c)** 3^{-5}. **d)** $7\cdot 2^5$. **e)** $\frac{19}{44}$. **f)** 6. **g)** $5\sqrt{3}$. **h)** $9\sqrt{2}$. **i)** $45\sqrt[3]{2}$.

1.3 Komplexné čísla

Komplexné čísla sú čísla tvaru

$$z = a + bi,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a i je imaginárna jednotka. Platí $i^2 = -1$. Číslo a nazývame reálna časť komplexného čísla z, číslo b nazývame imaginárna časť komplexného čísla z. Označujeme $a = \mathfrak{Re}\, z$, $b = \mathfrak{Im}\, z$.

- Ak $b = 0$, t. j. $z = a + 0i = a$, tak dostávame reálne číslo.
- Ak $a = 0$, t. j. $z = 0 + bi = bi$, tak komplexné číslo nazveme rýdzo imaginárne.

Dve komplexné čísla $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ sa rovnajú, ak sa rovnajú ich reálne a imaginárne časti, teda ak $a_1 = a_2$ a $b_1 = b_2$.

Ku každému komplexnému číslu $z = a + bi$ môžeme priradiť číslo komplexne združené (konjugované) $\overline{z} = a - bi$.

Pre počítanie s komplexnými číslami platí.

sčítanie (odčítanie) komplexných čísel	$(a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$
násobenie komplexných čísel	$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$
delenie komplexných čísel	$\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{a+bi}{c+di} \cdot \dfrac{c-di}{c-di} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

Príklad 1.5. *Vypočítajme.*

a) $(3+5i)+(-2+2i) = (3-2)+(5+2)i = 1+7i.$

b) $(5-2i)-(6+3i) = (5-6)+(-2-3)i = -1-5i.$

c) $(1+2i)\cdot(2-3i) = 1\cdot 2 - 1\cdot 3i + 2i\cdot 2 - 2i\cdot 3i = 2-3i+4i-6i^2 = 2+i-6\cdot(-1) = 2+i+6 = 8+i.$

d) $\dfrac{2+5i}{1+3i} = \dfrac{2+5i}{1+3i}\cdot\dfrac{1-3i}{1-3i} = \dfrac{2-6i+5i-15i^2}{1-9i^2} = \dfrac{2-i+15}{1+9} = \dfrac{17-i}{10} = \dfrac{17}{10} - \dfrac{1}{10}i.$

Pre mocniny imaginárnej jednotky i dostávame

$$
\begin{aligned}
i^1 &= i,\\
i^2 &= -1,\\
i^3 &= i\cdot i^2 = i\cdot(-1) = -i,\\
i^4 &= i\cdot i^3 = i\cdot(-i) = 1,\\
i^5 &= i\cdot i^4 = i\cdot 1 = i,\\
i^6 &= i\cdot i^5 = i\cdot i = -1,\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Pre každé nezáporné celé číslo k teda platí.

$$
\boxed{\begin{aligned}
i^{4k} &= 1\\
i^{4k+1} &= i\\
i^{4k+2} &= -1\\
i^{4k+3} &= -i
\end{aligned}}
$$

Príklad 1.6. *Platí* $\quad i^{127} = i^{4\cdot 31+3} = i^{4\cdot 31}\cdot i^3 = 1\cdot i^3 = i^3 = -i.$

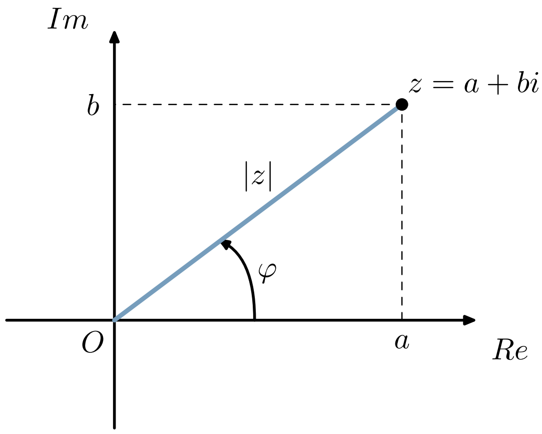
Okrem *algebraického tvaru* komplexného čísla $z = a+bi$ poznáme aj jeho *goniometrický tvar*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kde $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ a $\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}$. Číslo $|z|$ nazývame absolútnou hodnotou alebo modulom komplexného čísla. Číslo φ nazývame argumentom alebo amplitúdou komplexného čísla.

Súvis medzi týmito tvarmi je zrejmý, ak zakreslíme komplexné číslo do Gaussovej roviny komplexných čísel, pozri Obr. 1.1. Os x sa nazýva reálna os, os y sa nazýva imaginárna os.

Každému bodu tejto roviny zodpovedá jedno komplexné číslo $z = a+bi$, pričom a je x-ová súradnica a b je y-ová súradnica tohto bodu. Body, ktoré sa nachádzajú na x-ovej osi reprezentujú reálne čísla, na y-ovej osi sa nachádzajú rýdzoimaginárne čísla. Absolútna hodnota komplexného čísla $|z|$ predstavuje vzdialenosť bodu znázorňujúceho komplexné číslo z od počiatku súradnicového systému O, odpovedá teda dĺžke úsečky Oz. Argument komplexného čísla φ predstavuje uhol, ktorý zviera úsečka Oz s kladnou časťou reálnej osi, pričom veľkosť uhla uvažujeme v smere proti pohybu hodinových ručičiek.



Obr. 1.1: Gaussova rovina komplexných čísel.

Príklad 1.7. *Zapíšme dané komplexné číslo v goniometrickom tvare.*

a) 2. **b)** -3. **c)** $2i$. **d)** $1-i$.

Riešenie.

Pri riešení využijeme vzorce

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}.$$

a) Keďže $2 = 2+0i$, dostávame

$$|2| = \sqrt{2^2+0^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \cos\varphi = \frac{2}{2} = 1, \quad \sin\varphi = \frac{0}{2} = 0.$$

Zrejme $\varphi = 0$. Teda

$$2 = 2(\cos 0 + i\sin 0).$$

b) Pre $-3 = -3+0i$, dostávame

$$|-3| = \sqrt{(-3)^2+0^2} = \sqrt{9} = 3, \quad \cos\varphi = -\frac{3}{3} = -1, \quad \sin\varphi = \frac{0}{3} = 0,$$

teda $\varphi = \pi$. Potom

$$-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$$

c) Uvažujme komplexné číslo $2i = 0+2i$, potom

$$|2i| = \sqrt{0^2+2^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \cos\varphi = \frac{0}{2} = 0, \quad \sin\varphi = \frac{2}{2} = 1.$$

Riešením je $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Teda

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

d) Pre modul komplexného čísla $1-i$ platí

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Argument získame riešením sústavy rovníc

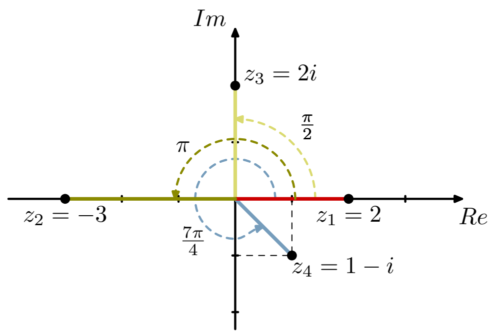
$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ľahko sa zistí, že riešením je $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. Teda

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Poznamenajme, že pri vyjadrení argumentu φ môžene použiť napríklad kalkulačku. Riešeniu goniometrických rovníc sa budeme podrobnejšie venovať v 5. kapitole Goniometria.

Na Obr. 1.2 sú znázornené komplexné čísla $z_1 = 2$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2i$ a $z_4 = 1 - i$.



Obr. 1.2: Komplexné čísla $z_1 = 2$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2i$ a $z_4 = 1 - i$ v Gaussovej rovine komplexných čísel.

Príklad 1.8. *Zapíšme komplexné číslo* $\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ *v algebraickom tvare.*

Riešenie. $\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$

Násobenie, delenie a umocňovanie komplexných čísel je jednoduchšie, ak sú dané čísla zapísané v goniometrickom tvare. Nech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ sú komplexné čísla. Platí

násobenie komplexných čísel	$z_1 z_2 = \lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$
delenie komplexných čísel	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big)$
umocňovanie komplexných čísel (Moivreov vzorec)	$z^n = \big(\lvert z\rvert(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = \lvert z\rvert^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Príklad 1.9. *Vypočítajme* $(1 - i)^{12}$.

Riešenie. Podľa Príkladu 1.7 d) platí $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$. Využitím Moivreovho vzorca dostávame

$(1 - i)^{12} = \sqrt{2}^{12}\left(\cos\left(12 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(12 \cdot \frac{7\pi}{4}\right)\right) = 2^6(\cos 21\pi + i\sin 21\pi) = 2^6(-1 + i \cdot 0) = -2^6 = -64.$

Využijúc vzťah $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, dostaneme *exponenciálny tvar* komplexného čísla

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

Úlohy

1.8. Vypočítajte.

a) $i - (3 - 2i)$. **b)** $(3 + 7i) + (2 - 4i)$. **c)** $(3 + 5i) - (12 - 6i)$. **d)** $(6 + 7i) - 3(-4 + 2i)$.

e) $2i \cdot (-4i)$. **f)** $(2 + 3i) \cdot (4 - 7i)$. **g)** $(2 + 5i) \cdot (3 - i)$. **h)** $(1 + i) \cdot (1 + 2i)$.

i) $\frac{4}{i}$. **j)** $\frac{2 + i}{i}$. **k)** $\frac{3 + 5i}{2 - i}$. **l)** $\frac{1 - i}{3 + i}$.

1.9. Zapíšte nasledujúce komplexné čísla v goniometrickom tvare.

a) 5. **b)** -7. **c)** $3i$. **d)** $-4i$. **e)** $2 + 2i$.

f) $2 - 2i$. **g)** $-2 + 2i$. **h)** $-2 - 2i$. **i)** $1 + \sqrt{3}i$. **j)** $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

1.10. Zapíšte dané komplexné čísla v algebraickom tvare.

a) $2\big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\big)$. **b)** $4(\cos 0 + i\sin 0)$. **c)** $3\big(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\big)$.

1.11. Vypočítajte.

a) $\Big(5\big(\cos\frac{7}{10}\pi + i\sin\frac{7}{10}\pi\big)\Big)^{20}$. **b)** $\big(1-\sqrt{3}i\big)^7$. **c)** $(1+i)^{35}$. **d)** $\big(-\sqrt{3}+i\big)^{14}$.

Výsledky

1.8. **a)** $-3+3i$. **b)** $5+3i$. **c)** $-9+11i$. **d)** $18+i$. **e)** 8. **f)** $29-2i$. **g)** $11+13i$.

h) $-1+3i$. **i)** $-4i$. **j)** $1-2i$. **k)** $\frac{1}{5}+\frac{13}{5}i$. **l)** $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$.

1.9. **a)** $5(\cos 0 + i\sin 0)$. **b)** $7(\cos\pi + i\sin\pi)$. **c)** $3\big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\big)$. **d)** $4\big(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\big)$.

e) $2\sqrt{2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big)$. **f)** $2\sqrt{2}\big(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\big)$. **g)** $2\sqrt{2}\big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\big)$.

h) $2\sqrt{2}\big(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\big)$. **i)** $2\big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\big)$. **j)** $1\big(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\big)$.

1.10. **a)** $2i$. **b)** 4. **c)** $-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$.

1.11. **a)** 5^{20}. **b)** $2^6\big(1-\sqrt{3}i\big)$. **c)** $2^{17}(-1+i)$. **d)** $2^{13}\big(1-\sqrt{3}i\big)$.

1.4 Testy

1.4.1 Test 1

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1.1. Racionálne číslo $\dfrac{45}{75}$ označuje to isté číslo ako zlomok

A) $\dfrac{5}{3}$. **B)** $\dfrac{3}{5}$. **C)** $\dfrac{6}{10}$. **D)** $\dfrac{9}{25}$.

1.2. Správne usporiadanie čísel $\dfrac{3}{2}+1$, $\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{3}$ a $\dfrac{3}{8}:\dfrac{9}{22}$ je

A) $\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{8}:\dfrac{9}{22}<\dfrac{3}{2}+1$. **B)** $\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{3}{8}:\dfrac{9}{22}<\dfrac{3}{2}+1$.

C) $\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{3}{2}+1<\dfrac{3}{8}:\dfrac{9}{22}$. **D)** $\dfrac{3}{2}+1<\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{3}<\dfrac{3}{8}:\dfrac{9}{22}$.

1.3. Číslo $\left(\dfrac{2^8}{3^8\cdot 5^4}\right)^{-\frac{1}{4}}$ sa dá zjednodušiť na tvar

A) $\dfrac{16}{15}$. **B)** $\dfrac{45}{4}$. **C)** $\dfrac{4}{45}$. **D)** $\dfrac{3^8\cdot 5^0}{2^4}$.

1.4. Číslo $81^{-\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}$ sa rovná číslu

A) $\sqrt[3]{3^2}$. **B)** $\left(\sqrt[3]{3}\right)^4$. **C)** $\sqrt[4]{3^{-3}}$. **D)** $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-4}$.

1.5. Delením komplexných čísel $(3+4i)$ a $(2+i)$, v danom poradí, dostaneme číslo

A) $2-i$. **B)** $1+2i$. **C)** $2+i$. **D)** $-2-i$.

Správne odpovede: B a C, A, B, D, C.

1.4.2 Test 2

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1. Racionálne číslo $\frac{81}{\sqrt{27}}$ označuje to isté číslo ako

   A) $\dfrac{9}{\sqrt{3}}$. **B)** $9 \cdot \sqrt{3}$. **C)** 3. **D)** $\sqrt{3}$.

2. Číslo $\left(\dfrac{2^3}{8^2 \cdot \sqrt{16}}\right)^{-1}$ sa dá zjednodušiť na tvar

   A) 2^5. **B)** 2^{-5}. **C)** 1. **D)** 32.

3. Správne usporiadanie čísel $\sqrt{5}$, $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ a $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ je

   A) $\sqrt{5} < \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} < \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B)** $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{\sqrt{5}} < \dfrac{\sqrt{5}}{5} < \sqrt{5}$.

   C) $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} < \sqrt{5}$. **D)** $\dfrac{\sqrt{5}}{5} \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}} < \sqrt{5} < \dfrac{1}{5}$.

4. Delením komplexných čísel $(1 + 3i)$ a $(3 + i)$, v danom poradí, dostaneme číslo

   A) $\dfrac{3 + 4i}{5}$. **B)** $\dfrac{6 + 8i}{10}$. **C)** $\dfrac{1}{3}$. **D)** $3i$.

5. Vyznačte číslo, ktoré patrí do množiny prirodzených čísel

   A) $\dfrac{\sqrt{25}}{2}$. **B)** $\left(\sqrt[3]{3}\right)^4$. **C)** $\sqrt[4]{81}$. **D)** $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-3}$.

Správne odpovede: B, A a D, C, A a B, C.

1.4.3 Test 3

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1. Číslo $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+6^{-1}$ patrí do množiny

   A) $\mathbb{N}$. **B)** $\mathbb{R}$. **C)** $\mathbb{Z}$. **D)** $\langle 0,3\rangle$.

2. Správne usporiadanie čísel $\frac{2}{3}-1$, $\frac{9}{2}:\frac{27}{2}$ a $\frac{9}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}$ je

   A) $\frac{2}{3}-1=\frac{9}{2}:\frac{27}{2}=\frac{9}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}$. **B)** $\frac{2}{3}-1<\frac{9}{2}:\frac{27}{2}<\frac{9}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}$.

   C) $\frac{9}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}<\frac{2}{3}-1\le\frac{9}{2}:\frac{27}{2}$. **D)** $\frac{9}{2}:\frac{27}{2}\le\frac{2}{3}-1\le\frac{9}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}$.

3. Vynásobením komplexných čísel $(3+2i)$ a $(4-i)$ dostaneme číslo

   A) $12-2i$. **B)** $14+5i$. **C)** $10+5i$. **D)** $14-5i$.

4. Číslo $\frac{\sqrt{32}\cdot 27}{12\cdot\sqrt{72}}$ sa dá zjednodušiť na tvar

   A) 1. **B)** $\frac{2}{3}$. **C)** $\frac{3}{2}$. **D)** $1,5$.

5. Algebraický tvar komplexného čísla $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ je

   A) $2i$. **B)** $1+2i$. **C)** $2+i$. **D)** $2-i$.

Správne odpovede: B a C, B, B, C a D, A.

1.4.4 Test 4

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1. Racionálne číslo $\dfrac{256}{48}$ označuje to isté číslo ako

   A) $\dfrac{16}{3}$. **B)** $3 \cdot \sqrt{16}$. **C)** 4. **D)** $\dfrac{64}{12}$.

2. Algebraický tvar komplexného čísla $1 - 10i - (4 + i) \cdot (2 - 3i)$ je

   A) $11 - i$. **B)** -10. **C)** 10. **D)** $11i$.

3. Číslo $\left(\dfrac{15 \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{48}}\right)^{-0{,}5}$ sa dá zjednodušiť na tvar

   A) $\dfrac{9}{4}$. **B)** $\dfrac{3}{2}$. **C)** $\dfrac{2}{3}$. **D)** 5.

4. Správne usporiadanie čísel $\dfrac{5}{4} - 2$, $\dfrac{1}{3} : \dfrac{6}{5}$ a $\dfrac{5}{6} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2}$ je

   A) $\dfrac{5}{4} - 2 < \dfrac{1}{3} : \dfrac{6}{5} < \dfrac{5}{6} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2}$. **B)** $\dfrac{5}{4} - 2 = \dfrac{5}{6} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{3} : \dfrac{6}{5}$.

   C) $\dfrac{5}{4} - 2 < \dfrac{5}{6} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2} < \dfrac{1}{3} : \dfrac{6}{5}$. **D)** $\frac{5}{6} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{2} < \dfrac{1}{3} : \dfrac{6}{5} \leq \dfrac{5}{4} - 2$.

5. Úpravou výrazu $\dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} + \dfrac{1}{2}$ dostaneme číslo, ktoré patrí do množiny

   A) $\mathbb{N}$. **B)** $\mathbb{R}$. **C)** $\mathbb{I}$. **D)** $\mathbb{Z}$.

Správne odpovede: A a D, B, C, C, A a B a D.

2 Algebraické výrazy

2.1 Pojem výrazu, definičný obor výrazu

Algebraický výraz je výraz, ktorý je vytvorený z čísel, premenných, znakov matematických operácií a výsledkov operácií.

Definičný obor výrazu je množina všetkých takých hodnôt premenných, pre ktoré má algebraický výraz zmysel. Pri určovaní definičného oboru výrazu sledujeme obdobné podmienky ako pri definičnom obore funkcie, viď tiež 3. kapitolu Funkcie.

1. *Výraz v menovateli zlomku musí byť rôzny od nuly.*
2. *Pre reálne výrazy musí byť pod párnou odmocninou nezáporný výraz.*

Pod *úpravou výrazu* rozumieme nahradenie výrazu iným výrazom, ktorý sa mu na danej množine rovná a má žiadaný tvar. *Zjednodušenie výrazu* je úprava, po ktorej dostaneme výraz s menším počtom zátvoriek, členov a premenných.

Príklad 2.1. *Zjednodušme výrazy a určme, kedy majú zmysel.*

a) $\dfrac{x^2}{x}$. **b)** $x \cdot \dfrac{1}{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^3$. **c)** $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1}$. **d)** $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{(x^2+3x+2)(x-1)}$.

Riešenie.

a) $\dfrac{x^2}{x} = \dfrac{x \cdot x}{x} = x.$

Keďže výraz obsahuje zlomok, je definovaný len pre $x \neq 0$.

b) $x \cdot \dfrac{1}{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 = x \cdot x^{-2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-3} = x^{1-2+\frac{1}{2}-3} = x^{-\frac{7}{2}}.$

Daný výraz obsahuje zlomok a párnu odmocninu. Musia byť teda splnené nasledujúce dve podmienky.
I. podmienka pre zlomok ... $x \neq 0$.
II. podmienka pre párnu odmocninu ... $x \geq 0$.

Keďže podmienky I. a II. musia platiť súčasne, dostávame $x > 0$.

c) $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{(x+4)}{(x+1)}.$

Vzhľadom k tomu, že menovateľ zlomku musí byť rôzny od nuly dostávame podmienku
$x^2-1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \pm 1.$

d) $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{(x^2+3x+2)(x-1)} = \dfrac{x^2(x+2)-(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-1)} = \dfrac{(x+2)(x^2-1)}{(x+2)(x^2-1)} = 1.$

Aj v tomto prípade musí byť menovateľ zlomku nenulový, teda
$(x^2+3x+2)(x-1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x+2)(x-1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -2, \pm 1.$

•

Dva algebraické výrazy sa *rovnajú* na nejakej množine M, keď pre všetky prípustné hodnoty premenných nadobúdajú oba výrazy rovnakú hodnotu.

Príklad 2.2. *Napríklad výrazy $\sqrt{x}$ a $\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ sa nerovnajú na množine nezáporných reálnych čísel. Rovnajú sa však napríklad na množine kladných reálnych čísel. Poznamenajme, že množina kladných reálnych čísel je najväčšia množina, na ktorej sa tieto výrazy rovnajú, keďže výraz $\sqrt{x}$ je definovaný pre $x \in \langle 0, \infty)$ a výraz $\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ je definovaný pre $x \in (0, \infty)$.* •

Výpočet hodnoty algebraického výrazu vykonáme dosadením daných hodnôt premenných za jednotlivé premenné a vyčíslime takto vzniknutý číselný výraz.

Príklad 2.3. *Určme hodnoty nasledujúcich výrazov pre dané x.*

a) $\dfrac{x^2-4}{x+2}$ *pre* $x=2$. **b)** $\dfrac{\ln x}{x}$ *pre* $x=1$. **c)** $e^x\cdot(x^2-1)$ *pre* $x=0$.

Riešenie.

a) $\dfrac{x^2-4}{x+2}\Big|_{x=2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}\Big|_{x=2} = x-2\Big|_{x=2} = 2-2=0.$

b) $\dfrac{\ln x}{x}\Big|_{x=1} = \dfrac{\ln 1}{1} = \dfrac{0}{1} = 0.$

c) $e^x\cdot(x^2-1)\big|_{x=0} = e^0\cdot(0^2-1) = 1\cdot(0-1) = -1.$

Úlohy

2.1. Upravte nasledujúce výrazy a určte podmienky, kedy majú výrazy zmysel.

a) $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$. **b)** $\dfrac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x}}$. **c)** $\left(\dfrac{ab^2}{a^{-2}b^{-1}}\right)^{-2}$.

d) $\left[(-ab^2)^2:(b^2a)\right]\cdot\left(\dfrac{-b}{a^2}\right)^3$. **e)** $2x\sqrt{x}-3\sqrt{x^3}+\dfrac{5}{x}\sqrt{x^5}$. **f)** $\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

2.2. Upravte nasledujúce výrazy a určte podmienky, kedy majú výrazy zmysel.

a) $(-3x)^2(-3x)^5$. **b)** $(-x)^2\left(\dfrac{2}{x}\right)^3\left(\dfrac{-x}{2}\right)^5$. **c)** $\dfrac{(xy)^{\frac{1}{2}}(x^2y)^{\frac{-1}{3}}}{(xy^2)^{\frac{-2}{3}}}$.

d) $\dfrac{1}{15}(-5x)^2(-3x)^3\left(\dfrac{-1}{x}\right)^5$. **e)** $\sqrt[5]{\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}x^{-1}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{-3}}$. **f)** $\dfrac{x^2y-xy^4}{xy}$.

2.3. Zjednodušte nasledujúce výrazy a určte podmienky, kedy majú výrazy zmysel.

a) $\dfrac{25xy^2z^3}{15x^3y^2z}$. **b)** $\dfrac{42x^2y^3z^4}{6xyz^2}$. **c)** $\left(\dfrac{2xy^3}{8x^2y}\right)^{-1}$.

d) $\left(\dfrac{x^2yz^3}{x^4y^5z^2}\right)^{-3}$. **e)** $\dfrac{ab^2x}{2a^4b}:\left(\dfrac{16a^2b}{9x^2a}\cdot\dfrac{27xab}{2xb^2}\right)$. **f)** $\left(\dfrac{3xy^2}{16x^2y}\right)^2\cdot\left(\dfrac{4x^2y}{2xy^3}\right)^{-2}$.

2.4. Nájdite najväčšiu množinu, na ktorej sa nasledujúce výrazy rovnajú.

a) $\sqrt{x^2}$, $(\sqrt{x})^2$. **b)** $\dfrac{x^2-9}{x-3}$, $x+3$.

c) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$, $x-1$. **d)** $(x-4)^2-(x+4)^2$, $-16x$.

2.5. Stanovte hodnoty výrazov pre dané x.

a) $6x^2-6x-36$ pre $x=-2$, $x=3$. **b)** $3x^2-12$ pre $x=-2$, $x=2$.

c) $xe^{-x}(2-x)$ pre $x=0$, $x=2$. **d)** $e^{\frac{x}{2}}(2x-1)$ pre $x=0$, $x=\frac{1}{2}$.

e) $\dfrac{4x^3+12x}{(x^2-1)^3}$ pre $x=0$, $x=1$. **f)** $\dfrac{2-\ln x}{x\ln^3 x}$ pre $x=e$, $x=e^2$.

g) $\dfrac{3x^3-6x}{(x^2+1)^3}$ pre $x=0$, $x=1$. **h)** $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$ pre $x=0$, $x=\frac{1}{2}$.

Výsledky

2.1. **a)** $x^{-\frac{3}{2}}$, $x > 0$. **b)** $\sqrt{2}x^{-\frac{1}{6}}$, $x > 0$. **c)** $(ab)^{-6}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. **d)** $-b^5a^{-5}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

e) $4x^{\frac{3}{2}}$, $x > 0$. **f)** $\sqrt{ab}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

2.2. **a)** $-(3x)^7$, $x \in \mathbb{R}$. **b)** $-\dfrac{x^4}{4}$, $x \neq 0$. **c)** $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$, $x > 0, y > 0$. **d)** 45, $x \neq 0$. **e)** $\sqrt{x}$, $x > 0$.

f) $x - y^3$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

2.3. **a)** $\dfrac{5z^2}{3x^2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. **b)** $7xy^2z^2$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. **c)** $\dfrac{4x}{y^2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

d) $x^6y^{12}z^{-3}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. **e)** $\dfrac{bx^3}{48a^5}$, $x \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. **f)** $\dfrac{3^2y^6}{2^{10}x^4}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

2.4. **a)** $\langle 0, \infty)$. **b)** $\mathbb{R} - \{3\}$. **c)** $\mathbb{R} - \{-1\}$. **d)** $\mathbb{R}$.

2.5. **a)** $0, 0$. **b)** $0, 0$. **c)** $0, 0$. **d)** $-1, 0$. **e)** 0, nedefinované. **f)** $e^{-1}, 0$. **g)** $0, -\frac{3}{8}$.

h) Nedefinované, $32e^2$.

Poznámka 2.1. Rozlišujeme niekoľko typov výrazov, napríklad mnohočleny, racionálne lomené výrazy, výrazy s mocninami a odmocninami, výrazy s absolútnou hodnotou, výrazy s komplexnými číslami, goniometrické výrazy, výrazy s kombinačnými číslami a faktoriálom a iné.

2.2 Mnohočleny

Mnohočlen (polynóm) n-tého stupňa $P_n(x)$ jednej premennej x je výraz tvaru

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

kde n je prirodzené číslo a $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú reálne čísla, ktoré nazývame koeficienty (konštanty) mnohočlena. Výrazy a_kx^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ sú členy mnohočlena.

$P_0(x) = a_0$ ... mnohočlen nultého stupňa – absolútny mnohočlen,

$P_1(x) = a_1x + a_0$ ... mnohočlen 1. stupňa – lineárny mnohočlen,

$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ... mnohočlen 2. stupňa – kvadratický mnohočlen,

$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ... mnohočlen 3. stupňa – kubický mnohočlen.

Okrem mnohočlenov obsahujúcich jedinú premennú x, existujú aj mnohočleny viacerých premenných. Napríklad

$$2xy + 4x^3, \quad x^2 - y^3 - 4, \quad x + xy + x^2 + y^2$$

sú mnohočleny dvoch premenných a

$$xyz + x^3 - 2, \quad x + y + z, \quad x^2 - y^3 + 3xy$$

sú mnohočleny troch premenných.

Pri počítaní s mnohočlenmi používame pravidlá pre počítanie s reálnymi číslami. Najčastejšie vykonávame tieto operácie:

- usporiadanie mnohočlena vzostupne, resp. zostupne,
- sčítanie a odčítanie mnohočlenov,
- násobenie a umocňovanie mnohočlenov,

- delenie mnohočlena mnohočlenom,
- rozklad mnohočlena na súčin.

Sčítať a odčítať môžeme len členy s rovnakými exponentami premennej.

Príklad 2.4. *Vypočítajme rozdiel polynómov* $(x^2+5x-4)-(6+7x-3x^2)$.
Riešenie.

$$(x^2+5x-4)-(6+7x-3x^2) = x^2+5x-4+3x^2-7x-6 = x^2+3x^2+5x-7x-4-6 = 4x^2-2x-10.$$

Pri *násobení mnohočlenov* je potrebné každý člen jedného mnohočlena vynásobiť každým členom druhého mnohočlena, pričom sa riadime pravidlami pre násobenie mocnín.

Príklad 2.5. *Vypočítajme súčin polynómov* $x^2(x^3+5x-1)$
Riešenie.

$x^2\cdot(x^3+5x-1) = x^2\cdot x^3 + x^2\cdot 5x - x^2\cdot 1 = x^{3+2}+5x^{2+1}-x^2 = x^5+5x^3-x^2.$

Príklad 2.6. *Vypočítajme súčin polynómov* $(x+3)(x^2-4x+3)$.
Riešenie.

$$\begin{aligned}(x+3)\cdot(x^2-4x+3) &= x\cdot x^2 - x\cdot 4x + x\cdot 3 + 3\cdot x^2 - 3\cdot 4x + 3\cdot 3 = x^3-4x^2+3x+3x^2-12x+9\\ &= x^3-x^2-9x+9.\end{aligned}$$

Úlohy

2.6. Vypočítajte.

a) $(-2xy^2z^3)(4x^2y)$. **b)** $x^2(2x+1)$. **c)** $(x-4)(x+4)$.

d) $(x^2-4x)(x+2)$. **e)** $x(x+2)-2x$. **f)** $4(x^2+1)-x(2-x)$.

2.7. Vypočítajte súčin polynómov.

a) $(3x+1)(x^2+4x-2)$. **b)** $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})x$. **c)** $(x+1)(x-2)(2x+3)$.

d) $(x^3-4x^2+1)(x^2-3x+2)$. **e)** $\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4x}{3}-1\right)$. **f)** $(x^3-2x+1)(x^2-1)(x^2-1)$.

Výsledky

2.6. **a)** $-8x^3y^3z^3$. **b)** $2x^3+x^2$. **c)** x^2-16. **d)** x^3-2x^2-8x. **e)** x^2. **f)** $5x^2-2x+4$.

2.7. **a)** $3x^3+13x^2-2x-2$. **b)** x^3-3x. **c)** $2x^3+x^2-7x-6$. **d)** $x^5-7x^4+14x^3-7x^2-3x+2$.

e) $\frac{2x^5}{3}-\frac{x^4}{2}-\frac{8x}{9}+\frac{2}{3}$. **f)** $x^7-4x^5+x^4+5x^3-2x^2-2x+1$.

Pri počítaní s mnohočlenmi môžeme využiť nasledujúce *základné algebraické vzorce*.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Príklad 2.7. *Vypočítajme*

a) $(3x+2)^2$. **b)** $(x+1-y)^2$. **c)** $(y^2+4)^3$.

Riešenie.

a) $(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$.

b) $(x+1-y)^2 = (x+1)^2 - 2\cdot(x+1)\cdot y + y^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 - 2xy - 2y + y^2 = x^2 + 2x + 1 - 2xy - 2y + y^2$.

c) $(y^2+4)^3 = (y^2)^3 + 3(y^2)^2 4 + 3y^2 4^2 + 4^3 = y^6 + 12y^4 + 48y^2 + 64$.

Úlohy

2.8. Vypočítajte.

a) $(x+2)^2$. **b)** $(2x-1)^2$. **c)** $(x^2+y)^2$. **d)** $(3+4x)^2$.

e) $(ab-x)^2$. **f)** $\left(5-\frac{x}{5}\right)^2$. **g)** $(x-1-a)^2$. **h)** $(x+y-a)^2$.

i) $(3-x)^3$. **j)** $(2+x)^3$. **k)** $(x^2-1)^3$. **l)** $(xy+1)^3$.

Výsledky

2.8. **a)** x^2+4x+4. **b)** $4x^2-4x+1$. **c)** $x^4+2x^2y+y^2$. **d)** $9+24x+16x^2$. **e)** $a^2b^2-2abx+x^2$.

f) $25-2x+\frac{x^2}{25}$. **g)** $x^2+a^2-2x-2ax+2a+1$. **h)** $x^2+y^2+a^2+2xy-2ax-2ay$.

i) $27-27x+9x^2-x^3$. **j)** $x^3+6x^2+12x+8$. **k)** $x^6-3x^4+3x^2-1$. **l)** $x^3y^3+3x^2y^2+3xy+1$.

Pri *delení mnohočlenov* sa riadime podobnými pravidlami, aké platia pri delení prirodzených čísel.

Príklad 2.8. *Vydeľme polynómy*

a) $(x^4+5x^3+4x^2+x+1):(x+1)$. **b)** $(x^3+5x^2+7x+4):(x+3)$.

Riešenie.

a)

$$\begin{array}{l}
(x^4+5x^3+4x^2+x+1):(x+1) = x^3+4x^2+1 \\
-\underline{(x^4+x^3)} \\
\qquad 4x^3+4x^2+x+1 \\
\quad -\underline{(4x^3+4x^2)} \\
\qquad\qquad\qquad x+1 \\
\qquad\qquad -\underline{(x+1)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

b)

$$
\begin{array}{l}
(x^3+5x^2+7x+4):(x+3)=x^2+2x+1+\dfrac{1}{x+3}\\
-\underline{(x^3+3x^2)}\\
\qquad 2x^2+7x+4\\
\quad -\underline{(2x^2+6x)}\\
\qquad\qquad x+4\\
\qquad\quad -\underline{(x+3)}\\
\qquad\qquad\quad 1
\end{array}
$$

Úlohy

2.9. Vydeľte mnohočleny.

a) $(x^2+x-6):(x+3)$. **b)** $(a^2-b^2):(a+b)$.

c) $(8x^2+25x+3):(x+3)$. **d)** $(4x^2+3x-10):(4x-5)$.

e) $(2x^2+3x-2):(2x-1)$. **f)** $(4x^3+3x^2-5x-2):(x-1)$.

g) $(10a^3+29a^2+33a+18):(5a^2+7a+6)$. **h)** $(2x^4-3x^3+x^2-3x-1):(x^2+1)$.

i) $(x^5-3x^4+5x^3-11x^2+x+1):(x^2-3x+1)$. **j)** $(x^4+3x^3-2x^2+13x-3):(x^2-x+3)$.

2.10. Vydeľte mnohočleny.

a) $(x^3-2x^2-x-1):(x^2+x-2)$. **b)** $(3x^3-11x^2+7x-7):(x^2-4x+3)$.

c) $(4x^3-15x+14):(2x^2+5x-3)$. **d)** $x^4:(x^4-16)$.

e) $(x^4+x^2-2):(x^2+1)$. **f)** $(4a^4+a^2+1):(a-1)$.

g) $(1+x+3x^2+x^4):(2-x-x^2)$. **h)** $(3y^2-4y+5):(y-1)$.

i) $(4x^4-3x+2):(x^2-x+1)$. **j)** $(x^5-7x^3+x^2-4x+6):(x^2+x+1)$.

Výsledky

2.9. **a)** $x-2$. **b)** $a-b$. **c)** $8x+1$. **d)** $x+2$. **e)** $x+2$. **f)** $4x^2+7x+2$. **g)** $2a+3$.

h) $2x^2-3x-1$. **i)** x^3+4x+1. **j)** x^2+4x-1.

2.10. **a)** $x-3+\dfrac{4x-7}{x^2+x-2}$. **b)** $3x+1+\dfrac{2x-10}{x^2-4x+3}$. **c)** $2x-5+\dfrac{16x-1}{2x^2+5x-3}$. **d)** $1+\dfrac{16}{x^4-16}$.

e) $x^2-\dfrac{2}{x^2+1}$. **f)** $4a^3+4a^2+5a+5+\dfrac{6}{a-1}$. **g)** $-x^2+x-6+\dfrac{7x-13}{x^2+x-2}$. **h)** $3y-1+\dfrac{4}{y-1}$.

i) $4x^2+4x+\dfrac{2-7x}{x^2-x+1}$. **j)** $x^3-x^2-7x+9-\dfrac{6x+3}{x^2+x+1}$.

Rozklad polynómu vynímaním pred zátvorku.
Pred zátvorku môžeme vyňať výraz, keď sa v každom člene výrazu nachádzajú jeho násobky, v zátvorke potom ostanú členy vydelené týmto výrazom.

Príklad 2.9. *Rozložme nasledujúce mnohočleny na súčin vynímaním pred zátvorku.*

a) $3xy-6x^2$. **b)** x^2y-xy^2. **c)** $x^3+4x^2-4x-16$.

Riešenie.

a) $3xy-6x^2=3x\cdot y-3x\cdot 2x=3x(y-2x)$.

b) $x^2y - xy^2 = xy \cdot x - xy \cdot y = xy(x-y).$

c) $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = x^2 \cdot x + x^2 \cdot 4 - 4 \cdot x - 4 \cdot 4 = x^2(x+4) - 4(x+4) = (x+4)(x^2-4)$
$= (x+4)(x^2-2^2) = (x+4)(x-2)(x+2).$

Úlohy

2.11. Rozložte dané mnohočleny na súčin vynímaním pred zátvorku.

a) $3x + 6.$ **b)** $x^2 + 4x.$ **c)** $x^4 + x^3 - x^2.$

d) $4x^5 + 2x^2 + 10x^3.$ **e)** $2xy^2 + 5x^2y^3 - \dfrac{xy^4}{3}.$ **f)** $a^4 + a^3 + a + 1.$

g) $x^3 + 5x^2 + 4x.$ **h)** $ax^3 - 4a^3x.$ **i)** $15x^2y - 5xy^2.$

2.12. Rozložte nasledujúce mnohočleny na súčin.

a) $s^2 - m^2.$ **b)** $16a^2 - 81b^2.$ **c)** $64x^2y^6 - 25y^2.$

d) $x^4 - 1.$ **e)** $x^6 - y^6.$ **f)** $x^4y^8 - 16.$

2.13. Rozložte nasledujúce mnohočleny na súčin.

a) $9x^2 + 6xy + y^2.$ **b)** $4x^2 + 6xy + \dfrac{9}{4}y^2.$ **c)** $4a^2b^4 + 4ab^2 + 1.$

d) $27 - x^3.$ **e)** $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3.$ **f)** $8 + a^3.$

2.14. Zjednodušte nasledujúce výrazy a určte podmienky, kedy majú zmysel. Pri úprave vhodne rozložte čitateľa i menovateľa na súčin.

a) $\dfrac{2ax + 3bx}{4a^2 - 9b^2}.$ **b)** $\dfrac{ax^3 + 3ab}{x^4 + 3xb}.$ **c)** $\dfrac{25a^2 - 4}{15a - 6}.$

d) $\dfrac{9x^2 - y^2}{3x^2 + xy}.$ **e)** $\dfrac{49a^2 - 36b^2}{49a^2 - 84ab + 36b^2}.$ **f)** $\dfrac{6a + 3}{4a^2 + 4a + 1}.$

g) $\dfrac{2ax + 3 + 2ax^2 + 3x}{2 + 2x}.$ **h)** $\dfrac{4 - y^2}{8 - 12y + 6y^2 - y^3}.$ **i)** $\dfrac{-64a^2 + 25b^2}{15b + 24a}.$

Výsledky

2.11. **a)** $3(x+2).$ **b)** $x(x+4).$ **c)** $x^2(x^2+x-1).$ **d)** $2x^2(2x^3+5x+1).$ **e)** $xy^2\left(2 + 5xy - \dfrac{y^2}{3}\right).$

f) $(a+1)(a+1)(a^2-a+1).$ **g)** $x(x+1)(x+4).$ **h)** $ax(x-2a)(x+2a).$ **i)** $5xy(3x-y).$

2.12. **a)** $(s+m)(s-m).$ **b)** $(4a+9b)(4a-9b).$ **c)** $y^2(8xy^2-5)(8xy^2+5).$ **d)** $(x^2+1)(x-1)(x+1).$

e) $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$ **f)** $(xy^2-2)(xy^2+2)(x^2y^4+4).$

2.13. **a)** $(3x+y)^2.$ **b)** $\left(2x + \dfrac{3}{2}y\right)^2.$ **c)** $(2ab^2+1)(2ab^2+1).$ **d)** $(3-x)(9+3x+x^2).$

e) $(2a-b)^3.$ **f)** $(2+a)(4-2a+a^2).$

2.14. **a)** $\dfrac{x}{2a-3b},\ a \neq \pm\dfrac{3b}{2}.$ **b)** $\dfrac{a}{x},\ x \neq 0, b \neq -\dfrac{x^3}{3}.$ **c)** $\dfrac{5a+2}{3},\ a \neq \dfrac{2}{5}.$ **d)** $\dfrac{3x-y}{x},\ x \neq 0, y \neq -3x.$

e) $\dfrac{7a+6b}{7a-6b},\ a \neq \dfrac{6b}{7}.$ **f)** $\dfrac{3}{2a+1},\ a \neq -\dfrac{1}{2}.$ **g)** $\dfrac{2ax+3}{2},\ x \neq -1.$ **h)** $\dfrac{2+y}{(2-y)^2},\ y \neq 2.$

i) $\dfrac{5b-8a}{3},\ a \neq -\dfrac{5b}{8}.$

Rozklad kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov.
Reálne číslo, pre ktoré platí, že hodnota polynómu v tomto čísle je rovná nule, sa nazýva koreňom polynómu.

Napríklad čísla -3 a 7 sú koreňmi polynómu $P(x) = x^2 - 4x - 21$, pretože $P(-3) = (-3)^2 - 4 \cdot (-3) - 21 = 9 + 12 - 21 = 0$ a $P(7) = 7^2 - 4 \cdot 7 - 21 = 49 - 28 - 21 = 0$.

Vo všeobecnosti, ak sú x_1, x_2 korene polynómu $ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, tak platí

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Uvažujme jednoduchší prípad, ak $a = 1$. Rozložme na súčin koreňových činiteľov trojčlen $x^2 + px + q$, to znamená hľadáme také čísla x_1, x_2, pre ktoré platí

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

Porovnaním koeficientov dostávame

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Teda korene kvadratického trojčlena sú také čísla, ktorých súčin je rovný číslu q a súčet je rovný číslu $-p$.

Poznamenajme, že každý polynóm tretieho a vyššieho stupňa je v množine reálnych čísel rozložiteľný. Teda dá sa napísať v tvare súčinu polynómov 1. stupňa a 2. stupňa. Ak pre polynóm 2. stupňa $(x^2 + \beta x + \gamma)$ platí $\beta^2 - 4\gamma < 0$, tak tento polynóm je už nerozložiteľný v množine reálnych čísel. Pozri tiež pokapitolu 4.2 Kvadratické rovnice a nerovnice.

Príklad 2.10. *Rozložme na súčin koreňových činiteľov kvadratický trojčlen $x^2 - 7x + 10$.*

Riešenie. Koreňové činitele x_1, x_2 musia vyhovovať rovniciam

$$x_1 + x_2 = -(-7), \quad x_1 \cdot x_2 = 10.$$

Ľahko sa zistí, že

$$2 + 5 = 7, \quad 2 \cdot 5 = 10,$$

odtiaľ $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ a pre rozklad dostávame

$$x^2 - 7x + 10 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 2)(x - 5).$$

•

Príklad 2.11. *Rozložme na súčin mnohočlen $x^4 - 8x^2 - 9$.*

Riešenie. Použitím substitúcie $x^2 = t$ dostávame kvadratický trojčlen

$$(x^2)^2 - 8x^2 - 9 = t^2 - 8t - 9.$$

Pre koreňové činitele t_1, t_2 platí

$$t_1 + t_2 = -(-8), \quad t_1t_2 = -9.$$

Pričom

$$9 + (-1) = 8, \quad 9 \cdot (-1) = -9,$$

teda $t_1 = 9$, $t_2 = -1$ a pre rozklad kvadratického trojčlena máme

$$t^2 - 8t - 9 = (t - t_1)(t - t_2) = (t - 9)(t + 1).$$

Keďže $t = x^2$, dostaneme

$$(t - 9)(t + 1) = (x^2 - 9)(x^2 + 1) = (x + 3)(x - 3)(x^2 + 1).$$

•

Pri hľadaní koreňových činiteľov polynómu ax^2+bx+c môžeme postupovať aj tak, že pomocou diskriminantu vypočítame korene x_1, x_2 kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ (pozri pokapitolu 4.2 Kvadratické rovnice a nerovnice) a vytvoríme súčin $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Príklad 2.12. *Rozložme na súčin koreňových činiteľov kvadratický trojčlen* $6x^2 - x - 1$.

Riešenie. Uvažujme kvadratickú rovnicu

$$6x^2 - x - 1 = 0.$$

Pre jej korene platí

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} = \begin{cases} \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2} \\ \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Teda

$$6x^2 - x - 1 = 6(x - x_1)(x - x_2) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right).$$

Úlohy

2.15. Rozložte na súčin koreňových činiteľov.

a) $x^2 + x - 12$. **b)** $x^2 - x - 2$. **c)** $x^2 - 3x - 10$. **d)** $x^2 + 12x + 35$.

e) $x^2 - 5x + 6$. **f)** $x^2 - 7x - 8$. **g)** $21 - 4x - x^2$. **h)** $3 + 2x - x^2$.

2.16. Rozložte na súčin koreňových činiteľov.

a) $2x^2 - 5x - 3$. **b)** $3x^2 - 5x - 2$. **c)** $2x^2 + 9x - 5$. **d)** $3x^2 + 4x - 4$.

e) $x^4 - 10x^2 + 9$. **f)** $x^4 - 3x^2 - 4$. **g)** $x^4 - 5x^2 + 4$. **h)** $x^4 + 3x^2 - 4$.

Výsledky

2.15. **a)** $(x+4)(x-3)$. **b)** $(x+1)(x-2)$. **c)** $(x+2)(x-5)$. **d)** $(x+5)(x+7)$. **e)** $(x-2)(x-3)$.

f) $(x+1)(x-8)$. **g)** $(x+7)(3-x)$. **h)** $(x+1)(3-x)$.

2.16. **a)** $(2x+1)(x-3)$. **b)** $(3x+1)(x-2)$. **c)** $(2x-1)(x+5)$. **d)** $(3x-2)(x+2)$.

e) $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$. **f)** $(x-2)(x+2)(x^2+1)$. **g)** $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.

h) $(x-1)(x+1)(x^2+4)$.

Úprava kvadratického trojčlena na úplný štvorec. Pri úprave polynómu $x^2 + px + q$ na úplný štvorec platí

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q,$$

pričom pri úprave využívame vzorce $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Príklad 2.13. *Doplňme kvadratický trojčlen* $x^2 - 7x + 10$ *na úplný štvorec.*

Riešenie.

$$x^2 - 7x + 10 = x^2 + (-7)x + 10 = \left(x + \frac{-7}{2}\right)^2 - \left(\frac{-7}{2}\right)^2 + 10 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{40}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Poznamenajme, že posledný výraz je tvaru $a^2 - b^2$. Teda vyžijúc vzorec $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ho môžeme ďalej rozložiť na súčin.

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right) = \left(x - \frac{10}{2}\right)\left(x - \frac{4}{2}\right) = (x-5)(x-2).$$

Úlohy

2.17. Doplňte kvadratický trojčlen na úplný štvorec.

a) x^2+2x+5. **b)** x^2+6x-7. **c)** x^2+5x-1. **d)** x^2+4x+6.

e) x^2+5x-6. **f)** $x^2-4x+20$. **g)** x^2-2x+2. **h)** $x^2-6x+25$.

2.18. Doplňte kvadratický trojčlen na úplný štvorec.

a) $2x^2+4x+3$. **b)** $9x^2+4x+1$. **c)** $16x^2+4x+1$. **d)** $1-4x-x^2$.

e) $3-2x-x^2$. **f)** $4-2x-x^2$. **g)** $5+4x-4x^2$. **h)** $2-3x-9x^2$.

Výsledky

2.17. **a)** $(x+1)^2+4$. **b)** $(x+3)^2-16$. **c)** $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{29}{4}$. **d)** $(x+2)^2+2$. **e)** $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$.

f) $(x-2)^2+16$. **g)** $(x-1)^2+1$. **h)** $(x-3)^2+16$.

2.18. **a)** $(\sqrt{2}x+\sqrt{2})^2+1$. **b)** $\left(3x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9}$. **c)** $\left(4x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. **d)** $5-(x+2)^2$. **e)** $4-(x+1)^2$.

f) $5-(x+1)^2$. **g)** $6-(2x-1)^2$. **h)** $\frac{9}{4}-\left(3x+\frac{1}{2}\right)^2$.

2.3 Racionálne lomené výrazy

Racionálny lomený výraz je výraz tvaru podielu dvoch mnohočlenov

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0},$$

kde n,m sú prirodzené čísla a $a_0,a_1,\ldots,a_n,b_0,b_1,\ldots,b_m$ sú reálne čísla, pričom $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$.

Racionálne lomené výrazy môžeme, podobne ako zlomky, rozširovať, krátiť, sčítavať, odčítavať, násobiť a deliť a to podľa rovnakých pravidiel, aké platia pre operácie so zlomkami. Musíme však stále uvádzať, za akých podmienok majú dané výrazy zmysel.

Príklad 2.14. *Zjednodušme výraz* $\dfrac{x^3+x^2-9x-9}{x^3+4x^2+3x}$.

Riešenie.

$$\frac{x^3+x^2-9x-9}{x^3+4x^2+3x}=\frac{x^2\cdot x+x^2\cdot 1-9\cdot x-9\cdot 1}{x\cdot x^2+x\cdot 4x+x\cdot 3}=\frac{x^2(x+1)-9(x+1)}{x(x^2+4x+3)}=\frac{(x+1)(x^2-9)}{x\left[x^2+(3+1)x+(3\cdot 1)\right]}$$
$$=\frac{(x+1)(x^2-3^2)}{x(x+1)(x+3)}=\frac{(x+1)(x-3)(x+3)}{x(x+1)(x+3)}=\frac{x-3}{x}.$$

Keďže výraz obsahuje zlomok, musí platiť
$x^3+4x^2+3x\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(x+1)(x+3)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\neq -3,\ x\neq -1,\ x\neq 0.$ •

Príklad 2.15. *Vypočítajme* $\dfrac{2x-3}{x+1}-\dfrac{x+1}{2-2x}-\dfrac{x^2+3}{2x^2-2}$.

Riešenie.

$$\frac{2x-3}{x+1}-\frac{x+1}{2-2x}-\frac{x^2+3}{2x^2-2}=\frac{2x-3}{x+1}-\frac{x+1}{2(1-x)}-\frac{x^2+3}{2(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{(2x-3)2(x-1)+(x+1)^2-(x^2+3)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{4x^2-4x-6x+6+x^2+2x+1-x^2-3}{2(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{4x^2-8x+4}{2(x-1)(x+1)}=\frac{4(x^2-2x+1)}{2(x-1)(x+1)}=\frac{4(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)}=\frac{2(x-1)}{x+1}=\frac{2x-2}{x+1}.$$

V danom výraze sa nachádzajú tri zlomky. Menovateľ každého z nich musí byť rôzny od nuly. Preto musia byť splnené nasledujúce podmienky.
I. podmienka ... $x+1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -1$.
II. podmienka ... $2-2x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x \neq -2 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1$.
III. podmienka ... $2x^2-2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-1)(x+1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \pm 1$.

Keďže podmienky I., II. a III. musia platiť súčasne, dostávame $x \neq \pm 1$. •

Príklad 2.16. *Vypočítajme* $\dfrac{x}{x+5} \cdot \dfrac{x^2+1}{x-3}$.

Riešenie.

$$\frac{x}{x+5} \cdot \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{x \cdot (x^2+1)}{(x+5)\cdot(x-3)} = \frac{x^3+x}{x^2-3x+5x-15} = \frac{x^3+x}{x^2+2x-15}.$$

Podmienky, kedy má daný výraz zmysel:
I. menovateľ prvého zlomku musí byť rôzny od nuly ... $x+5 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -5$.
II. menovateľ druhého zlomku musí byť rôzny od nuly ... $x-3 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 3$.

Teda $x \neq -5$ a $x \neq 3$. •

Príklad 2.17. *Vypočítajme* $\dfrac{x-1}{x+3} : \dfrac{x+2}{x-2}$.

Riešenie.

$$\frac{x-1}{x+3} : \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-1}{x+3} \cdot \frac{x-2}{x+2} = \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x+3)\cdot(x+2)} = \frac{x^2-2x-x+2}{x^2+2x+3x+6} = \frac{x^2-3x+2}{x^2+5x+6}.$$

Výraz obsahuje dva zlomky. Odtiaľ dostávame dve podmienky.
I. podmienka ... $x+3 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -3$.
II. podmienka ... $x-2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$.

Okrem toho sa nemôže deliť nulou. Preto musíme uvažovať ešte jednu podmienku.
III. podmienka ... $\dfrac{x+2}{x-2} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -2$.

Preto $x \neq -3$, $x \neq \pm 2$. •

Úlohy

2.19. Zjednodušte nasledujúce výrazy a určte podmienky, kedy majú zmysel.

a) $\dfrac{x^2-9}{x-3}$. **b)** $\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$. **c)** $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

d) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-x-6}$. **e)** $\dfrac{x^2+x-12}{x^2+5x+4}$. **f)** $\dfrac{3x^2+2x-1}{3x^2+x}$.

2.20. Zjednodušte nasledujúce výrazy a určte podmienky, kedy majú zmysel.

a) $\dfrac{x^2-4}{x^3+8}$. **b)** $\dfrac{4x^2+4}{2x^2+2}$. **c)** $\dfrac{x^3+27}{x+3}$.

d) $\dfrac{x^3+3x^2+x+3}{x^2+2x-3}$. **e)** $\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. **f)** $\dfrac{2x^3-4x^2+3x-6}{x^3-2x^2+x-2}$.

2.21. Zjednodušte a určte podmienky, kedy majú výrazy zmysel.

a) $\dfrac{3x+2}{6} - \dfrac{x-1}{18}$. **b)** $\dfrac{8}{x} - \dfrac{x-3}{2x} + \dfrac{6-4x}{6x}$.

c) $\dfrac{2x}{2x-y} + \dfrac{y}{y-2x}$. **d)** $\dfrac{12}{4x^2-9} + \dfrac{2}{3-2x}$.

e) $\dfrac{x-1}{x+2} + 2 - \dfrac{1}{x}$. **f)** $\dfrac{3y}{y+2} + \dfrac{3}{y^2-4}$.

g) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{x-1}{x^2-9} + \dfrac{x+1}{2x-6}$. **h)** $\dfrac{x}{x-a} + \dfrac{3x}{x+a} - \dfrac{2xa}{x^2-a^2}$.

2.22. Zjednodušte a určte podmienky, kedy majú výrazy zmysel.

a) $\left(\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{a}{a-2}\right)\left(a+\dfrac{a+4}{1-2a}\right).$ **b)** $\left(\dfrac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}\right).$

c) $\left(\dfrac{x-y}{x+y}-1\right):\left(\dfrac{2y}{x+y}-1\right)-\dfrac{4y^2}{x^2-y^2}.$ **d)** $\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}\right).$

e) $\left(\dfrac{1}{y}-1\right)\left(\dfrac{1}{y+1}-\dfrac{2y}{y^2-1}\right).$ **f)** $\left(\dfrac{x}{x^2-4}-\dfrac{8}{x^2+2x}\right)\dfrac{x^2-2x}{4-x}+\dfrac{x+8}{x+2}.$

2.23. Upravte a určte podmienky, kedy majú dané výrazy zmysel.

a) $\left(\dfrac{x+3y}{(x-y)^2}+\dfrac{x-3y}{x^2-y^2}\right):\dfrac{x^2+3y^2}{(x-y)^2}.$ **b)** $\left(a+\dfrac{ab}{a-b}\right)\left(\dfrac{ab}{a+b}-a\right)\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$

c) $\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{2b^2}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{2a+2b}-\dfrac{a+b}{2a-2b}\right).$ **d)** $\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{x^2}{1-x^2}\right).$

e) $\dfrac{a^4-b^4}{a^2b^2}:\left[\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)\left(1-\dfrac{2a}{b}+\dfrac{a^2}{b^2}\right)\right].$ **f)** $\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right):\left(a-\dfrac{4ab}{a+b}+b\right).$

2.24. Zjednodušte a určte podmienky, kedy majú výrazy zmysel.

a) $\left(\dfrac{1}{1-x}-1\right):\left(x-\dfrac{1-2x^2}{1-x}+1\right).$ **b)** $\left[\left(\dfrac{a+2}{a-2}\right)^3:\dfrac{a^3+4a^2+4a}{3a^2-12a+12}\right]\dfrac{a}{3}.$

c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}\cdot\dfrac{2-\dfrac{1+b^2}{b}}{\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{2}{b}+1}.$ **d)** $\dfrac{a+1}{a^2-2a}+\dfrac{a+1}{a^2+2a}-\dfrac{2a}{a^2-4}.$

e) $\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{2a}{a^2-1}\right)\left(\dfrac{1}{a}-1\right).$ **f)** $\dfrac{a^2-x^2}{a+b}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{ax+x^2}\left(a+\dfrac{ax}{a-x}\right).$

g) $\left(\dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+x+y\right):\left(\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{y^2}{x^2}\right).$ **h)** $\left(b+\dfrac{a-b}{1+ab}\right):\left(1-\dfrac{b(a-b)}{1+ab}\right).$

Výsledky

2.19. **a)** $x+3,\ x\neq 3.$ **b)** $\dfrac{1}{x-1},\ x\neq 1,\ x\neq 2.$ **c)** $\dfrac{x+1}{x+4},\ x\neq \pm 4.$ **d)** $\dfrac{x+3}{x-3},\ x\neq -2,\ x\neq 3.$

e) $\dfrac{x-3}{x+1},\ x\neq -4,\ x\neq -1.$ **f)** $\dfrac{x+1}{x},\ x\neq 0,\ x\neq \dfrac{1}{3}.$

2.20. **a)** $\dfrac{x-2}{x^2-2x+4},\ x\neq -2.$ **b)** $2,\ x\in\mathbb{R}.$ **c)** $x^2-3x+9,\ x\neq -3.$ **d)** $\dfrac{x^2+1}{x-1},\ x\neq -3,\ x\neq 1.$

e) $\dfrac{4x^2+2x+1}{3x-1},\ x\neq \dfrac{1}{3},\ x\neq \dfrac{1}{2}.$ **f)** $\dfrac{2x^2+3}{x^2+1},\ x\neq 2.$

2.21. **a)** $\dfrac{8x+7}{18},\ x\in\mathbb{R}.$ **b)** $\dfrac{7(9-x)}{6x},\ x\neq 0.$ **c)** $1,\ x\neq \dfrac{y}{2}.$ **d)** $\dfrac{-2}{2x+3},\ x\neq \pm\dfrac{3}{2}.$

e) $\dfrac{3x^2+2x-2}{x(x+2)},\ x\neq 0,\ x\neq -2.$ **f)** $\dfrac{3(y-1)^2}{(y-2)(y+2)},\ y\neq \pm 2.$ **g)** $\dfrac{(x+1)(3x+5)}{2(x-3)(x+3)},\ x\neq \pm 3.$

h) $\dfrac{4x}{x+a},\ x\neq \pm a.$

2.22. **a)** $-4,\ a\neq -1,\ a\neq \dfrac{1}{2},\ a\neq 2.$ **b)** $\dfrac{1-a}{1-2a},\ a\neq \pm 1,\ a\neq \pm\dfrac{1}{2}.$ **c)** $\dfrac{2y}{x+y},\ x\neq \pm y.$

d) $\dfrac{x}{x-y},\ x\neq \pm y.$ **e)** $\dfrac{1}{y},\ y\neq 0,\ y\neq \pm 1.$ **f)** $\dfrac{12}{x+2},\ x\neq 0,\ x\neq \pm 2,\ x\neq 4.$

2.23. **a)** $\dfrac{2}{x+y}$, $x \neq \pm y$. **b)** $\dfrac{-a^4}{a^2+b^2}$, $a \neq \pm b$. **c)** $\dfrac{2(a-b)}{a(a+b)}$, $a \neq \pm b, a \neq 0, b \neq 0$. **d)** $\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \neq \pm 1$.

e) $\dfrac{a+b}{a-b}$, $a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$. **f)** $\dfrac{1}{a-b}$, $a \neq \pm b$.

2.24. **a)** $\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0,\ x \neq 1$. **b)** $\dfrac{a+2}{a-2}$, $a \neq 0,\ x \neq \pm 2$. **c)** $2a,\ b \neq 0,\ b \neq 1,\ a \neq \pm b$.

d) $\dfrac{2}{a^2-4}$,$a \neq 0,\ a \neq \pm 2$. **e)** $\dfrac{1}{a}$, $a \neq 0,\ a \neq \pm 1$. **f)** $\dfrac{(a-b)a^2}{x}$, $x \neq 0, a \neq \pm x, a \neq -b$.

g) $\dfrac{x^2}{x-y}$, $x \neq 0, y \neq 0, x \neq \pm y$. **h)** $a,\ ab \neq -1$.

Uvažujme racionálny lomený výraz $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

- Ak je stupeň polynómu v čitateli menší ako v menovateli, t. j. $n < m$, hovoríme o rýdzoracionálnom lomenom výraze.
- Ak je stupeň polynómu v čitateli väčší alebo rovný ako v menovateli, t. j. $n \geq m$, tak môžeme racionálny lomený výraz zapísať v tvare súčtu polynómu a rýdzoracionálneho lomeného výrazu

  $$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{U_k(x)}{Q_m(x)},$$

  kde $k < m$. Pri úprave postupujeme rovnako ako pri delení polynómu polynómom, (pozri Príklad 2.8).

Príklad 2.18. *Rozložme výraz* $\dfrac{3x^3+5x^2-4x+5}{x^2+4}$ *na súčet polynómu a rýdzoracionálneho lomeného výrazu.*

Riešenie.

$$\begin{array}{l}
(3x^3+5x^2-4x+5) : (x^2+4) = 3x+5+\dfrac{-16x-15}{x^2+4}. \\
-\underline{(3x^3+12x)} \\
\qquad 5x^2-16x+5 \\
\quad -\underline{(5x^2+20)} \\
\qquad\quad -16x-15
\end{array}$$

Teda

$$\frac{3x^3+5x^2-4x+5}{x^2+4} = 3x+5+\frac{-16x-15}{x^2+4}.$$

Úlohy

2.25. Rozložte nasledujúce výrazy na súčet polynómu a rýdzoracionálneho lomeného výrazu.

a) $\dfrac{a^3+9}{a+3}$. **b)** $\dfrac{x^4+x^2-1}{x-2}$. **c)** $\dfrac{x^4}{x^2+3}$.

d) $\dfrac{12-x^2}{x+3}$. **e)** $\dfrac{5-t^2}{2-t}$. **f)** $\dfrac{x^2+4x+6}{x^2+2x+4}$.

2.26. Rozložte nasledujúce výrazy na súčet polynómu a rýdzoracionálneho lomeného výrazu.

a) $\dfrac{2x^3-x^2+11x-4}{x^2+5}$. **b)** $\dfrac{x^3+6x^2+14x+3}{x^2+6x+14}$. **c)** $\dfrac{-x^3+2x^2-5x+2}{x^2-2x+5}$.

d) $\dfrac{x^4}{x^2+2}$. **e)** $\dfrac{x^3+3}{x+1}$. **f)** $\dfrac{x^3+1}{x+1}$.

Výsledky

2.25. **a)** $a^2-3a+9-\dfrac{18}{a+3}$. **b)** $x^3+2x^2+5x+10+\dfrac{19}{x-2}$. **c)** $x^2-3+\dfrac{9}{x^2+3}$. **d)** $-x+3+\dfrac{3}{x+3}$.

e) $2+t+\dfrac{1}{2-t}$. **f)** $1+\dfrac{2x+2}{x^2+2x+4}$.

2.26. **a)** $2x-1+\dfrac{x+1}{x^2+5}$. **b)** $x+\dfrac{3}{x^2+6x+14}$. **c)** $-x+\dfrac{2}{x^2-2x+5}$. **d)** $x^2-2+\dfrac{4}{x^2+2}$.

e) $x^2-x+1+\dfrac{2}{x+1}$. **f)** x^2-x+1.

2.4 Iracionálne výrazy

Iracionálne výrazy sú výrazy, ktoré obsahujú odmocniny. Pri úpravách sa používajú pravidlá, aké platia pre počítanie so zlomkami, viď podkapitola 1.1 Prirodzené, celé, racionálne a iracionálne čísla.

Pod *usmernením zlomku* rozumieme odstránenie odmocnín z menovateľa, pričom sa využívajú hlavne nasledujúce vzorce.

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Príklad 2.19. *Usmernime nasledujúce výrazy.*

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}-2}$. **b)** $\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x}}$. **c)** $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$. **d)** $\dfrac{x^2-5x}{\sqrt{3x+1}-4}$.

Riešenie.
Pri úprave využijeme vynásobenie výrazu jednotkou vo vhodnom tvare.

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}-2}=\dfrac{4}{\sqrt{2}-2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+2}=\dfrac{4(\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2})^2-2^2}=\dfrac{4(\sqrt{2}+2)}{2-4}=-2(\sqrt{2}+2)$.

b) $\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x}}=\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\dfrac{(x^2+x)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\dfrac{x(x+1)\sqrt{x}}{x}=(x+1)\sqrt{x}$.

Poznamenajme, že výraz je definovaný pre $x>0$.

c) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})\cdot(1-\sqrt{x})}=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1^2-(\sqrt{x})^2}=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$.

Dané úpravy je možné vykonať len ak $x\geq 0$, $x\neq 1$.

d)

$$\begin{aligned}\frac{x^2-5x}{\sqrt{3x+1}-4}&=\frac{x^2-5x}{\sqrt{3x+1}-4}\cdot\frac{\sqrt{3x+1}+4}{\sqrt{3x+1}+4}=\frac{(x^2-5x)\cdot(\sqrt{3x+1}+4)}{(\sqrt{3x+1}-4)\cdot(\sqrt{3x+1}+4)}\\&=\frac{(x^2-5x)(\sqrt{3x+1}+4)}{(\sqrt{3x+1})^2-4^2}=\frac{x(x-5)(\sqrt{3x+1}+4)}{3x+1-16}=\frac{x(x-5)(\sqrt{3x+1}+4)}{3x-15}\\&=\frac{x(x-5)(\sqrt{3x+1}+4)}{3(x-5)}=\frac{x(\sqrt{3x+1}+4)}{3}.\end{aligned}$$

Z úprav je zrejmé, že výraz má zmysel pre $x\geq-\frac{1}{3}$, $x\neq 5$.

•

Úlohy

2.27. Usmernite nasledujúce zlomky.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **b)** $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$. **c)** $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$. **d)** $\dfrac{3}{1-\sqrt{2}}$.

e) $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$. **f)** $\dfrac{44}{5-\sqrt{3}}$. **g)** $\dfrac{3}{1+\sqrt{7}}$. **h)** $\dfrac{3\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}}$.

2.28. Usmernite nasledujúce výrazy.

a) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$. **b)** $\dfrac{3-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$. **c)** $\dfrac{4-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$. **d)** $\dfrac{2+4\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

e) $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}$. **f)** $\dfrac{5\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+3}$. **g)** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$. **h)** $(13-7\sqrt{3})\dfrac{5+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

2.29. Usmernite výrazy a určte podmienky, kedy majú zmysel.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **b)** $\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$. **c)** $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

d) $\dfrac{x^2-x}{\sqrt{1+x}-1}$. **e)** $\dfrac{x^2+x}{3-\sqrt{10+x}}$. **f)** $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+3x}+x-1}$.

2.30. Zjednodušte nasledujúce výrazy a určte podmienky, kedy majú zmysel.

a) $\dfrac{a\sqrt{a}-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$. **b)** $\left(\dfrac{x\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{3\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}-\dfrac{18}{\sqrt{x^2-9}}\right):\sqrt[4]{(x^2-9).(x-3)}$.

c) $\left(\dfrac{\sqrt{x}-x}{1-\sqrt{x}}\right)^2$. **d)** $\left(\dfrac{2-x\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\left(\dfrac{2+x\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right):\dfrac{4+x^2}{4x-1}$.

2.31. Zjednodušte a určte podmienky, kedy majú dané výrazy zmysel.

a) $\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **b)** $\sqrt{1+\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)^2}$.

c) $\sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\left(\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}$. **d)** $\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}$.

e) $\sqrt{1+\left(\sqrt{x}+x\sqrt{x}\right)^2}$. **f)** $\sqrt{1+\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}\right)^2}$.

2.32. Zjednodušte a určte podmienky, kedy majú dané výrazy zmysel. V prípadoch a) a b) pri úprave použite vzťah $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

a) $\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2(1-\sin t)^2}$. **b)** $\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{\sin x}\cdot\cos x\right)^2}$.

c) $\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}$. **d)** $\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)\right)^2}$.

e) $\sqrt{1+\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}$. **f)** $\ln x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Výsledky

2.27. **a)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **b)** $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. **c)** $\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}$. **d)** $-3-3\sqrt{2}$. **e)** $3+\sqrt{5}$. **f)** $2(5+\sqrt{3})$. **g)** $\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$.

h) $6\sqrt{5}+3\sqrt{15}$.

2.28. **a)** $\frac{7-5\sqrt{3}}{13}$. **b)** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. **c)** $2-\sqrt{2}$. **d)** $5-\sqrt{3}$. **e)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **f)** $\frac{16-17\sqrt{2}}{-7}$.

g) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2$. **h)** 22.

2.29. **a)** $\frac{\sqrt{x}}{x}$, $x>0$. **b)** $\frac{2+\sqrt{x}}{4-x}$, $x\geq 0$, $x\neq 4$. **c)** $\sqrt{x}+1$, $x\geq 0$, $x\neq 1$.

d) $(x-1)(\sqrt{1+x}+1)$, $x\geq -1$, $x\neq 0$. **e)** $-x(3+\sqrt{10+x})$, $x\geq -10$, $x\neq -1$.

f) $\frac{x(\sqrt{1+3x}+1-x)}{5-x}$, $x\geq -\frac{1}{3}$, $x\neq 0$, $x\neq 5$.

2.30. **a)** $-(a+\sqrt{a})$, $a\geq 0$, $a\neq 1$. **b)** $\sqrt[4]{x+3}$, $x>3$. **c)** x, $x\geq 0$, $x\neq 1$. **d)** $\frac{1-x}{x}$, $x>0$, $x\neq \frac{1}{4}$.

2.31. **a)** $\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $x\in(0,1)$. **b)** $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0,1\rangle$. **c)** 2, $x\in(-2,2)$. **d)** $\frac{\sqrt{4x+1}}{2}$, $x>0$.

e) $\sqrt{x^3+2x^2+x+1}$, $x\geq 0$. **f)** $\frac{\sqrt{x+3}}{2}$, $x\geq 1$.

2.32. **a)** $|a|\sqrt{3-2\cos t-2\sin t}$, $a\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}$. **b)** $\frac{1}{\sin x}$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **c)** $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $x\neq 0$.

d) $\frac{1+x^2}{|1-x^2|}$, $x\neq\pm 1$. **e)** $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$. **f)** $\ln x$, $x>0$, $x\neq 1$.

2.5 Testy

2.5.1 Test 1

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

2.1. Výraz $\left(\frac{a^3b^2}{a^4b}\right)^3$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ možno upraviť na tvar

A) $(ab)^3$. **B)** $\left(\frac{b}{a}\right)^3$. **C)** $\left(\frac{a}{b}\right)^3$. **D)** $(ab)^{-3}$.

2.2. Určte hodnotu výrazu $\frac{x^2-4x}{16-x^2}$ pre $x = 4$.

A) 0. **B)** $-\frac{1}{2}$.

C) -2. **D)** Pre $x = 4$ výraz nie je definovaný.

2.3. Výraz $\frac{3xy-y^2}{3x^2-yx+3x-y}$, $x \neq -1$, $y \neq 3x$ sa dá upraviť na tvar

A) $\frac{3-y}{3x^2+3x}$. **B)** $\frac{y}{x+1}$. **C)** $\frac{3xy+y}{x+1}$. **D)** $\frac{y}{x-1}$.

2.4. Správne usporiadanie čísel $\frac{5}{\sqrt{5}}$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}$ je

A) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$. **B)** $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} < \frac{5}{\sqrt{5}} < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}$.

C) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} < \frac{5}{\sqrt{5}} < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$. **D)** $\frac{5}{\sqrt{5}} < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}$.

2.5. Výraz $\frac{\frac{3x^2}{x^2-1}+1}{\frac{x}{x-1}+1}$ je ekvivalentný s výrazom $\frac{2x+1}{x+1}$ iba vtedy, keď

A) $x \neq -1$. **B)** $x \neq \pm 1$. **C)** $x \neq \pm 1$, $x \neq \pm\frac{1}{2}$. **D)** $x \neq \pm 1$, $x \neq \frac{1}{2}$.

Správne odpovede: B, D, B, C, D.

2.5.2 Test 2

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

2.1. Pre $x \neq -\frac{5y}{8}$ je výraz $\dfrac{64x^2 - 25y^2}{15y + 24x}$ ekvivalentný s výrazom

A) $\dfrac{8x - 5y}{3}$. **B)** $\dfrac{8x + 5y}{3}$. **C)** $8x - 5y$. **D)** $\dfrac{40xy}{3}$.

2.2. Určte hodnotu výrazu $\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 9}$ pre $x = -3$.

A) 0. **B)** 1.

C) 3. **D)** Pre $x = -3$ výraz nie je definovaný.

2.3. Výraz $\dfrac{x^2 - y^2}{x - x^2 + y - xy}$, $x \neq 1$, $x \neq -y$ možno upraviť na tvar

A) $\dfrac{x - y}{1 + x}$. **B)** $\dfrac{x - y}{1 - x}$. **C)** $\dfrac{y - x}{x - 1}$. **D)** $\dfrac{y}{x - 1}$.

2.4. Usmernením zlomku $\dfrac{5 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ dostaneme číslo

A) $7 - 6\sqrt{2}$. **B)** $6\sqrt{2} - 7$. **C)** -1. **D)** 5.

2.5. Delením polynómov $(x^3 - x^2 - 5x + 2)$ a $(x + 2)$ v danom poradí, dostaneme polynóm

A) $x^2 + 3x + 1$. **B)** $x^2 + 3x - 1$. **C)** $x^2 - 3x + 1$. **D)** $x^2 - x - 5$

Správne odpovede: A, B, B a C, B, C.

2.5.3 Test 3

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

2.1. Výraz $\frac{x}{x-3} + \frac{18}{x^2-9} - \frac{x}{x+3}$, $x \neq \pm 3$ sa dá upraviť na tvar

A) $\frac{6x}{x^2-9}$. **B)** $\frac{18}{x^2-9}$. **C)** $\frac{6}{x-3}$. **D)** $\frac{6}{x+3}$.

2.2. Určte hodnotu výrazu $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ pre $x = 3$ a $y = 2$.

A) $3+\sqrt{6}$. **B)** $-3-\sqrt{3}$. **C)** $2+\sqrt{3}$. **D)** $\sqrt{6}$.

2.3. Výraz $\frac{x^2-16}{x^2-4x}$ je ekvivalentný s výrazom $\frac{x+4}{x}$ iba vtedy, keď

A) $x \neq 4$. **B)** $x \neq \pm 4$. **C)** $x \neq 0$, $x \neq 4$. **D)** $x \neq 0$.

2.4. Rozkladom mnohočlena $12x^2 + 11x - 5$ na súčin dostaneme

A) $12(x-\frac{1}{3})\cdot(x+\frac{5}{4})$. **B)** $(3x-1)\cdot(4x+5)$. **C)** $(3x+1)\cdot(4x-5)$. **D)** $(12x-1)\cdot(x+5)$.

2.5. Výraz $\frac{a^2-1}{\sqrt{a}-1}$ je ekvivalentný s výrazom

A) $\left(\sqrt{a}-1\right)^3$, pre $a > 0$. **B)** $(a+1)\cdot\left(\sqrt{a}+1\right)$, pre $a > 0$.

C) $(a+1)\cdot\left(\sqrt{a}+1\right)$, pre $a > 0$ a $a \neq 1$. **D)** $(a+1)\cdot\left(\sqrt{a}+1\right)$, pre $a \neq 1$.

Správne odpovede: C, A, C, A a B, C.

2.5.4 Test 4

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

2.1. Výraz $\left(\frac{x^2y^3}{x^3y^2}\right)^{-1}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ možno upraviť na tvar

A) xy. **B)** $\frac{x}{y}$. **C)** $\frac{y}{x}$. **D)** 1.

2.2. Výraz $\dfrac{\frac{x^2-1}{x+1}}{\frac{1}{x^2-1}} \cdot \dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}$ je ekvivalentný s výrazom $x \cdot (x-1)$ iba vtedy, keď

A) $x \neq -1$. **B)** $x \neq \pm 1$. **C)** $x \neq \pm 1$, $x \neq 0$. **D)** $x \neq 0$.

2.3. Hodnota výrazu $\dfrac{\sqrt{a}}{3+\sqrt{a}}$ pre $a = 10$ je

A) $\sqrt{10}$. **B)** $10 + 3\sqrt{10}$. **C)** $10 + \sqrt{10}$. **D)** $10 - 3\sqrt{10}$.

2.4. Pre $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$ sa výraz $\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$ dá upraviť na tvar

A) $\frac{1}{x^2}$. **B)** 1. **C)** $\frac{1}{x}$. **D)** x.

2.5. Rozkladom polynómu $xy^3 - 4x^3y$ na súčin dostaneme

A) $xy \cdot (y+2x)^2$. **B)** $xy \cdot (y-2x)^2$.

C) $xy \cdot (y+2x) \cdot (y-2x)$. **D)** $(y-2x) \cdot (y+2x)$.

Správne odpovede: B, C, D, C, C.

3 Funkcie – vlastnosti funkcií, elementárne funkcie

3.1 Pojem funkcie, definičný obor funkcie

Nech $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ sú dve množiny reálnych čísel. *Funkcia* f z množiny $\mathbb{A}$ do množiny $\mathbb{B}$ je predpis (priradenie), ktoré každému číslu x z množiny $\mathbb{A}$ priradí práve jedno číslo y z množiny $\mathbb{B}$. Používame označenie $y = f(x)$. Množinu $\mathbb{A}$ nazývame *definičný obor* funkcie f a označujeme ju D_f alebo $D(f)$. Množinu $\mathbb{B}$ nazývame *obor hodnôt* funkcie f. Obor hodnôt funkcie f označujeme symbolom H_f alebo $H(f)$. Premennú x nazývame *nezávislá premenná* a premennú y nazývame *závislá premenná*.

Funkcie zvyčajne označujeme malými písmenami $f, g, h, \ldots$

Funkcia je jednoznačne určená predpisom a definičným oborom. Niekedy pravidlo, ktoré definuje funkciu, nemôže byť použité na niektoré konkrétne hodnoty x. Definičný obor je teda množina prípustných hodnôt x. V zásade sa na definičný obor kladú nasledujúce obmedzenia:

menovateľ zlomku musí byť rôzny od nuly	$\frac{1}{\text{☼}}$	$\ldots$	$\text{☼} \neq 0$
párna odmocnina existuje len z nezáporných čísel	$\sqrt[2k]{\text{♫}}$	$\ldots$	$\text{♫} \geq 0$
logaritmus existuje len z kladných čísel	$\log_a \text{☺}$	$\ldots$	$\text{☺} > 0$

Poznamenajme, že číslo k uvedené v predchádzajúcej tabuľke je číslo prirodzené.

Príklad 3.1. *Nájdime definičný obor funkcie f,*

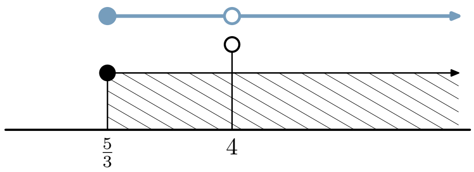
$$f : y = \sqrt{3x-5} + \frac{2x-7}{x-4}.$$

Riešenie. Pri určovaní definičného oboru funkcie f musia platiť nasledujúce podmienky:

I. párna odmocnina … $\sqrt{3x-5} \quad \Rightarrow \quad 3x-5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{5}{3}$.

II. zlomok … $\frac{2x-7}{x-4} \quad \Rightarrow \quad x-4 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 4$.

Tieto podmienky musia platiť súčasne, preto určíme ich prienik, pričom si môžeme pomôcť grafickou interpretáciou.



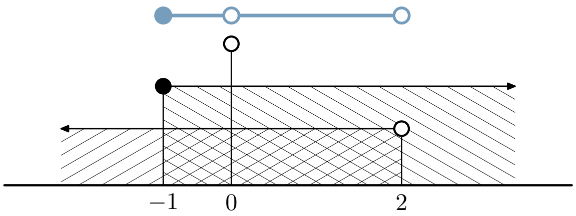
Definičný obor funkcie je f $D_f = \left\langle \frac{5}{3}, 4\right) \cup (4, \infty)$.

Príklad 3.2. *Nájdime definičný obor funkcie g,*

$$g : y = \log(6-3x) - \sqrt{x+1} + \frac{2}{x}.$$

Riešenie. Musia platiť nasledujúce podmienky:

I. logaritmus … $\log(6-3x) \quad \Rightarrow \quad 6-3x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x > -6 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$.

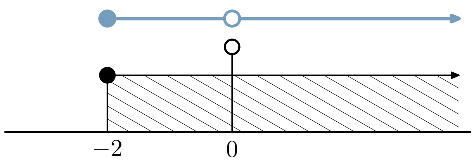


II. párna odmocnina . . . $\sqrt{x+1} \quad\Rightarrow\quad x+1 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \geq -1.$
III. zlomok . . . $\dfrac{2}{x} \quad\Rightarrow\quad x \neq 0.$
Tieto podmienky musia platiť súčasne. Pri určení ich prieniku si opäť pomôžeme grafickou interpretáciou. Definičný obor funkcie g je $D_g = \langle -1, 0) \cup (0, 2)$.

Príklad 3.3. *Nájdime definičný obor funkcie h,*

$$h : y = \frac{5}{\sqrt{2+x}} + 3^{\frac{1}{x}}.$$

Riešenie. Podmienky:
I. párna odmocnina . . . $\sqrt{2+x} \quad\Rightarrow\quad 2+x \geq 0.$
II. zlomok . . . $\dfrac{5}{\sqrt{2+x}} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{2+x} \neq 0 \quad\Rightarrow\quad 2+x \neq 0.$
Z podmienok I. a II. dostávame . . . $2+x > 0 \quad\Leftrightarrow\quad x > -2.$
Teda ak sa v predpise funkcie vyskytuje párna odmocnina v menovateli zlomku, môžeme rovno uvažovať podmienku, že výraz pod párnou odmocninou musí byť kladný.
III. zlomok . . . $\dfrac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad x \neq 0.$
Tieto podmienky musia platiť súčasne, nájdime ich prienik.



Teda definičný obor funkcie h je $D_h = \langle -2, 0) \cup (0, \infty)$.

Úlohy

3.1. Nájdite definičný obor nasledujúcich funkcií.

a) $y = 10.$ **b)** $y = x^3 + 2x - 4.$ **c)** $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{x+1} - 7z.$

d) $y = \dfrac{1-x}{(x-2)(x+3)}.$ **e)** $y = \dfrac{2+x}{2+x}.$ **f)** $y = \sqrt{4-2x} - 4.$

g) $y = \sqrt{3+4x}.$ **h)** $y = \log_3(7-x).$ **i)** $y = \log(2x-3) + x^2.$

3.2. Určte definičný obor funkcií.

a) $y = \dfrac{5}{\sqrt{3+2x}}.$ **b)** $y = \dfrac{10-x}{\sqrt{10+x}}.$ **c)** $y = \sqrt{\dfrac{2}{3-x}}.$

d) $y = \sqrt{\dfrac{7}{x-2}}.$ **e)** $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}.$ **f)** $y = \log \dfrac{1}{x}.$

g) $y = \log_4 \dfrac{3}{2-x}.$ **h)** $y = \dfrac{4}{\log_3(2-x)}.$ **i)** $y = \dfrac{2x-3}{\log(x-3)}.$

3.3. Určte definičný obor nasledujúcich funkcií.

a) $y = \sqrt{3+4x} + 2\log(12-3x)$.

b) $y = \sqrt{4-2x} - \log(x-5)$.

c) $y = \sqrt{2+x} - 3\sqrt{4-x}$.

d) $y = \log(20-5x) + 7\sqrt{6x+12} + \dfrac{3x}{x-1}$.

e) $y = \dfrac{3}{\sqrt{4+x}} + \log(6-3x)$.

f) $y = \dfrac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{5-x}} - \dfrac{3}{9-2x}$.

Výsledky

3.1. **a)** $\mathbb{R}$. **b)** $\mathbb{R}$. **c)** $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$. **d)** $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$. **e)** $\mathbb{R} - \{-2\}$. **f)** $(-\infty, 2\rangle$.
g) $\langle -\frac{3}{4}, \infty)$. **h)** $(-\infty, 7)$. **i)** $\langle \frac{3}{2}, \infty)$.

3.2. **a)** $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$. **b)** $\left(-10, \infty\right)$. **c)** $\left(-3, \infty\right)$. **d)** $\left(2, \infty\right)$. **e)** $\left(-2, \infty\right)$. **f)** $\left(0, \infty\right)$.
g) $\left(-\infty, 2\right)$. **h)** $\left(-\infty, 1\right) \cup \left(1, 2\right)$. **i)** $\left(3, 4\right) \cup \left(4, \infty\right)$.

3.3. **a)** $\langle -\frac{3}{4}, 4)\big)$. **b)** $\emptyset$. **c)** $\langle 2, 4\rangle$. **d)** $\big\langle -2, 1\big) \cup \big(1, 4\big)$. **e)** $\big(-4, 2\big)$. **f)** $\langle 3, \frac{9}{2}\big) \cup \big(\frac{9}{2}, 5\big)$.

Poznamenajme, že určovaním definičného oboru zložitejších funkcií sa budeme zaoberať v podkapitole 4.9 Definičný obor zložitejších funkcí.

Príklad 3.4. *Vypočítajme hodnotu funkcie $f : y = 2x^3 - 1$ v bode $x = 2$.*

Riešenie.
Funkčnú hodnotu funkcie f v bode $x = 2$ dostaneme dosadením čísla 2 za premennú x do predpisu funkcie $f(2) = 2 \cdot 2^3 - 1 = 2 \cdot 8 - 1 = 15$. •

Úlohy

3.4. Pre funkciu $f : y = -2x + 3$ určte $f(0)$ a $f(1)$.

3.5. Pre funkciu $f : y = x^2 - 4x + 4$ určte $f(0)$ a $f(-2)$.

Výsledky

3.4. $f(0) = 3,\ f(1) = 1$.

3.5. $f(0) = 4,\ f(-2) = 16$.

Grafom funkcie $y = f(x)$ rozumieme množinu všetkých bodov v rovine, ktoré majú súradnice $[x, y]$, kde $x \in D(f)$ a $y = f(x)$. Nie každá krivka v rovine je grafom nejakej funkcie. Na overovanie slúži takzvaný „vertikálny test“. Ak krivka je grafom nejakej funkcie, tak každá priamka rovnobežná s osou y ju pretne v najviac jednom bode. Napríklad krivka na Obr. 3.1 nie je grafom funkcie, pretože existuje priamka p_3 rovnobežná s osou y, ktorá pretne túto krivku v dvoch bodoch.

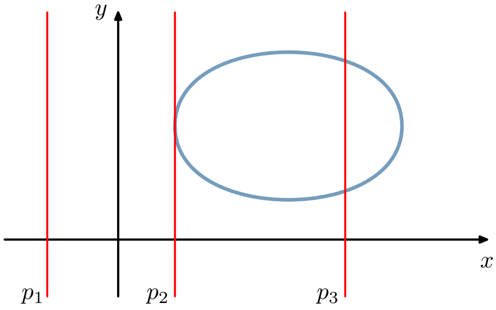
Príklad 3.5. *Určme parametre a, b tak, aby graf funkcie danej predpisom $f : y = ax + b$ prechádzal bodmi $A = [1, 3]$, $B = [2, -1]$.*

Riešenie. To, že graf funkcie má prechádzať bodom $A = [1, 3]$ znamená, že funkčná hodnota funkcie f v bode $x = 1$ je 3. Dosadením do predpisu funkcie dostávame $3 = a \cdot 1 + b$.

Analogicky to, že graf funkcie má prechádzať bodom $B = [2, -1]$ znamená, že $f(2) = -1$, teda $-1 = a \cdot 2 + b$.

Dostali sme sústavu dvoch rovníc o dvomi neznámymi. Ak tieto dve rovnice odčítame, dostávame $4 = -a$, teda $a = -4$. Dosadením tejto hodnoty napríklad do prvej rovnice máme $3 = -4 \cdot 1 + b$. Riešením je $b = 7$.

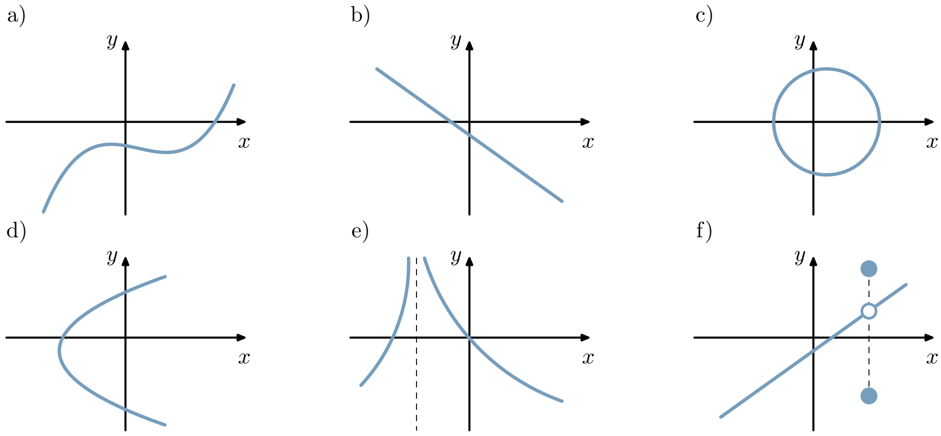
Teda hľadaná funkcia je daná predpisom $y = -4x + 7$. •



Obr. 3.1: Príklad krivky, ktorá nie je grafom funkcie.

Úlohy

3.6. Rozhodnite, či krivky znázornené na Obr. 3.2 sú grafmi nejakej funkcie.



Obr. 3.2: Rozhodnite, či dané krivky sú grafmi nejakej funkcie.

3.7. Určte parametre a, b tak, aby graf funkcie $f : y = ax + b$ prechádzal bodmi

a) $A = [0, 2], B = [-1, 0]$.

b) $A = [1, 3], B = [-1, 7]$.

c) $A = \left[0, \sqrt{3}\right], B = \left[-1, \sqrt{3}\right]$.

3.8. Určte parametre a, b, c tak, aby graf funkcie $f : y = ax^2 + bx + c$ prechádzal bodmi

a) $A = [0, -1], B = [2, 19], C = [-1, -2]$.

b) $A = [1, 4], B = [4, 4], C = [0, 0]$.

c) $A = [-1, 9], B = [0, 2], C = [1, 1]$.

Výsledky

3.6. **a)** Áno. **b)** Áno. **c)** Nie. **d)** Nie. **e)** Áno. **f)** Nie.

3.7. **a)** $a = 2$, $b = 2$. **b)** $a = -2$, $b = 5$. **c)** $a = 0$, $b = \sqrt{3}$.

3.8. **a)** $a = 3$, $b = 4$, $c = -1$. **b)** $a = -1$, $b = 5$, $c = 0$. **c)** $a = 3$, $b = -4$, $c = 2$.

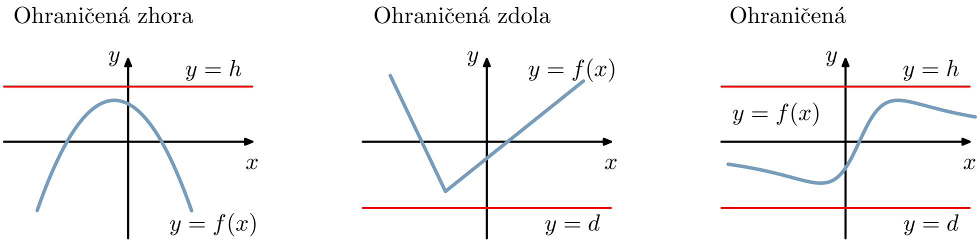
Uvažujeme graf funkcie $y = f(x)$. Zaoberajme sa tým, ako sa zmení graf tejto funkcie, ak jej predpis modifikujeme.

1. zmena znamienka
   a) *pri funkcii* ... $f(x) \longrightarrow -f(x)$ ... grafy týchto funkcií sú súmerné podľa osi x,
   b) *pri argumente funkcie* ... $f(x) \longrightarrow f(-x)$ ... grafy týchto funkcií sú súmerné podľa osi y.
2. pripočítanie konštanty
   a) *k funkcii* ... $f(x) \longrightarrow f(x) + c$ ... graf funkcie sa posunie v smere osi y o hodnotu c,
   b) *ku argumentu funkcie* ... $f(x) \longrightarrow f(x + c)$ ... graf funkcie sa posunie v smere osi x o hodnotu $-c$.
3. násobenie kladnou konštantou
   a) *funkcie* ... $f(x) \longrightarrow c \cdot f(x)$, $c > 0$ ... pre $c > 1$ sa graf funkcie po osi y predlžuje, pre $0 < c < 1$ sa graf funkcie v smere osi y skracuje,
   b) *argumentu funkcie* ... $f(x) \longrightarrow f(c \cdot x)$, $c > 0$ ... pre $c > 1$ sa graf funkcie po osi x skracuje, pre $0 < c < 1$ sa graf funkcie v smere osi x predlžuje.

3.2 Ohraničenosť funkcie

Funkcia $y = f(x)$ sa nazýva *ohraničená zhora (zdola)*, ak je zhora (zdola) ohraničený jej obor hodnôt. Ak je funkcia ohraničená zhora i zdola, hovoríme, že je *ohraničená*. V opačnom prípade hovoríme, že je *neohraničená*.

Ak je funkcia ohraničená zhora, tak existuje priamka $y = h$ taká, že graf funkcie leží *pod* touto priamkou. Ak je funkcia ohraničená zdola, tak existuje priamka $y = d$ taká, že graf tejto funkcie leží *nad* touto priamkou. Ak je funkcia ohraničená, tak existujú priamky $y = d$, $y = h$ také, že graf funkcie leží v páse *medzi* týmito priamkami. Na Obr. 3.3 sú uvedené príklady funkcie ohraničenej zhora, zdola a ohraničenej.



Obr. 3.3: Príklady funkcie ohraničenej zhora, zdola a ohraničenej.

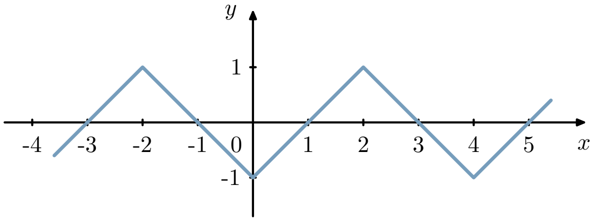
3.3 Periodickosť funkcie

Nech $y = f(x)$ je funkcia s definičným oborom $D(f)$ a nech p je najmenšie kladné reálne číslo, pre ktoré platí

1. ak $x \in D(f)$, tak $x + p \in D(f)$, $x - p \in D(f)$,
2. pre všetky x, $x \in D(f)$ platí $f(x + p) = f(x)$.

Funkciu $y = f(x)$ nazývame *periodickou funkciou* s periódu p.

Na Obr. 3.4 je znázornená periodická funkcia s periódou $p = 4$.



Obr. 3.4: Periodická funkcia s periódou $p = 4$.

3.4 Párnosť, nepárnosť funkcie

Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je *párna*, ak pre všetky čísla x z definičného oboru platí, že funkčné hodnoty funkcie f v čísle x a v čísle $-x$ sú rovnaké. Teda

$$\forall x \in D(f): \quad f(-x) = f(x).$$

Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y.

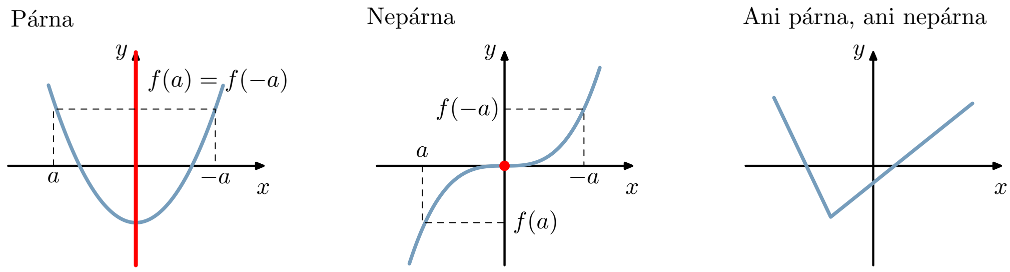
Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ je *nepárna*, ak pre všetky x z definičného oboru platí, že funkčné hodnoty funkcie f v v čísle x a v čísle $-x$ sú opačné. Teda

$$\forall x \in D(f): \quad f(-x) = -f(x).$$

Graf nepárnej funkcie je súmerný podľa počiatku súradnicového systému.

Poznamenajme, že ako párna tak i nepárna funkcia musia mať definičný obor súmerný podľa počiatku súradnicového systému.

Na Obr. 3.5 je uvedený príklad párnej, nepárnej funkcie a funkcie, ktorá nie je ani párna a ani nepárna.



Obr. 3.5: Párna funkcia, nepárna funkcia a funkcia ani párna ani nepárna.

Poznámka 3.1. Jediná párna goniometrická funkcia je funkcia kosínus. Ostanté goniometrické funkcie sú nepárne. Teda pre všetky x, pre ktoré sú dané funkcie definované, platí

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x \\ \mathrm{tg}(-x) &= -\mathrm{tg}\ x \\ \mathrm{cotg}(-x) &= -\mathrm{cotg}\ x \end{aligned}$$

Príklad 3.6. *Zistime, či nasledujúce funkcie sú párne, nepárne alebo ani párne a ani nepárne.*

a) $f: y = \dfrac{x^2-4}{x-5}$. **b)** $g: y = \dfrac{x^2-4}{x^3}$. **c)** $h: y = 2x\sin x$. **d)** $k: y = x^3 + \cos x$.

Riešenie.

a) Vhľadom k tomu, že $D(f) = \mathbb{R} - \{5\}$, teda definičný obor nie je súmerný podľa počiatku. Je zrejmé, že funkcia f nie je párna a nie je nepárna.

b) Platí $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, teda definičný obor je súmerný podľa počiatku, a má zmysel zisťovať, či je funkcia párna alebo nepárna. Pre $\forall x \in D(g)$:
$g(-x) = \dfrac{(-x)^2-4}{(-x)^3} = \dfrac{x^2-4}{-x^3} = -\dfrac{x^2-4}{x^3} = -g(x)$,
teda funkcia g je nepárna.

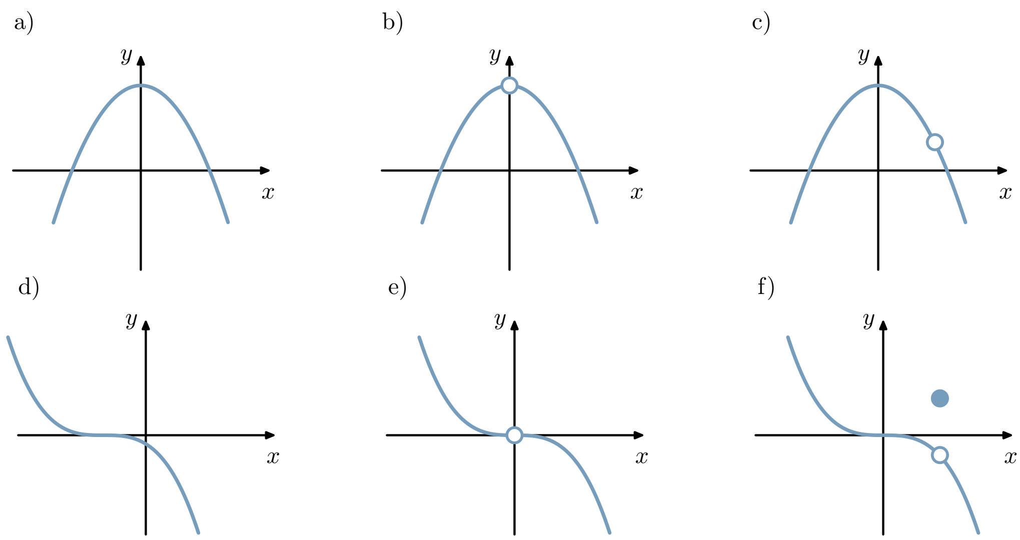
c) $D(h) = \mathbb{R}$, $\forall x \in D(h)$:
$h(-x) = 2(-x) \cdot \sin(-x) = -2x \cdot (-\sin x) = 2x \sin x = h(x)$,
teda funkcia h je párna.

d) $D(k) = \mathbb{R}$, $\forall x \in D(f)$:

$$k(-x) = (-x)^3 + \cos(-x) = -x^3 + \cos x \neq \begin{cases} k(x) = x^3 + \cos x \Rightarrow \text{nie je párna,} \\ -k(x) = -(x^3 + \cos x) \Rightarrow \text{nie je nepárna.} \end{cases}$$

Úlohy

3.9. Rozhodnite, či funkcie znázornené na Obr. 3.6 sú párne, nepárne alebo ani párne a ani nepárne. Svoje tvrdenie zdôvodnite.



Obr. 3.6: Rozhodnite, či dané funkcie sú párne, nepárne alebo ani párne a ani nepárne.

3.10. Rozhodnite, či je možné dodefinovať tie funkcie znázornené na Obr. 3.6, ktoré nie sú párne a nie sú nepárne tak, aby boli párne resp. nepárne. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

3.11. Vyšetrite párnosť, nepárnosť nasledujúcich funkcií.

a) $y = x^2 + 2$. **b)** $y = x^3 - 1$. **c)** $y = x + 1$.

d) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 3}$. **e)** $y = \sin 2x$. **f)** $y = x^4 + \sin^2 x$.

g) $y = x^3 + \sin x$. **h)** $y = \dfrac{\cos x}{x^3}$. **i)** $y = x^3 + x^2$.

Výsledky

3.9. **a)** Párna. **b)** Párna. **c)** Ani párna, ani nepárna. **d)** Ani párna, ani nepárna. **e)** Nepárna. **f)** Ani párna, ani nepárna.

3.10. **c)** Áno. **d)** Nie. **f)** Nie.

3.11. **a)**Párna. **b)** Ani párna, ani nepárna. **c)** Ani párna, ani nepárna. **d)** Ani párna, ani nepárna. **e)** Nepárna. **f)** Párna. **g)** Nepárna. **h)** Nepárna. **i)** Ani párna, ani nepárna.

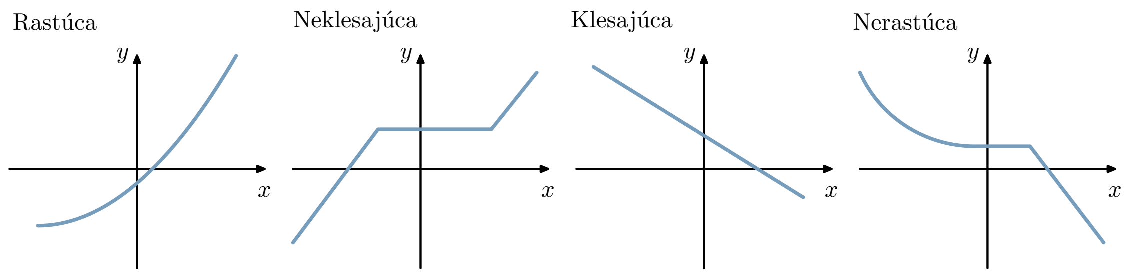
3.5 Monotónnosť a lokálne extrémy funkcie

Nech f je funkcia s definičným oborom $D(f)$ a nech M je podmnožina definičného oboru. Ak pre každé dve čísla $x_1, x_2 \in M$ také, že $x_1 < x_2$ platí:

$$\begin{array}{lcl} f(x_1) < f(x_2) & & \textit{rastúca} \\ f(x_1) \leq f(x_2) & \text{hovoríme, že funkcia } f \text{ je na množine } M & \textit{neklesajúca} \\ f(x_1) > f(x_2) & & \textit{klesajúca} \\ f(x_1) \geq f(x_2) & & \textit{nerastúca} \end{array}$$

Funkcie rastúce a klesajúce sa nazývajú *rýdzomonotónne (ostromonotónne)*.

Na Obr. 3.7 sú znázornené príklady rastúcej, neklesajúcej, klesajúcej a nerastúcej funkcie.



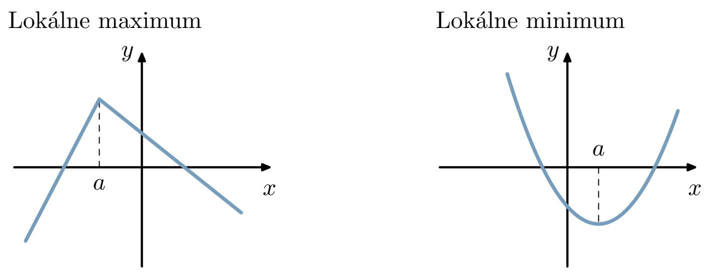
Obr. 3.7: Rastúca, neklesajúca, klesajúca a nerastúca funkcia.

Hovoríme, že funkcia $y = f(x)$ nadobúda v bode a *lokálne maximum* (*lokálne minimum*), ak existuje také okolie bodu a, že pre všetky x z tohto okolia, $x \neq a$ platí

$$f(a) > f(x) \quad (f(a) < f(x)).$$

Lokálne extrémy môžeme určiť aj z monotónnosti funkcie. Funkcia $y = f(x)$ má lokálne maximum v bode a, ak je rastúca v niektorom ľavom okolí bodu a a klesajúca v niektorom pravom okolí bodu a. Analogicky, funkcia $y = f(x)$ má lokálne minimum v bode a, ak je klesajúca v niektorom ľavom okolí bodu a a rastúca v niektorom pravom okolí bodu a. Teda lokálne maximum (lokálne minimum) je najväčšia (najmenšia hodnota), ktorú funkcia $y = f(x)$ nadobúda na určitej podmnožine definičného oboru.

Na Obr. 3.8 sú ilustrované príklady funkcií, ktoré nadobúdajú lokálne maximum, resp. lokálne minimum v bode a.



Obr. 3.8: Lokálne maximum, lokálne minimum.

Príklad 3.7. *Vyšetrime monotónnosť nasledujúcich funkcií a nájdime ich lokálne extrémy.*

a) $f : y = 6 - 7x$. **b)** $g : y = e^{2x} - 3$. **c)** $h : y = \dfrac{5}{x}$. **d)** $k : y = x^2 - 9$.

Riešenie.

a) $D(f) = \mathbb{R}$. Nech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ také, že $x_1 < x_2$. Potom $-7x_1 > -7x_2$ a $6 - 7x_1 > 6 - 7x_2$, teda $f(x_1) > f(x_2)$ čím sme dokázali, že funkcia f je klesajúca na $\mathbb{R}$. Funkcia f nemá lokálne extrémy.

b) Nech $x_1, x_2 \in D(g) = \mathbb{R}$ a nech $x_1 < x_2$. Potom $2x_1 < 2x_2$, z tejto nerovnice dostávame $e^{2x_1} < e^{2x_2}$. Teda $e^{2x_1} - 3 < e^{2x_2} - 3$, čo znamená $g(x_1) < g(x_2)$. Teda funkcia g je rastúca na $\mathbb{R}$. Funkcia g nemá lokálne extrémy.

c) $D(h) = \mathbb{R} - \{0\}$. Rozoberme dva prípady.
I. Uvažujme $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ také, že $x_1 < x_2$. Potom $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow \dfrac{5}{x_1} > \dfrac{5}{x_2}$, teda $h(x_1) > h(x_2) \Rightarrow$ funkcia h je klesajúca na $(-\infty, 0)$.
II. Nech $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ také, že $x_1 < x_2$. Potom $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow \dfrac{5}{x_1} > \dfrac{5}{x_2}$, teda $h(x_1) > h(x_2) \Rightarrow$ funkcia h je klesajúca na $(0, \infty)$.
Funkcia h nemá lokálne extrémy.

d) $D(k) = \mathbb{R}$. Rozlíšme dva prípady.
I. Nech $x_1, x_2 \in (-\infty, 0\rangle$ také, že $x_1 < x_2$. Potom $x_1^2 > x_2^2$ a $x_1^2 - 9 > x_2^2 - 9$, čo znamená $k(x_1) > k(x_2)$, čím sme dokázali, že funkcia k je na intervale $(-\infty, 0\rangle$ klesajúca.
II. Uvažujme $x_1, x_2 \in \langle 0, \infty)$ také, že $x_1 < x_2$. Potom $x_1^2 < x_2^2$ a $x_1^2 - 9 < x_2^2 - 9$. Teda $k(x_1) < k(x_2)$. Z toho dostávame, že funkcia k je na intervale $(-\infty, 0\rangle$ rastúca.
Teda funkcia k má v bode $x = 0$ lokálne minimum, funkčná hodnota funkcie k v bode $x = 0$ je $k(0) = 0^2 - 9 = -9$.

Poznámka 3.2. Vyšetrovanie monotónnosti a hľadanie lokálnych extrémov funkcie použitím definície je dosť komplikované. Jednoduchší spôsob poskytuje využitie vlastností derivácie funkcie.

Úlohy

3.12. Vyšetrite monotónnosť a nájdite lokálne extrémy nasledujúcich funkcií.

a) $y = x + 2$. **b)** $y = 1 - x$. **c)** $y = x^3$.

d) $y = 4$. **e)** $y = -\dfrac{3}{x}$. **f)** $y = (x + 3)^2$.

g) $y = x^2 + 5x + 4$. **h)** $y = 3^x$. **i)** $y = \log_2 x$.

Výsledky

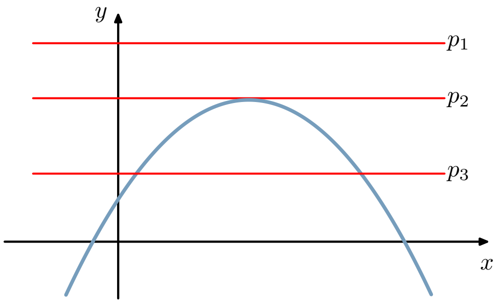
3.12. **a)** Rastúca na $(-\infty, \infty)$, nemá lokálne extrémy. **b)** Klesajúca na $(-\infty, \infty)$, nemá lokálne extrémy. **c)** Rastúca na $(-\infty, \infty)$, nemá lokálne extrémy. **d)** Ani rastúca, ani klesajúca, konštantná funkcia, nemá lokálne extrémy. **e)** Rastúca na $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, nemá lokálne extrémy. **f)** Klesajúca na $(-\infty, -3\rangle$, rastúca na $\langle -3, \infty)$, lokálne minimum $[-3, 0]$. **g)** Klesajúca na $(-\infty, -\frac{5}{2}\rangle$, rastúca na $\langle -\frac{5}{2}, \infty)$, lokálne minimum $\left[-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right]$. **h)** Rastúca na $(-\infty, \infty)$, nemá lokálne extrémy. **i)** Rastúca na $(0, \infty)$, nemá lokálne extrémy.

3.6 Prostosť funkcie

Funkciu f nazveme *prostou*, ak rôznym číslam sú priradené rôzne funkčné hodnoty. Teda

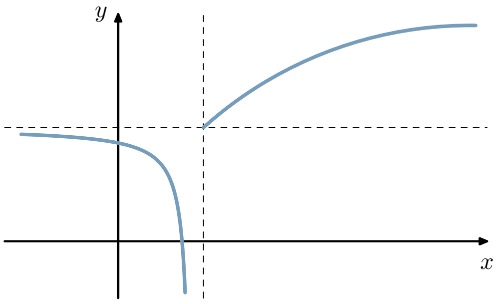
$$\forall x_1, x_2 \in D(f): \quad x_1 \neq x_2 \quad \text{je} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Na overenie, či je nejaká funkcia prostá slúži takzvaný „horizontálny test“. Každá priamka rovnobežná s osou x pretne graf prostej funkcie v najviac jednom bode. Napríklad, funkcia na Obr. 3.9 nie je prostá, pretože existuje priamka p_3 rovnobežná s osou x, ktorá pretne graf tejto funkcie v dvoch bodoch.



Obr. 3.9: Príklad funkcie, ktorá nie je prostá.

Ak je funkcia monotónna, tak je prostá. Opačné tvrdenie neplatí. Na Obr. 3.10 je znázornená funkcia, ktorá je prostá, ale nie je monotónna.



Obr. 3.10: Príklad funkcie, ktorá je prostá, ale nie je monotónna.

Príklad 3.8. *Zistime, či funkcia* $f : y = \dfrac{5x-1}{2x+3}$ *je prostá.*

Riešenie. Upravme

$$(5x-1) : (2x+3) = \frac{5}{2} - \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2x+3}.$$

Poznamenajme, že sme využili delenie polynómov, pozri Príklad 2.8.

Predpokladajme, že

$$\begin{aligned}
x_1 &\neq x_2 && / \cdot 2\\
2x_1 &\neq 2x_2 && / + 3\\
2x_1 + 3 &\neq 2x_2 + 3\\
\frac{1}{2x_1+3} &\neq \frac{1}{2x_2+3} && / \cdot \left(-\tfrac{17}{2}\right)\\
\frac{-17}{2(2x_1+3)} &\neq \frac{-17}{2(2x_2+3)} && / + \tfrac{5}{2}\\
\frac{5}{2} - \frac{17}{2(2x_1+3)} &\neq \frac{5}{2} - \frac{17}{2(2x_2+3)}\\
\frac{5x_1-1}{2x_1+3} &\neq \frac{5x_2-1}{2x_2+3}.
\end{aligned}$$

Teda

$$f(x_1) \neq f(x_2),$$

čím sme dokázali, že funkcia f je prostá.

Úlohy

3.13. Zistite, či sú nasledujúce funkcie prosté.

a) $y = x + 2$. **b)** $y = x^2 - 1$. **c)** $y = x^3 + 2$.

d) $y = 4$. **e)** $y = \dfrac{x+5}{x}$. **f)** $y = \sin x$.

Výsledky

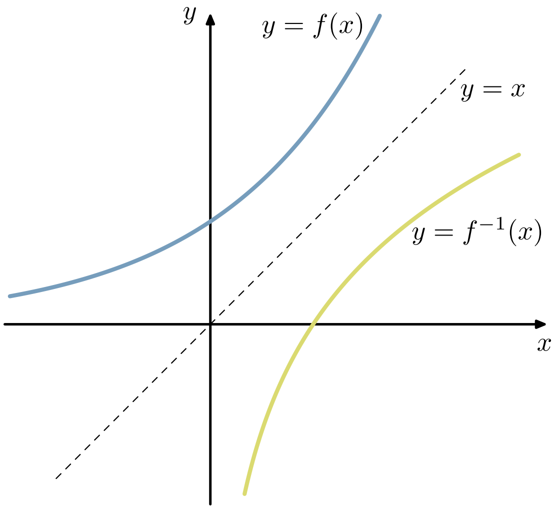
3.13. **a)** Prostá. **b)** Nie je prostá. **c)** Prostá. **d)** Nie je prostá. **e)** Prostá. **f)** Nie je prostá.

3.7 Inverzná funkcia

Nech funkcia $y = f(x)$ je prostá na definičnom obore $D(f)$ a nech jej obor hodnôt je množina $H(f)$. Funkciu f^{-1} nazývame *inverznou* funkciou k funkcii f, ak definičný obor funkcie f^{-1} sa rovná oboru hodnôt funkcie f, teda $D(f^{-1}) = H(f)$ a každému číslu $y \in H(f)$ sa priradí číslo $x \in D(f)$, pre ktoré platí $y = f(x)$, čiže $x = f^{-1}(y)$.

Inverzná funkcia k funkcii $f^{-1}(x)$ je funkcia $f(x)$, teda $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Grafy funkcie a funkcie k nej inverznej sú súmerné podľa priamky $y = x$. Inverzná funkcia existuje len k prostej funkcii.

Na Obr. 3.11 je znázornená funkcia $y = f(x)$ a k nej inverzná funkcia $y = f^{-1}(x)$.



Obr. 3.11: Funkcia $y = f(x)$ a k nej inverzná funkcia $y = f^{-1}(x)$.

Postup pri hľadaní predpisu inverznej funkcie.

1. Zistíme, či je funkcia prostá. Ak nie je prostá, tak k nej neexistuje inverzná funkcia.

2. Formálne preznačíme $x \to y$ a $y \to x$.

3. Vyjadríme y ako funkciu x.

Príklad 3.9. *Nájdime inverznú funkciu k funkcii* $f : y = \dfrac{5x-1}{2x+3}$.

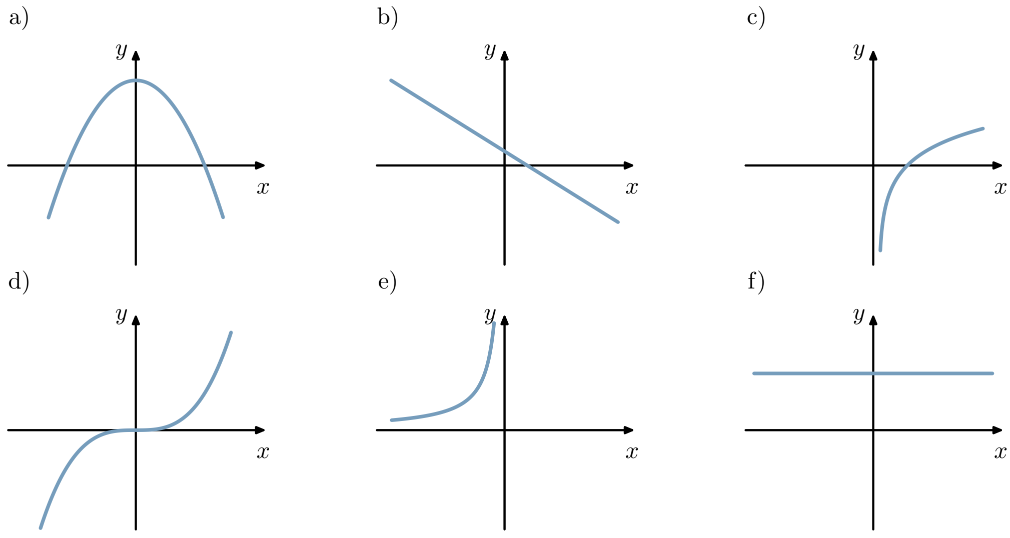
Riešenie. Podľa Príkladu 3.8 je funkcia f prostá, teda k nej existuje inverzná funkcia. Preznačme $x \to y$

a $y \to x$ v predpise funkcie f. Vyjadrime y ako funkciu x.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{5y-1}{2y+3} && / \cdot (2y+3) \\
(2y+3)x &= 5y-1 \\
2xy + 3x &= 5y-1 && / -5y-3x \\
2xy - 5y &= -1-3x \\
y(2x-5) &= -1-3x && / \cdot \tfrac{1}{2x-5} \\
y &= \frac{-1-3x}{2x-5} \\
f^{-1}: \ y &= \frac{1+3x}{5-2x}
\end{aligned}$$

Úlohy

3.14. Nakreslite inverzné funkcie k funkciám znázorneným na Obr. 3.12.



Obr. 3.12: Nakreslite inverzné funkcie k daným funkciám.

3.15. Nájdite predpis inverznej funkcie k daným prostým funkciám.

a) $f: \ y = 3x - 2.$ **b)** $f: \ y = \dfrac{3x-7}{2-x}.$ **c)** $f: \ y = \log(3x+1).$

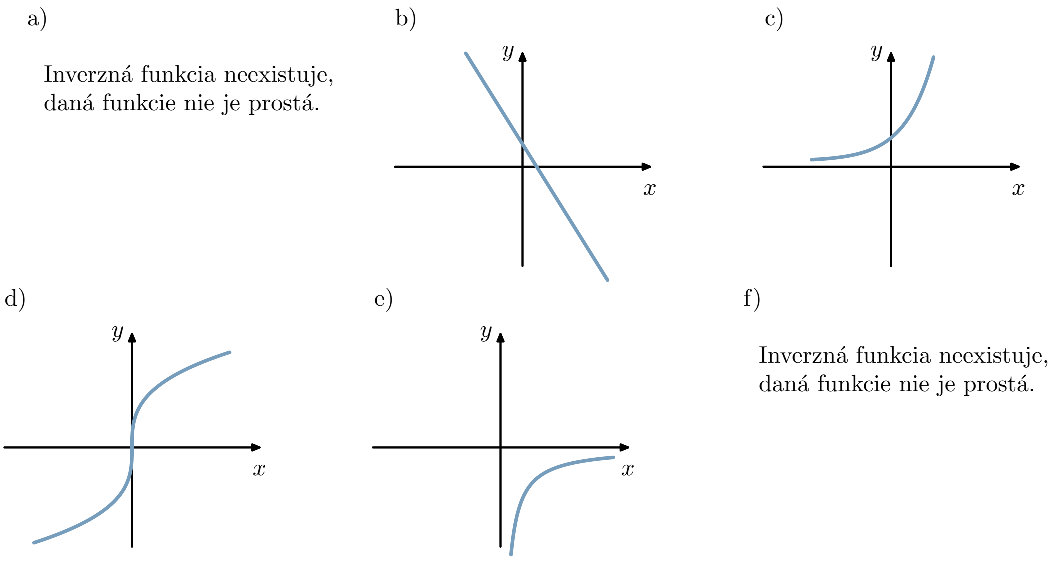
d) $f: \ y = 3 - \ln\dfrac{x-3}{4}.$ **e)** $f: \ y = 5 - 2^x.$ **f)** $f: \ y = 2 + \sqrt{e^{2x}+4}.$

Výsledky

3.14. Pozri Obr. 3.13.

3.15. **a)** $f^{-1}: \ y = \dfrac{x+2}{3}.$ **b)** $f^{-1}: \ y = \dfrac{2x+7}{3+x}.$ **c)** $f^{-1}: \ y = \dfrac{10^x-1}{3}.$ **d)** $f^{-1}: \ y = 3 + 4e^{3-x}.$

e) $f^{-1}: \ y = \log_2(5-x).$ **f)** $f^{-1}: \ y = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x).$



Obr. 3.13: Inverzné funkcie k funkciám znázorneným na Obr. 3.12.

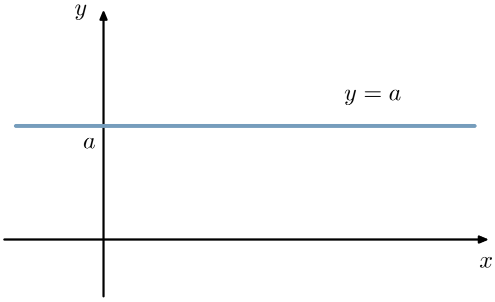
3.8 Elementárne funkcie

POLYNOMICKÁ FUNKCIA ... $f: y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, \ldots, n$

$D(f) = \mathbb{R}$

Rozoberme niekoľko špeciálnych prípadov.

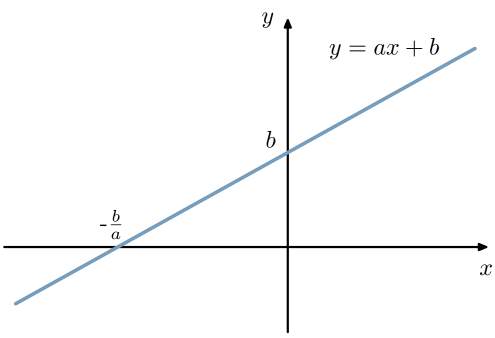
1. Konštantná funkcia ... $f: y = a, \quad a \in \mathbb{R}$



Obr. 3.14: Konštantná funkcia.

$D(f) = \mathbb{R}$
$H(f) = \{a\}$
ohraničená
párna
nie je prostá
grafom je priamka rovnobežná s osou x

2. Lineárna funkcia ... $f: y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

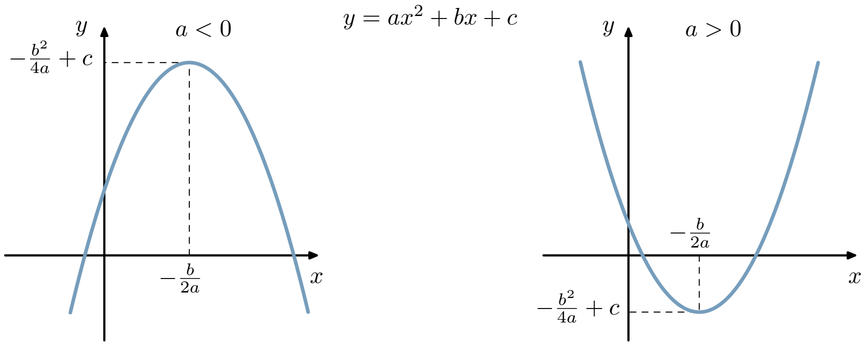


Obr. 3.15: Lineárna funkcia.

$D(f) = \mathbb{R}$
$H(f) = \mathbb{R}$
neohraničená
monotónnosť:
- ak $a > 0$, tak je rastúca,
- ak $a < 0$, tak je klesajúca

prostá
grafom je priamka

3. Kvadratická funkcia ... $f: y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

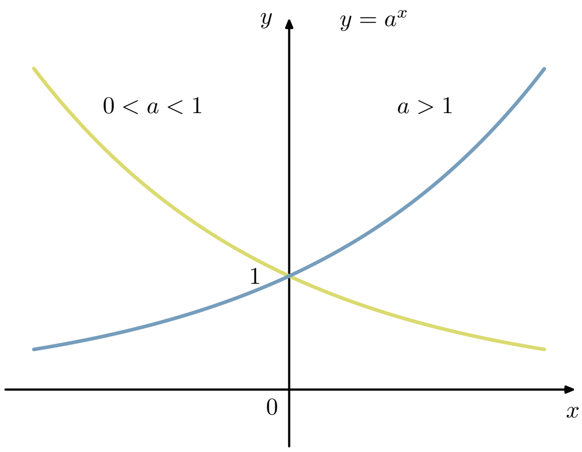


Obr. 3.16: Kvadratická funkcia.

$a < 0$
$D(f) = \mathbb{R}$
$H(f) = (-\infty, -\frac{b^2}{4a} + c\rangle$
ohraničená zhora
rastúca na $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right\rangle$, klesajúca na $\left\langle -\frac{b}{2a}, \infty\right)$
lokálne maximum $[-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c]$
nie je prostá
grafom je parabola

$a > 0$
$D(f) = \mathbb{R}$
$H(f) = \langle -\frac{b^2}{4a} + c, \infty)$
ohraničená zdola
klesajúca na $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right\rangle$, rastúca na $\left\langle -\frac{b}{2a}, \infty\right)$
lokálne minimum $[-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c]$
nie je prostá
grafom je parabola

EXPONENCIÁLNA FUNKCIA ... $f: y = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1$

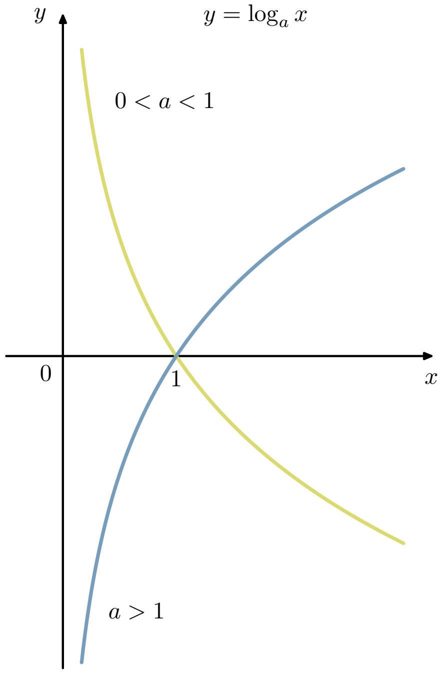


Obr. 3.17: Exponenciálna funkcia.

$D(f) = \mathbb{R}$
$H(f) = (0, \infty)$
ohraničená zdola
monotónnosť:
- ak $a > 1$, tak je rastúca,
- ak $0 < a < 1$, tak je klesajúca

prostá
grafom je exponenciálna krivka (exponenciála)
exponenciálna funkcia $y = a^x$ je inverzná funkcia k logaritmickej funkcii $y = \log_a x$

LOGARITMICKÁ FUNKCIA ... $f: y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$

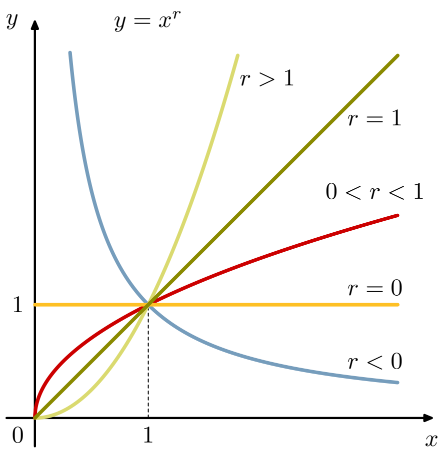


Obr. 3.18: Logaritmická funkcia.

$D(f) = (0, \infty)$
$H(f) = \mathbb{R}$
neohraničená
monotónnosť:
- ak $a > 1$, tak je rastúca,
- ak $0 < a < 1$, tak je klesajúca

prostá
grafom je logaritmická krivka
logaritmická funkcia $y = \log_a x$ je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii $y = a^x$

MOCNINOVÁ FUNKCIA ... $f: y = x^r, \quad r \in \mathbb{R}$



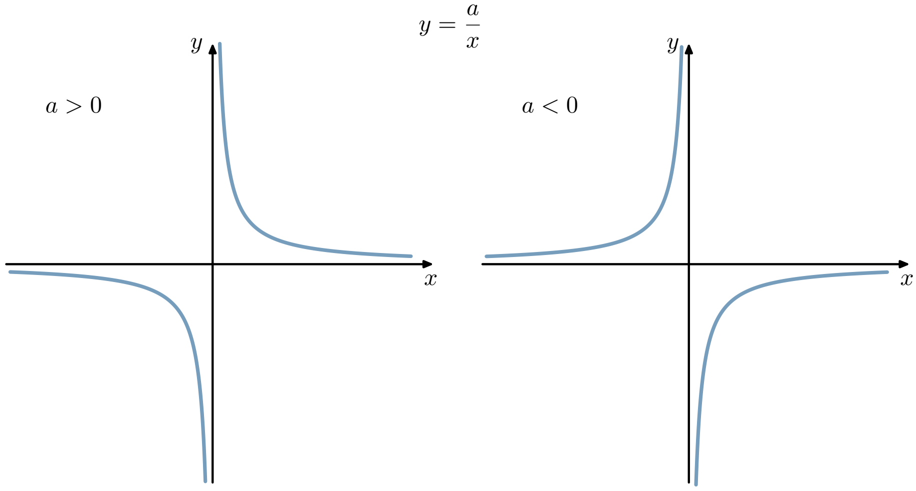
Obr. 3.19: Mocninová funkcia.

$D(f) = (0, \infty)$
$H(f) = (0, \infty)$
ohraničená zdola
monotónnosť:
- ak $r > 0$, tak je rastúca,
- ak $r = 0$, tak je konštantná,
- ak $r < 0$, tak je klesajúca

V prípade, ak $r \in \mathbb{Z}$, tak definičný obor mocninovej funkcie môžeme rozšíriť na množinu všetkých reálnych čísel.

Špeciálnym prípadom mocninovej funkcie je hyperbolická funkcia.

Hyperbolická funkcia $\quad \dots \quad f:\ y = \dfrac{a}{x}, \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$



Obr. 3.20: Hyperbolická funkcia.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

$H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

neohraničená

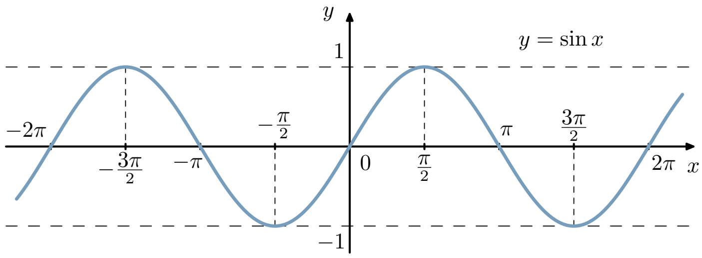
monotónnosť:
- ak $a > 0$, tak je klesajúca na $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$,
- ak $a < 0$, tak je rastúca na $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

prostá

grafom je rovnoosová hyperbola

GONIOMETRICKÉ FUNKCIE

Funkcia sínus $\quad \dots \quad f:\ y = \sin x$



Obr. 3.21: Funkcia sínus.

$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = \langle -1, 1 \rangle$

ohraničená

periodická s periódou 2π

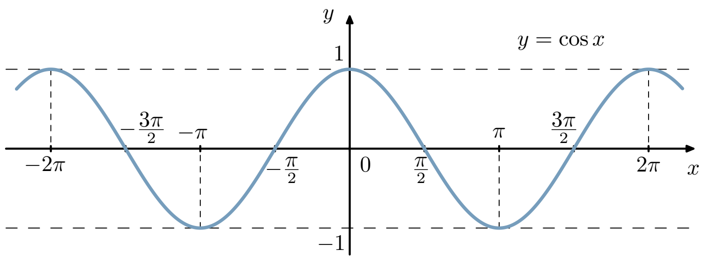
- rastúca na $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$
- klesajúca na $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$

nie je prostá

nepárna $\quad \dots \quad \sin(-x) = -\sin x$

grafom je sínusoida

Funkcia kosínus $\quad \dots \quad f:\ y = \cos x$



Obr. 3.22: Funkcia kosínus.

$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = \langle -1, 1 \rangle$

ohraničená

periodická s periódou 2π

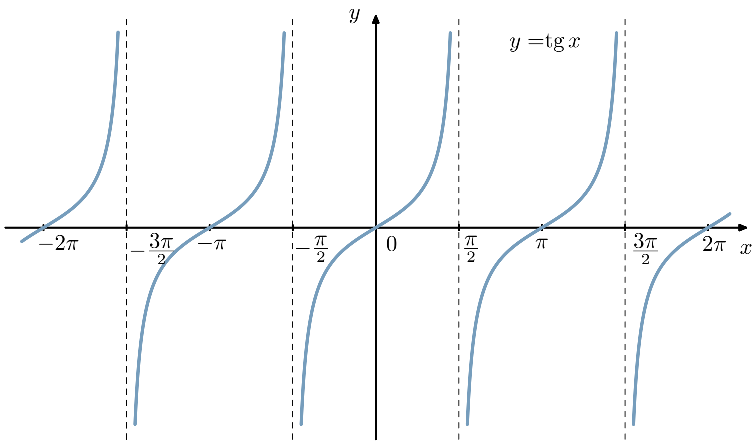
- rastúca na $\langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$
- klesajúca na $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$

nie je prostá

párna $\quad \dots \quad \cos(-x) = \cos x$

grafom je kosínusoida

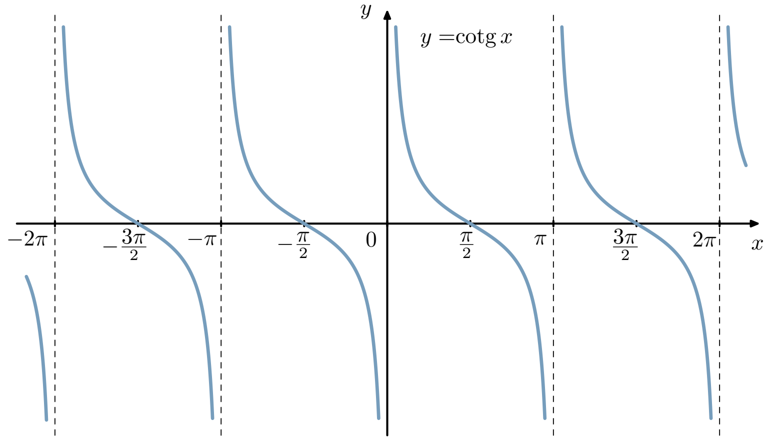
Funkcia tangens $\quad \ldots \quad f: y = \text{tg } x$



Obr. 3.23: Funkcia tangens.

$D(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$
$H(f) = \mathbb{R}$
neohraničená
periodická s periódou π
rastúca na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
nie je prostá
nepárna $\quad \ldots \quad \text{tg }(-x) = -\text{tg } x$
grafom je tangentoida

Funkcia kotangens $\quad \ldots \quad f: y = \text{cotg } x$



Obr. 3.24: Funkcia kotangens.

$D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
$H(f) = \mathbb{R}$
neohraničená
periodická s periódou π
klesajúca na $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
nie je prostá
nepárna $\quad \ldots \quad \text{cotg }(-x) = -\text{cotg } x$
grafom je kotangentoida

Priesečník P_x s osou x je taký bod funkcie, ktorého y-ová súradnica je rovná 0. Nájdeme ho teda tak, že určíme, pre aké x daná funkcia f nadobúda hodnotu nula, t. j. $f(x) = 0$. *Priesečník P_y s osou y* je taký bod funkcie, ktorého x-ová súradnica je rovná nule a nájdeme ho tak, že do predpisu danej funkcie dosadíme za x číslo 0. Určíme teda funkčnú hodnotu funkcie f v čísle 0. Poznamenajme, že vo všeobecnosti môže mať funkcia buď žiaden alebo práve jeden priesečník s osou y. Počet priesečníkov s osou x môže byť nula, jeden, dva, ..., nekonečne veľa.

Príklad 3.10. *Nakreslime grafy nasledujúcich funkcií.*

a) $f: y = -x + 2$. **b)** $f: y = -x^2 + 6x - 8$. **c)** $f: y = \dfrac{x+1}{x+2}$. **d)** $f: y = e^{-2x} - 2$.

Riešenie.

a) Funkcia $f: y = 2-x$ je lineárna. Jej definičný obor je množina všetkých reálnych čísel. Grafom lineárnej funkcie je priamka. Priamka je jednoznačne určená dvoma rôznymi bodmi. Môžeme napríklad nájsť priesečníky s osou x a osou y. Ľahko vyplníme nasledujúcu tabuľku.

x	0	2
y	2	0

b) Funkcia $f: y = -x^2 + 6x - 8$ je kvadratická funkcia, definičný obor sú všetky reálne čísla. Jej grafom je parabola s lokálnym maximom, pretože koeficient pri x^2 je záporný ($a = -1$). Vrchol paraboly, teda bod, v ktorom funkcia nadobúda lokálne maximum, nájdeme úpravou kvadratického trojčlena na úplný štvorec

$$-x^2 + 6x - 8 = -(x^2 - 6x + 8) = -\left[x^2 + 2 \cdot (-3) \cdot x + 8\right] = -\left[(x-3)^2 - 9 + 8\right] = -(x-3)^2 + 1.$$

Vrchol paraboly je bod $V = [3, 1]$.

Priesečníky paraboly s osou x nájdeme riešením kvadratickej rovnice $-x^2 + 6x - 8 = 0$. Platí

$$0 = -x^2 + 6x - 8 = -(x^2 - 6x + 8) = -(x-2)(x-4),$$

teda $P_{x_1} = [2, 0]$, $P_{x_2} = [4, 0]$. Poznamenajme, že ak má kvadratická funkcia priesečníky s osou x, tak vzhľadom na symetriu platí, že x-ovú súradnicu vrchola dostaneme ako aritmetický priemer x-ových súradníc priesečníkov s osou x. Teda x-ová súradnica vrchola je $x_V = \frac{2+4}{2} = 3$. y-ovú súradnicu vrchola dostaneme ako funkčnú hodnotu funkcie v bode 3, teda $y_V = y(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 8 = 1$. Teda vrchol paraboly je $V = [3, 1]$.

Priesečník s osou y je bod $P_y = [0, ?]$, pričom y-ovú súradnicu dostaneme ako hodnotu funkcie v bode $x = 0$, teda $y(0) = -0^2 + 6 \cdot 0 - 8 = -8 \quad \Rightarrow \quad P_y = [0, -8]$.

c) Funkcia $f: y = \dfrac{x+1}{x+2}$ má definičný obor $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$. Upravme

$$y = \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2-2+1}{x+2} = \frac{(x+2)-1}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}.$$

Daná funkcia je špeciálnym typom mocninovej funkcie, ktorú nazývame hyperbolická funkcia a jej grafom je rovnoosová hyperbola. Oproti grafu funkcie $y = -\frac{1}{x}$, je graf našej funkcie posunutý v smere osi x o hodnotu -2, v smere osi y o hodnotu 1.

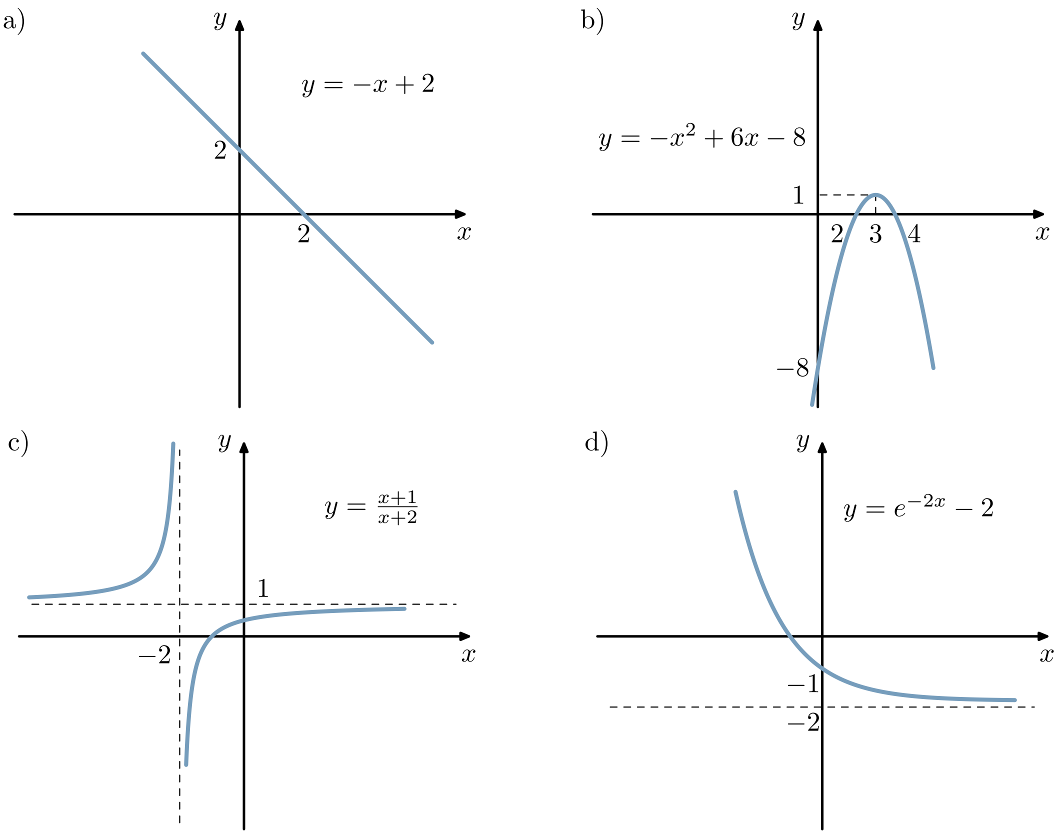
d) Využijúc vlastnosti mocnín dostávame $e^{-2x} = \left(e^{-2}\right)^x$.
Keďže

$$e > 1 \quad \Rightarrow \quad e^2 > 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < e^{-2} < 1,$$

teda $y = e^{-2x}$ je exponenciálna funkcia so základom z intervalu $(0, 1)$, teda je to klesajúca funkcia. Pripočítanie konštanty -2 k funkcii má za následok, že graf funkcie sa posunie v smere osi y o hodnotu -2.

Je zrejmé, že definičný obor tejto funkcie sú všetky reálne čísla.

Grafy daných funkcií sú znázornené na Obr. 3.25.



Obr. 3.25: Grafy funkcií $y = -x + 2$, $y = -x^2 + 6x - 8$, $y = \dfrac{x+1}{x+2}$, $y = e^{-2x} - 2$.

Príklad 3.11. *Nájdime priesečníky funkcií*

$$y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$$

a zakreslime oblasť ohraničenú grafmi týchto funkcií.

Riešenie.

Priesečníky grafov dvoch funkcií sú body, ktoré ležia na grafoch oboch funkcií. Ich súradnice vyhovujú ako predpisu prvej, tak aj predpisu druhej funkcie. Teda úloha nájsť priesečníky grafov dvoch funkcií sa preformuluje na úlohu riešiť rovnicu

$$x^2 + 1 = x + 3.$$

Teda

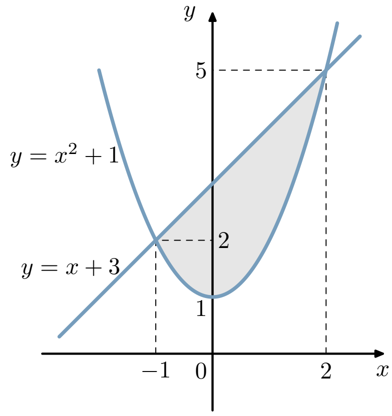
$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ x_1 = -1,\ x_2 &= 2, \end{aligned}$$

pričom y-ové súradnice priesečníkov dostaneme dosadením x-ových súradníc do ľubovoľného predpisu z daných funkcií
$y(-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow$ priesečník $P_1 = [-1, 2]$,
$y(2) = 2 + 3 = 5 \Rightarrow$ priesečník $P_2 = [2, 5]$.

Grafom kvadratickej funkcie $y = x^2 + 1$ je parabola s vrcholom v bode $[0, 1]$. V tomto bode funkcia nadobúda lokálne minimum.

Funkcia $y = x + 3$ je lineárna a jej grafom je priamka. Priamka je jednoznačne určená dvoma bodmi. Môžeme využiť jej priesečníky s parabolou.

Oblasť ohraničená grafmi funkcií $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$ je znázornená na Obr. 3.26.



Obr. 3.26: Oblasť ohraničená grafmi funkcií $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$.

Úlohy

3.16. Nakreslite grafy nasledujúcich funkcií.

a) $y = x^2$; $\quad y = x^4$; $\quad y = x^6$; $\quad y = (x+2)^2$; $\quad y = (x-1)^2$; $\quad y = (x+1)^2+2$.

b) $y = x^3$; $\quad y = -x^3$; $\quad y = x^5$; $\quad y = (x+1)^3$; $\quad y = (x-2)^3 - 4$.

c) $y = x^{-2}$; $\quad y = x^{-3}$; $\quad y = x^{\frac{1}{2}}$; $\quad y = x^{\frac{1}{3}}$.

d) $y = \sqrt{x}$; $\quad y = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$; $\quad y = (\sqrt{x})^2$.

3.17. Nakreslite grafy nasledujúcich funkcií a popíšte ich vlastnosti.

a) $y = 2(x+2)(x-3)$. **b)** $y = -(x-4)(x+2)$. **c)** $y = x^2 + 2x + 2$.

d) $y = -x^2 - 4$. **e)** $y = 3(x+2)^2$. **f)** $y = -\frac{3}{2}(x+1)^2$.

3.18. Nakreslite grafy nasledujúcich funkcií a popíšte ich vlastnosti.

a) $y = \dfrac{1}{x}$. **b)** $y = -\dfrac{2}{x}$. **c)** $y = 3 + \dfrac{2}{x-2}$.

d) $y = -1 - \dfrac{1}{x+2}$. **e)** $y = \dfrac{x+4}{x-2}$. **f)** $y = \dfrac{x+1}{x-3}$.

3.19. Nakreslite grafy nasledujúcich funkcií.

a) $y = e^x$; $\quad y = e^{-x}$; $\quad y = 2^x$; $\quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $\quad y = e^{2x}$; $\quad y = e^{3x}$; $\quad y = 3^{2x}$.

b) $y = \ln x$; $\quad y = \log_2 x$; $\quad y = \log x$; $\quad y = \log_3 x$; $\quad y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $\quad y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

c) $y = 2^x + 1$; $\quad y = 3 \cdot 2^x$; $\quad y = 2^{2x}$; $\quad y = 3^{x-1}$; $\quad y = e^x - 2$; $\quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3$.

d) $y = \ln(x+2)$; $\quad y = \log_2(x-4)$; $\quad y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$; $\quad y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$; $\quad y = \log(x+1) + 2$.

3.20. Nájdite priesečníky nasledujúcich funkcií s osou x a osou y.

a) $y = (x+2)(x-4)$. **b)** $y = 2(x+3)\left(\frac{1}{2} - x\right)$. **c)** $y = x^2 + 6x + 19$.

d) $y = -6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$. **e)** $y = \dfrac{x-2}{x}$. **f)** $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

g) $y = \dfrac{(x+3)(x-2)}{x+4}$. **h)** $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x - 8}$. **i)** $y = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - x - 6}$.

3.21. Zakreslite oblasť ohraničenú grafmi daných funkcií a nájdite ich priesečníky.

a) $y = -x + 2$, $\quad y = -x^2 + 4x - 2$. **b)** $y = \frac{8}{x}$, $\quad y = x^2 - 10x + 17$.

c) $y = x^3, \quad y = -7x + 8, \quad y = 8.$ **d)** $y = x^2 + 2x - 3, \quad y = 0.$

e) $y = -x^2 + 4x + 5, \quad y = 0.$ **f)** $y = x^2 + 2x, \quad y = x + 2.$

3.22. Zakreslite oblasť ohraničenú grafmi daných funkcií a nájdite ich priesečníky.

a) $y = x^2 - 9, \quad y = -5x - 9.$ **b)** $y = x^2 - 1, \quad y = 1 - x^2.$

c) $y = x^2 - x - 6, \quad y = -x^2 + 5x + 14.$ **d)** $y = x^2 - x - 6, \quad y = -x^2 + 2x - 7.$

e) $y = x^2, \quad y = \dfrac{x^2}{4}, \quad y = 4.$ **f)** $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$

3.23. Zakreslite oblasť ohraničenú grafmi daných funkcií a nájdite ich priesečníky.

a) $y = x^3, \quad y = \sqrt{x}.$ **b)** $y = \dfrac{6}{x}, \quad y = 7 - x.$

c) $y = \dfrac{4}{x}, \quad y = 4x, \quad y = x.$ **d)** $y = x^2, \quad y = 2.$

e) $y = x^2, \quad y = 4x.$ **f)** $y = \dfrac{x^2}{4}, \quad y = 1.$

3.24. Nakreslite oblasť ohraničenú grafmi daných funkcií a nájdite ich priesečníky.

a) $y = 4 - x^2, \quad y = x^2.$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{2}, \quad y = -x + \dfrac{3}{2}.$

c) $y = x^2 + 2, \quad y = 2x^2 + 1.$ **d)** $y = (x-1)^2, \quad y = 1 - x.$

e) $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad y = e^2.$ **f)** $y = e^x, \quad y = e^{2x}, \quad y = 4.$

Výsledky

3.16. Využite poznatky z podkapitol 3.8 Elementárne funkcie a 3.1 Pojem funkcie, definičný obor funkcie, kde je uvedené, ako sa zmenia grafy funkcií, ak sa ich predpis modifikuje.

3.17. **a)** $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle \frac{-25}{2}, \infty)$, zdola ohraničená, rastúca na $\langle \frac{1}{2}, \infty)$, klesajúca na $(-\infty, \frac{1}{2}\rangle$, lokálne minimum $\left[\frac{1}{2}, \frac{-25}{2}\right]$, ani párna, ani nepárna, nie je periodická, nie je prostá.
b) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (-\infty, 9\rangle$, zhora ohraničená, rastúca na $(-\infty, 1\rangle$, klesajúca na $\langle 1, \infty)$, lokálne maximum $[1, 9]$, ani párna, ani nepárna, nie je periodická, nie je prostá.
c) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 1, \infty)$, zdola ohraničená, rastúca na $\langle -1, \infty)$, klesajúca na $(-\infty, -1\rangle$, lokálne minimum $[-1, 1]$, ani párna, ani nepárna, nie je periodická, nie je prostá.
d) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (-\infty, -4\rangle$, zhora ohraničená, rastúca na $(-\infty, 0\rangle$, klesajúca na $\langle 0, \infty)$, lokálne maximum $[0, -4]$, párna, nie je periodická, nie je prostá.
e) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 0, \infty)$, zdola ohraničená, rastúca na $\langle -2, \infty)$, klesajúca na $(-\infty, -2\rangle$, lokálne minimum $[-2, 0]$, ani párna, ani nepárna, nie je periodická, nie je prostá.
f) $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = (-\infty, 0\rangle$, zhora ohraničená, rastúca na $(-\infty, -1\rangle$, klesajúca na $\langle -1, \infty)$, lokálne maximum $[-1, 0]$, nie je párna, nie je nepárna, nie je periodická, nie je prostá.

3.18. **a)** $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, neohraničená, klesajúca na $\mathbb{R} - \{0\}$, nemá lokálne extrémy, nepárna, nie je periodická, prostá.
b) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, $H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, neohraničená, rastúca na $\mathbb{R} - \{0\}$, nemá lokálne extrémy, nepárna, nie je periodická, prostá.
c) $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, $H(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, neohraničená, klesajúca na $\mathbb{R} - \{2\}$, nemá lokálne extrémy, ani párna, ani nepárna, nie je periodická, prostá.
d) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, $H(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$, neohraničená, rastúca na $\mathbb{R} - \{-2\}$, nemá lokálne extrémy, ani párna, ani nepárna, nie je periodická, prostá.
e) $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, $H(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, neohraničená, klesajúca na $\mathbb{R} - \{2\}$, nemá lokálne extrémy, ani párna, ani nepárna, nie je periodická, prostá.
f) $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, $H(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, neohraničená, klesajúca na $\mathbb{R} - \{3\}$, nemá lokálne extrémy, ani párna, ani nepárna, nie je periodická, prostá.

3.19. Využite poznatky z podkapitol 3.8 Elementárne funkcie a 3.1 Pojem funkcie, definičný obor funkcie, kde je uvedené, ako sa zmenia grafy funkcií, ak sa ich predpis modifikuje.

3.20. **a)** $P_{x_1} = [-2, 0]$, $P_{x_2} = [4, 0]$, $P_y = [0, -8]$. **b)** $P_{x_1} = [-3, 0]$, $P_{x_2} = \left[\frac{1}{2}, 0\right]$, $P_y = [0, 3]$.
c) $P_y = [0, 19]$. **d)** $P_{x_1} = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $P_{x_2} = \left[\frac{1}{3}, 0\right]$, $P_y = [0, 1]$. **e)** $P_x = [2, 0]$.
f) $P_x = [1, 0]$, $P_y = \left[0, -\frac{1}{2}\right]$. **g)** $P_{x_1} = [-3, 0]$, $P_{x_2} = [2, 0]$, $P_y = \left[0, -\frac{3}{2}\right]$. **h)** $P_x = [1, 0]$, $P_y = \left[0, \frac{1}{4}\right]$.

i) $P_{x_1} = [4, 0]$, $P_{x_2} = [-4, 0]$, $P_y = \left[0, \frac{8}{3}\right]$.

3.21. **a)** $[1, 1], [4, -2]$. **b)** $[1, 8], [8, 1]$. **c)** $[0, 8], [1, 1], [2, 8]$. **d)** $[1, 0], [-3, 0]$. **e)** $[-1, 0], [5, 0]$.
f) $[1, 3], [-2, 0]$.

3.22. **a)** $[0, -9], [-5, 16]$. **b)** $[1, 0], [-1, 0]$. **c)** $[-2, 0], [5, 14]$. **d)** $[1, -6], \left[\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right]$.
e) $[0, 0], [-2, 4], [2, 4], [-4, 4], [4, 4]$. **f)** $[0, 0], [1, 1]$.

3.23. **a)** $[0, 0], [1, 1]$. **b)** $[1, 6], [6, 1]$. **c)** $[0, 0], [-1, -4], [1, 4], [2, 2], [-2, -2]$. **d)** $\left[\sqrt{2}, 2\right], \left[-\sqrt{2}, 2\right]$.
e) $[0, 0], [4, 16]$. **f)** $[2, 1], [-2, 1]$.

3.24. **a)** $\left[\sqrt{2}, 2\right], \left[-\sqrt{2}, 2\right]$. **b)** $\left[1, \frac{1}{2}\right], \left[-3, \frac{9}{2}\right]$. **c)** $[1, 3], [-1, 3]$. **d)** $[0, 1], [1, 0]$.
e) $\left[-2, e^{-2}\right], [0, 1], \left[2, e^{2}\right]$. **f)** $[0, 1], [\ln 4, 4], [\ln 2, 4]$.

Poznámka 3.3. Goniometrickými funkciami sa budeme zaoberať aj v 5. kapitole Goniometria.

3.9 Testy

3.9.1 Test 1

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

3.1. Definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{4-x} + \ln(1+x) - \dfrac{1}{x}$ je

A) $\langle -1, 0) \cup (0, 4\rangle$. **B)** $(-1, 0) \cup (0, 4\rangle$. **C)** $\langle -1, 4\rangle$. **D)** $(-1, 4)$.

3.2. Funkcia $f(x) = -2x - 1$ pretne os x v bode s x-ovou súradnicou rovnou

A) 0. **B)** -2. **C)** -1. **D)** $-\frac{1}{2}$.

3.3. Kvadratická funkcia majúca vlastnosti $f(0) = 4, f(1) = 0, f(-1) = 10$ má funkčnú hodnotu pre $x = 2$ rovnú číslu

A) 1. **B)** 2. **C)** -2. **D)** 0.

3.4. Zistite, ktoré z nasledujúcich funkcií sú klesajúce na celom svojom definičnom obore.

A) $f(x) = 3^{1-x}$. **B)** $f(x) = 1 - x^2$. **C)** $f(x) = \log_5(2 + x)$. **D)** $f(x) = 5^{x+2}$.

3.5. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení o funkcii $f(x) = x^2 - 4x + 1$ sú pravdivé.

A) Funkcia f je rastúca na celom definičnom obore. **B)** Funkcia f má lokálne minimum $[2, -3]$.

C) Funkcia f je ohraničená. **D)** Funkcia f je prostá.

Správne odpovede: B, D, C, A, B.

3.9.2 Test 2

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení o funkcii $f(x) = x^2 + 4x - 1$ sú pravdivé.

   A) Funkcia f je klesajúca na $(-\infty, -2)$.

   B) Funkcia f je ohraničená.

   C) Funkcia f má lokálne minimum $[-2, -5]$.

   D) Funkcia f je prostá.

2. Grafom funkcie $f(x) = 3^x - 1$ je

   A) Priamka prechádzajúca bodmi $[0, 0]$ a $[1, 2]$.

   B) Ohraničená krivka.

   C) Krivka prechádzajúca bodmi $\big[-1, -\frac{2}{3}\big]$ a $[1, 2]$.

   D) Parabola.

3. Funkcia $f(x) = 2\log(x - 4)$ pretne os x v bode

   A) $[4, 0]$. **B)** $[0, 0]$. **C)** $[5, 0]$. **D)** $[14, 0]$.

4. Definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{3-x}} + \log_3 x$ je

   A) $(0, \infty)$. **B)** $(0, 3\rangle$. **C)** $\langle 0, 3)$. **D)** $(0, 3)$.

5. Funkcia $f(x) = -3x + 2$ pretne os x v bode, ktorého x-ová súradnica je

   A) 0. **B)** 2. **C)** $\frac{2}{3}$. **D)** $\frac{3}{2}$.

Správne odpovede: A a C, C, C, D, C.

3.9.3 Test 3

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1. Definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{3-x} + \ln(2x-1)$ je

   A) $\langle \frac{1}{2}, 3)$. **B)** $(\frac{1}{2}, 3\rangle$. **C)** $\langle \frac{1}{2}, 3\rangle$. **D)** $\langle 3, \infty)$.

2. Lineárna funkcia, ktorej graf prechádza bodmi $[0,2]$ a $[-1,-1]$ je daná predpisom

   A) $y = x + 2$. **B)** $y = 3x - 2$. **C)** $y = 3x + 2$. **D)** $y = 2 - 3x$.

3. Kvadratická funkcia majúca vlastnosti $f(0) = 3$, $f(2) = 7$ a $f(-2) = 7$ má funkčnú hodnotu pre $x = -1$ rovnú číslu

   A) 1. **B)** 3. **C)** 4. **D)** 2.

4. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení o funkcii $f(x) = 2 - 5^x$ sú pravdivé.

   A) Funkcia f je klesajúca na celom definičnom obore. **B)** Funkcia f je párna.

   C) Funkcia f je ohraničená. **D)** Funkcia f je prostá.

5. Priesečníky funkcie $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 4}$ s osou x sú

   A) $P_x = [0,0]$. **B)** $P_x = [4,0]$.

   C) $P_x = [1,0]$. **D)** $P_{x_1} = [0,0]$ a $P_{x_2} = [4,0]$.

Správne odpovede: B, C, C, A a D, A.

3.9.4 Test 4

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1. Kvadratická funkcia, ktorej graf prechádza bodmi $[0, -3]$, $[1, 0]$ a $[3, 0]$, je daná predpisom
   A) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. **B)** $f(x) = (x - 1) \cdot (3 - x)$.
   C) $f(x) = x^2 - 4x + 3$. **D)** $f(x) = -x^2 - 3x$.
2. Zistite, ktoré z nasledujúcich funkcií sú rastúce na celom svojom definičnom obore.
   A) $f(x) = x^2 - 3$. **B)** $f(x) = 1 - x^3$. **C)** $f(x) = \log_{0,2}(2 + x)$. **D)** $f(x) = 5^{x+2}$.
3. Definičný obor funkcie $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{8 - x}} + \sqrt[3]{x - 1} + \log \frac{x}{5}$ je
   A) $(0, 8)$. **B)** $\langle 1, 8)$. **C)** $\langle 0, 8\rangle$. **D)** $(0, 1)$.
4. Funkcia $f(x) = 1 - 2 \cdot 2^x$ nadobúda kladné hodnoty pre x patriace do
   A) $\mathbb{R}$. **B)** $(-\infty, -1)$. **C)** $\emptyset$. **D)** $(-1, \infty)$.
5. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení o funkcii $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ sú pravdivé.
   A) Funkcia f je prostá. **B)** Funkcia f má lokálne maximum $[1, -2]$.
   C) Funkcia f je zdola ohraničená. **D)** Funkcia f je rastúca na celom definičnom obore.

Správne odpovede: A a B, D, A, B, B.

4 Rovnice a nerovnice

Nech $y = f(x)$ a $y = g(x)$ sú dve funkcie premennej x definované na množine, ktorá je podmnožinou množiny reálnych čísel.

Rovnica je vzťah rovnosti medzi dvoma algebraickými výrazmi. Napríklad vzťah rovnosti

$$f(x) = g(x)$$

medzi dvoma funkciami tej istej premennej sa označuje ako *rovnica s jednou neznámou* x, pre všetky $x \in D$, pre ktoré platí rovnosť. Množinu D nazývame *definičným oborom* rovnice, $f(x)$ je ľavá strana a $g(x)$ pravá strana rovnice.

Riešením rovnice (koreňom) je číslo x_0, ktoré po dosadení za x zmení rovnicu na pravdivú rovnosť

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Riešiť rovnicu znamená určiť *množinu riešení (množinu koreňov, obor pravdivosti rovnice)* K, $K \subset D$. Množina riešení rovnice K je teda množina všetkých čísel, pre ktoré sa hodnota ľavej strany rovnice rovná hodnote pravej strany rovnice. Riešenie pozostáva z úprav – postupnosti rovníc, a to buď ekvivalentných alebo dôsledkových, až kým nedostaneme rovnicu, ktorej korene vieme určiť. Ekvivalentné úpravy sú úpravy, ktoré nemenia obor pravdivosti rovnice, na rozdiel od dôsledkových úprav, ktoré obor pravdivosti rovnice menia. Ak vykonávame iba ekvivalentné úpravy, tak majú pôvodná i nová rovnica rovnakú množinu riešení, teda skúška nie je nutná. Pri použití dôsledkových úprav je nutné urobiť skúšku. Skúšku vykonáme dosadením riešenia x_0 za x zvlášť do ľavej strany pôvodnej rovnice a zvlášť do pravej strany pôvodnej rovnice a následne porovnáme výsledky.

Ekvivalentné úpravy.

- Vzájomná výmena strán rovnice

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x).$$

- Pripočítanie, odčítanie toho istého čísla alebo výrazu s neznámou, ktorý je definovaný v celej množine riešení k obom stranám rovnice

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x).$$

- Vynásobenie oboch strán rovnice tým istým číslom alebo výrazom s neznámou, ktorý je rôzny od nuly a je definovaný v celej množine riešení

$$h(x) \neq 0 \text{ pre } x \in M: \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x).$$

- Umocnenie, odmocnenie oboch strán rovnice prirodzeným mocniteľom, ak sú obe strany rovnice nezáporné v celej množine riešení

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0 \text{ pre } x \in M, n \in \mathbb{N}: &\quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x)^n = g(x)^n, \\ f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0 \text{ pre } x \in M, n \in \mathbb{N}: &\quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}. \end{aligned}$$

- Logaritmovanie oboch strán rovnice pri tom istom základe, ak sú obe strany rovnice kladné v celej množine riešení

$$f(x) > 0,\ g(x) > 0 \text{ pre } x \in M, a > 0, a \neq 1: \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) = \log_a g(x).$$

Dôsledkové úpravy:

- Vynásobenie oboch strán rovnice tým istým číslom alebo výrazom s neznámou, ktorý je definovaný v celej množine riešení

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x).$$

- Umocnenie, odmocnenie oboch strán rovnice prirodzeným mocniteľom

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N}: &\quad f(x) = g(x) \Rightarrow f(x)^n = g(x)^n, \\ n \in \mathbb{N}: &\quad f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}. \end{aligned}$$

Pri *grafickom riešení* rovnice $f(x) = g(x)$ zostrojíme grafy funkcií f a g. Hľadané riešenie, resp. riešenia, sú určené x-ovými súradnicami priesečníkov týchto grafov. Ak sa dané grafy nepretnú, tak rovnica nemá riešenie. Ak dostaneme jeden priesečník, tak rovnica má jedno riešenie, ... To znamená, že počet priesečníkov určuje počet riešení rovnice.

Nerovnica je vzťah, pri ktorej sa hľadajú všetky čísla danej množiny, ktoré spĺňajú niektorú z nerovností

$$f(x) > g(x),\ f(x) < g(x),\ f(x) \geq g(x),\ f(x) \leq g(x).$$

Pri riešení nerovníc môžno použiť nasledujúce *ekvivalentné úpravy*.

- Zámena strán nerovnice so súčasnou zmenou znaku nerovnosti nerovnice

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x).$$

- Pripočítanie čísla alebo výrazu s neznámou, ktorý je definovaný v celej množine riešení k obom stranám nerovnice

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x).$$

- Vynásobenie nerovnice tým istým číslom alebo výrazom s neznámou, ktorý je definovaný a rôzny od nuly v celej množine riešení

$$\begin{aligned} h(x) > 0 \text{ pre } x \in M: &\quad f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) < g(x) \cdot h(x), \\ h(x) < 0 \text{ pre } x \in M: &\quad f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x). \end{aligned}$$

- Umocnenie, odmocnenie v prípade, ak sú obe strany nerovnice nezáporné v celej množine riešení

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0 \text{ pre } x \in M, n \in \mathbb{N}: &\quad f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)^n < g(x)^n, \\ f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0 \text{ pre } x \in M, n \in \mathbb{N}: &\quad f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}. \end{aligned}$$

Rozlišujeme rovnice (nerovnice) lineárne, kvadratické, exponenciálne, logaritmické, iracionálne, goniometické, s absolútnou hodnotou, s parametrami. Poznamenajme, že riešením goniometrických rovníc a nerovníc sa budeme zaoberať v 5. kapitole Goniometria.

4.1 Lineárne rovnice a nerovnice

Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Rovnica tvaru

$$ax + b = 0$$

sa nazýva *lineárna rovnica* s jednou neznámou x. Jej jediným koreňom v množine reálnych čísel je číslo

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Pri riešení rovníc, ktoré sa dajú upraviť na tvar $ax + b = 0$, môžu nastať nasledujúce prípady:

- ak $a \neq 0$, tak $K = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ ... rovnica má práve jedno riešenie,
- ak $a = 0$, $b = 0$, tak $K = \mathbb{R}$ ... rovnica má nekonečne veľa riešení,
- ak $a = 0$, $b \neq 0$, tak $K = \emptyset$ ... rovnica nemá riešenie.

Príklad 4.1. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*

$$2(5x-1)-11\left(x-\frac{7}{33}\right)=13\left(\frac{1}{3}+x\right)-12x.$$

Riešenie. Najprv roznásobme zátvorky a zjednodušme zlomky

$$\begin{aligned}2(5x-1)-11\left(x-\frac{7}{33}\right)&=13\left(\frac{1}{3}+x\right)-12x\\ 10x-2-11x+\frac{7}{3}&=\frac{13}{3}+13x-12x\\ -x+\frac{-2\cdot 3+7}{3}&=\frac{13}{3}+x\\ -x+\frac{1}{3}&=\frac{13}{3}+x\quad /-x,\ /-\tfrac{1}{3}\\ -2x&=4\quad /:(-2)\\ x&=-2.\end{aligned}$$

Definičný obor rovnice sú všetky reálne čísla, to znamená, že hľadáme riešenie v $\mathbb{R}$, čiže $K=\{-2\}$. Pri výpočte sme vykonali len ekvivalentné úpravy, teda skúška nie je nutná.

•

Príklad 4.2. *Riešme v $\mathbb{Z}$ rovnicu*

$$\frac{1-x}{2+x}=\frac{2-x}{3+x}.$$

Riešenie. Výrazy nachádzajúce sa v rovnici majú zmysel, ak sú splnené nasledujúce podmienky

$$x\neq -2,\ x\neq -3.$$

Upravme

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{2+x}&=\frac{2-x}{3+x}\quad /\cdot(2+x),\ /\cdot(3+x)\\ (1-x)(3+x)&=(2-x)(2+x)\\ 3+x-3x-x^2&=4-x^2\quad /+x^2\\ 3-2x&=4\quad /-3\\ -2x&=1\quad /:(-2)\\ x&=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Číslo $-\frac{1}{2}$ vyhovuje podmienkam, nie je však celé číslo. Rovnica nemá riešenie v množine celých čísel, $K=\emptyset$.

•

Príklad 4.3. *Riešme v $\mathbb{R}$ nerovnicu*

$$\frac{3x+4}{5}-\frac{7-x}{2}>3\left(x-\frac{1+3x}{10}\right).$$

Riešenie. Odstráňme zlomky

$$\begin{aligned}\frac{3x+4}{5}-\frac{7-x}{2}&>3\left(x-\frac{1+3x}{10}\right)\quad /\cdot 10\\ 2(3x+4)-5(7-x)&>30x-3(1+3x)\\ 6x+8-35+5x&>30x-3-9x\\ 11x-27&>21x-3\quad /-21x,\quad /+27\\ -10x&>24\quad /:(-10)\\ x&<-\frac{24}{10}\\ x&<-\frac{12}{5}.\end{aligned}$$

Teda $K=\left(-\infty,-\frac{12}{5}\right)$.

•

Úlohy

4.1. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $2x + 3(4 - x) = 11.$

b) $10x + 3(7x - 2) = 8.$

c) $\dfrac{2x-1}{4} = \dfrac{2x-5}{6}.$

d) $(x-3)(x+4) - 6x + 4 = (x-4)^2.$

e) $\dfrac{2x-5}{3x-4} - \dfrac{4x-5}{6x-1} = 0.$

f) $\dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{(x-3)^2} + \dfrac{x-4}{(x-3)^2}.$

4.2. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $\dfrac{x-2}{2} + \dfrac{x-3}{3} + \dfrac{x-4}{4} + \dfrac{x-6}{6} = 0.$

b) $x - \dfrac{1 - \frac{3x}{2}}{4} - \dfrac{x - \frac{x}{4}}{3} = 2.$

c) $\dfrac{6}{x+2} + \dfrac{x+2}{2-x} + \dfrac{x^2}{x^2-4} = 0.$

d) $\dfrac{\frac{x}{4} - \frac{2+3x}{2}}{\frac{x}{6} + \frac{1-x}{3}} = -\dfrac{27}{2}.$

e) $5 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{x + \frac{1}{5}}.$

f) $\dfrac{\frac{x}{4} - 4}{4 - x} + \dfrac{\frac{x}{4} + 4}{4 + x} = 0.$

4.3. Riešte v $\mathbb{R}$ nerovnice.

a) $\dfrac{4x-3}{7} < \dfrac{5x+2}{3}.$

b) $\dfrac{x+1}{5} - \dfrac{x-1}{2} - 3 \leq \dfrac{3x-1}{2}.$

c) $\dfrac{7x-8}{21} > 1 + \dfrac{x-1}{3}.$

d) $\dfrac{3+2x}{x-4} \leq 0.$

e) $\dfrac{2}{3-4x} \geq \dfrac{3}{5-8x}.$

f) $\dfrac{3}{2x-1} < \dfrac{4}{3x-2}.$

g) $\dfrac{2x-5}{4-3x} > 1.$

h) $\dfrac{x+2}{1-2x} \geq 3.$

i) $\dfrac{3-x}{x+3} < \dfrac{x+4}{5-x}.$

4.4. Nájdite dve reálne čísla, z ktorých jedno je o 10 väčšie ako druhé, ak rozdiel ich druhých mocnín je 400.

4.5. Súčet troch čísel je 266. Keď delíme druhé z nich prvým, dostaneme podiel 6 a zvyšok 1. Ak delíme tretie číslo druhým, opäť dostaneme podiel 6 a zvyšok 1. Ktoré sú to čísla?

4.6. Zamestnanca prijali do práce s platom 900 eur mesačne. V priebehu roka mu plat zvýšili na 1 000 eur. Za celý rok zarobil 11 600 eur. V ktorom mesiaci dostal prvýkrát vyšší plat?

4.7. Keď sa posadí v kine 7 návštevníkov do každého radu, zostane pre posledný rad len jeden divák. Keď sa posadí do každého radu 6 divákov, nezostane pre jedného miesto. Koľko divákov je v kine?

4.8. V triede sú chlapci a 20 dievčat. Dievčat prospieva 16 a chlapci všetci. Koľko žiakov je v triede, ak prospieva 87,5 % všetkých?

Výsledky

4.1. **a)** 1. **b)** $\frac{14}{31}$. **c)** $-\frac{7}{2}$. **d)** 8. **e)** -15. **f)** $\mathbb{R} - \{3\}$.

4.2. **a)** $\frac{16}{5}$. **b)** 2. **c)** 8. **d)** 1. **e)** $-\frac{1}{130}$. **f)** 0.

4.3. **a)** $(-1, \infty)$. **b)** $\langle -1, \infty)$. **c)** $\emptyset$. **d)** $\big\langle -\frac{3}{2}, 4\big)$. **e)** $\big(-\infty, \frac{1}{4}\big\rangle \cup \big(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\big)$. **f)** $\big(-\infty, \frac{1}{2}\big) \cup \big(\frac{2}{3}, 2\big)$.

g) $\big(\frac{4}{3}, \frac{9}{5}\big)$. **h)** $\big\langle \frac{1}{7}, \frac{1}{2}\big)$. **i)** $\big(-\infty, -3\big) \cup \big(\frac{1}{5}, 5\big)$.

4.4. $15, 25$.

4.5. $6, 37, 223$.

4.6. V 5. mesiaci po nástupe do zamestnania.

4.7. 43 divákov.

4.8. 32 žiakov.

4.2 Kvadratické rovnice a nerovnice

Nech $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *Kvadratická rovnica* s jednou neznámou x má tvar

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Výraz ax^2 nazývame kvadratický člen, bx lineárny člen a c nazývame absolútny člen kvadratickej rovnice. Počet riešení kvadratickej rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ závisí od diskriminantu D, ktorý vypočítame ako

$$D = b^2 - 4ac.$$

- Ak $D > 0$, tak kvadratická rovnica má dva rôzne reálne korene

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

- Ak $D = 0$, tak kvadratická rovnica má jeden dvojnásobný reálny koreň

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- Ak $D < 0$, tak kvadratická rovnica nemá reálny koreň.

Ak $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, tak rovnicu $ax^2+bx+c = 0$ nazývame úplnou kvadratickou rovnicou. Ak kvadratická rovnica neobsahuje lineárny člen, t. j. je v tvare $ax^2+c = 0$, nazýva sa rýdzokvadratická. Kvadratická rovnica, ktorá neobsahuje absolútny člen, t. j. má tvar $ax^2 + bx = 0$, sa nazýva kvadratická rovnica bez absolútneho člena.

Pre $a \neq 0$, možno rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ vydeliť číslom a a upraviť ju na normovaný tvar $x^2 + px + q = 0$, pričom pre jej korene x_1, x_2 platí

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 \cdot x_2 = q,$$

resp.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Pozri tiež 2 kapitolu Algebraické výrazy.

Príklad 4.4. *Riešme v* $\mathbb{R}$ *rovnice*

a) $4x^2 - 25 = 0$. **b)** $4x^2 - 2x = 0$. **c)** $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Riešenie.

a) Túto rýdzokvadratickú rovnicu môžeme riešiť rozkladom na súčin

$$4x^2 - 25 = 0$$
$$(2x - 5)(2x + 5) = 0.$$

Súčin dvoch výrazov sa rovná nule, ak aspoň jeden z nich je rovný nule, preto

$$2x - 5 = 0 \quad \text{alebo} \quad 2x + 5 = 0$$
$$x_1 = \frac{5}{2} \quad \text{alebo} \quad x_2 = -\frac{5}{2}.$$

Teda riešením danej rovnice je množina $K = \left\{\pm\frac{5}{2}\right\}$.

b) Ide o kvadratickú rovnicu bez absolútneho člena a môžeme ju riešiť napríklad vynímaním pred zátvorku

$$\begin{aligned} 4x^2 - 2x &= 0 \\ 2x(2x-1) &= 0. \end{aligned}$$

Teda

$$2x = 0 \quad \text{alebo} \quad 2x - 1 = 0.$$

Odtiaľ

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}$$
$$K = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}.$$

c) Úplnú kvadratickú rovnicu $x^2 - 3x - 10 = 0$ vyriešime pomocou diskriminantu. Je zrejmé, že $a = 1$, $b = -3$, $c = -10$.

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49.$$

Pre korene dostávame

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+7}{2} = \dfrac{10}{2} = 5, \\ \dfrac{3-7}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2. \end{cases}$$

Preto $K = \{-2, 5\}$.

•

Príklad 4.5. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*

$$\frac{3+x}{3-x} = \frac{x+27}{x-27}.$$

Riešenie. Výrazy nachádzajúce sa v rovnici majú zmysel, ak sú splnené nasledujúce podmienky

$$x \neq 3,\ x \neq 27.$$

Upravme

$$\begin{aligned} \frac{3+x}{3-x} &= \frac{x+27}{x-27} \quad / \cdot (3-x),\ / \cdot (x-27) \\ (3+x)(x-27) &= (x+27)(3-x) \\ 3x - 81 + x^2 - 27x &= 3x - x^2 + 81 - 27x \\ x^2 - 24x - 81 &= -x^2 - 24x + 81 \quad / + x^2,\ / + 24x,\ / + 81 \\ 2x^2 &= 162 \quad / : 2 \\ x^2 &= 81 \quad / \sqrt{\ } \\ |x| &= 9 \\ x &= \pm 9. \end{aligned}$$

Keďže čísla ± 9 vyhovujú podmienkam $x \neq 3$, $x \neq 27$, dostávame

$$K = \{\pm 9\}.$$

•

Príklad 4.6. *Riešme v $\mathbb{R}$ nerovnicu*

$$x^2 - 9x + 8 \leq 0.$$

Riešenie. Rozložme výraz na ľavej strane na súčin koreňových činiteľov

$$\begin{aligned} x^2 - 9x + 8 &\leq 0 \\ (x-1)(x-8) &\leq 0. \end{aligned}$$

Odtiaľ dostávame nulové body $x = 1$, $x = 8$, t. j. čísla, v ktorých výraz $x^2 - 9x + 8$ nadobúda hodnotu nula. Tieto čísla rozdelia množinu reálnych čísel na tri intervaly $(-\infty, 1\rangle$, $\langle 1, 8\rangle$ a $\langle 8, \infty)$. Poznamenajme, že keďže číslo 1 a aj číslo 8 sú riešením danej nerovnice, intervaly by mohli byť aj tvaru $(-\infty, 1)$, $\langle 1, 8\rangle$ a $(8, \infty)$. Dôležité je, aby ako číslo 1, tak aj číslo 8 patrilo do niektorého intervalu.

Vyšetríme znamienka výrazov $x-1$ a $x-8$ na týchto intervaloch, t. j. zvolíme ľubovoľné číslo zvnútra daného intervalu a dosadíme ho do výrazu. Napríklad z intervalu $(-\infty, 1)$ zvoľme číslo -5:

$$x - 1\big|_{x=-5} = -5 - 1 = -6 \quad \Rightarrow \quad „-“,$$
$$x - 8\big|_{x=-5} = -5 - 8 = -13 \quad \Rightarrow \quad „-“.$$

Výsledky zapíšeme do tabuľky a určíme výsledné znamienko výrazu $(x-1)(x-8)$ na jednotlivých intervaloch. Poznamenajme, že súčin dvoch kladných, resp. dvoch zápornych čísel, je číslo kladné a súčin kladného a záporného čísla je číslo záporné.

	$(-\infty, 1\rangle$	$\langle 1, 8\rangle$	$\langle 8, \infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-8$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)(x-8)$	$+$	$-$	$+$

Kedže hľadáme interval, na ktorom výraz $(x-1)(x-8)$ nadobúda nekladné hodnoty (≤ 0), tak riešením nerovnice je interval $\langle 1, 8\rangle$. Teda

$$K = \langle 1, 8\rangle\,.$$

Úlohy

4.9. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $x^2 - 14x + 33 = 0$. **b)** $x^2 - 10x + 25 = 0$. **c)** $x^2 - 4x + 13 = 0$.

d) $x^2 - 14x + 49 = 0$. **e)** $4x^2 - 5x + 1 = 0$. **f)** $12x^2 - 5x - 3 = 0$.

4.10. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $(x-2)^2 + (x-9)^2 = (x-11)^2$. **b)** $\dfrac{x^2-4}{x^2+4} + \dfrac{x^2+4}{x^2-4} = -\dfrac{194}{65}$.

c) $\dfrac{1}{2x-x^2} + \dfrac{x-4}{x^2+2x} = \dfrac{2}{4-x^2}$. **d)** $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 - 3 \cdot \dfrac{x-1}{x+1} - 4 = 0$.

e) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$. **f)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

4.11. Riešte v $\mathbb{R}$ nerovnice.

a) $x^2 + 5x - 14 > 0$. **b)** $x^2 + 5x + 32 \leq 0$. **c)** $x^2 + 6 < 5x$.

d) $2x^2 - 2x \geq 4$. **e)** $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+6x} < 0$. **f)** $x^2 - 12x > -26 - 2x$.

4.12. Riešte v $\mathbb{R}$ nerovnice.

a) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{3}{x+1} < 1$. **b)** $1 + \dfrac{12}{x^2} \geq \dfrac{7}{x}$. **c)** $\dfrac{4x+19}{x+5} > \dfrac{4x-17}{x-3}$.

d) $(x+2)(x-1)^2(x-4) < 0$. **e)** $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+1} \geq 2$. **f)** $\dfrac{x^2-3x+24}{x^2-3x+3} < 4$.

4.13. Súčin dvoch za sebou idúcich čísel je 462. Určte ich súčet.

4.14. Nájdite dve reálne čísla, ktorých súčet je 65 a súčin 1 000.

4.15. Ktoré číslo je o 600 menšie ako jeho druhá mocnina?

4.16. Pravouhlý trojuholník má preponu dlhú 17 cm. Ak zmenšíme obidve odvesny o 3 cm, zmenší sa prepona o 4 cm. Určte dĺžky odvesien.

4.17. Ak dve protiľahlé strany štvorca zväčšíme o 3 cm a zostávajúce strany zmenšíme o 3 cm, dostaneme obdĺžnik s obsahom 135 cm^2. Vypočítajte dĺžku strany štvorca.

Výsledky

4.9. **a)** $3, 11$. **b)** 5. **c)** $\emptyset$. **d)** 7. **e)** $\frac{1}{4}, 1$. **f)** $-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}$.

4.10. **a)** ± 6. **b)** $\pm\frac{4}{3}$. **c)** 3. **d)** $-\frac{5}{3}, 0$. **e)** $\pm\sqrt{2}$. **f)** ± 3.

4.11. **a)** $(-\infty, -7) \cup (2, \infty)$. **b)** $\emptyset$. **c)** $(2, 3)$. **d)** $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 2, \infty)$. **e)** $(-6, -2) \cup (0, 3)$. **f)** $\mathbb{R}$.

4.12. **a** $(-1, 2) \cup (8, \infty)$. **b)** $(-\infty, 0) \cup (0, 3\rangle \cup \langle 4, \infty)$. **c)** $(-7, -5) \cup (3, \infty)$. **d)** $(-2, 1) \cup (1, 4)$. **e)** 3. **f)** $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$.

4.13. ± 43.

4.14. 25, 40.

4.15. -24, 25.

4.16. 8 cm, 15 cm.

4.17. 12 cm.

4.3 Exponenciálne rovnice a nerovnice

Exponenciálna rovnica je rovnica, v ktorej sa neznáma x vyskytuje v exponente nejakej mocniny.
Rovnicu typu
$$a^{f(x)} = a^{g(x)},$$
kde ľavá a pravá strana majú rovnaký základ mocniny $a > 0$, $a \neq 1$, riešime porovnaním exponentov, teda
$$f(x) = g(x).$$

Rovnicu typu
$$a^{f(x)} = b^{g(x)},$$
kde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $a \neq b$, teda rovnicu s rôznymi základmi mocniny riešime logaritmovaním
$$\begin{aligned} a^{f(x)} &= b^{g(x)} \quad / \text{„}log_c\text{“} \\ \log_c a^{f(x)} &= \log_c b^{g(x)} \\ f(x) \cdot \log_c a &= g(x) \cdot \log_c b, \end{aligned}$$
kde c je ľubovoľné reálne číslo, $c > 0$, $c \neq 1$.

Zložitejšie exponenciálne rovnice riešime pomocou substitúcie alebo ich upravíme na jeden z vyššie uvedených tvarov.

Pri riešení exponenciálnych rovníc a nerovníc využívame nasledujúce vety a vlastnosti.

- Vety pre počítanie s mocninami s odmocninami, viď podkapitola 1.2 Reálne čísla.

- Pre $0 < a < 1$ platí

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x),$$
$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

- Pre $a > 1$ platí

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x),$$
$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

Príklad 4.7. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnice*

a) $3^{2x-5} = 243.$ **b)** $4^{x-1} = 7^x.$ **c)** $9^x - 25 \cdot 3^x - 54 = 0.$

Riešenie.

a) Rovnicu riešme tak, že na oboch stranách rovnice získame mocninu s rovnakým základom. Potom porovnáme exponenty.

$$\begin{aligned} 3^{2x-5} &= 243 \\ 3^{2x-5} &= 3^5 \\ 2x - 5 &= 5 \quad / + 5 \\ 2x &= 10 \quad / : 2 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Teda $K = \{5\}$.

b) Na jednotlivých stranách rovnice sú exponenciálne funkcie s rôznymi základmi. Preto rovnicu logaritmujeme a využijeme vlastnosti logaritmov.

$$\begin{aligned} 4^{x-1} &= 7^x \quad / \text{„log“} \\ \log 4^{x-1} &= \log 7^x \\ (x-1) \cdot \log 4 &= x \cdot \log 7 \\ x \cdot \log 4 - \log 4 &= x \cdot \log 7 \quad / + \log 4, / - x \cdot \log 7 \\ x \cdot (\log 4 - \log 7) &= \log 4 \quad / : (\log 4 - \log 7) \\ x &= \frac{\log 4}{\log 4 - \log 7} \\ K &= \left\{ \frac{\log 4}{\log 4 - \log 7} \right\}. \end{aligned}$$

Poznamenajme, že okrem dekadického logaritmu log, sme mohli použiť logaritmus pri ľubovoľnom základe. Výhodou použitia dekadického, prípadne prirodzeného logaritmu je, že sa dané logaritmy dajú ľahko vypočítať na kalkulačke, ak by sme potrebovali približne vyčísliť výsledok.

c) Túto rovnicu vyriešime pomocou substitúcie $3^x = t$.

$$\begin{aligned} 9^x - 25 \cdot 3^x - 54 &= 0 \\ t^2 - 25t - 54 &= 0 \\ (t-27)(t+2) &= 0. \end{aligned}$$

Riešením kvadratickej rovnice sú $t_1 = 27$ a $t_2 = -2$. Vráťme sa späť k premennej x.
Ak $t = 27$, tak $3^x = t = 27 = 3^3$, teda $x_1 = 3$.
Ak $t = -2$, tak $3^x = t = -2$, čo nemôže nastať, pretože exponenciálna funkcia nadobúda len kladné hodnoty, teda rovnica $3^x = -2$ nemá riešenie. Preto $K = \{3\}$.

Príklad 4.8. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*

$$4^{x+1} - 8 \cdot 4^{x-1} = 32.$$

Riešenie. Rovnicu upravíme a následne porovnáme exponenty mocnín s rovnakým základom.

$$\begin{aligned}
4^{x+1} - 8 \cdot 4^{x-1} &= 32 \\
4^x \cdot 4 - 8 \cdot 4^x \cdot \frac{1}{4} &= 32 \\
4^x \cdot 4 - 2 \cdot 4^x &= 32 \\
2 \cdot 4^x &= 32 \quad / : 2 \\
4^x &= 16 \\
4^x &= 4^2.
\end{aligned}$$

Porovnaním exponentov dostávame $x = 2$, čiže $K = \{2\}$.

Príklad 4.9. *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnice*

a) $5^{3-x} < 1$. **b)** $0,4^{2+x} < 0,064$. **c)** $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$.

Riešenie.

a) Nerovnicu budeme riešiť porovnaním exponentov. Keďže základ mocniny je väčší ako jedna, znak nerovnosti sa pri porovnaní exponentov nezmení.

$$\begin{aligned}
5^{3-x} &< 1 \\
5^{3-x} &< 5^0 \\
3 - x &< 0 \quad / - 3 \\
-x &< -3 \quad / \cdot (-1) \\
x &> 3 \\
x &\in (3, \infty) \\
K &= (3, \infty).
\end{aligned}$$

b) V tomto prípade je základ mocniny menší ako jedna, teda znak nerovnosti sa pri porovnaní exponentov zmení na opačný.

$$\begin{aligned}
0,4^{2+x} &< 0,064 \\
0,4^{2+x} &< 0,4^3 \\
2 + x &> 3 \quad / - 2 \\
x &> 1 \\
x &\in (1, \infty) \\
K &= (1, \infty).
\end{aligned}$$

c) Nerovnicu budeme riešiť substitúciou $2^x = t$. Teda

$$\begin{aligned}
4^x - 3 \cdot 2^x + 2 &\leq 0 \\
t^2 - 3t + 2 &\leq 0 \\
(t-1)(t-2) &\leq 0.
\end{aligned}$$

Nulové body sú $t = 1$, $t = 2$.

	$(-\infty, 1)$	$\langle 1, 2\rangle$	$(2, \infty)$
$t-1$	$-$	$+$	$+$
$t-2$	$-$	$-$	$+$
$(t-1)(t-2)$	$+$	$-$	$+$

Teda $t \in \langle 1, 2\rangle$, čiže $1 \leq t \leq 2$. Keďže $t = 2^x$, pre premennú x dostávame

$$\begin{aligned}
1 &\leq 2^x \leq 2 \\
2^0 &\leq 2^x \leq 2^1.
\end{aligned}$$

Porovnajme koeficienty. Keďže základ mocniny je väčší ako 1, platí

$$0 \leq x \leq 1,$$

teda riešenie danej nerovnice je $K = \langle 0, 1 \rangle$.

Úlohy

4.18. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $10^x = 0,1 \cdot 1000^{x-1}$.

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} = 125$.

c) $4^{x-2} = 0,125$.

d) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{125}{27}$.

e) $27 \cdot 27^{2x-3} = 81^{3x-5}$.

f) $\frac{27^{3x-2}}{243} = 81^{3x-7}$.

g) $\frac{10}{10^x} = 0,01$.

h) $4^{\frac{1-x}{1+x}} = 4^{\frac{1}{3}}$.

i) $0,25^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$.

4.19. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 2 \cdot 3^x = 126$.

b) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$.

c) $2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot (10^{x-1})^5$.

d) $3 \cdot 4^x + \frac{9^{x+2}}{3} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{9^{x+1}}{2}$.

e) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$.

f) $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$.

g) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

h) $\frac{1}{6^x} + 6^x - \frac{37}{6} = 0$.

i) $e^{3x} - e^x = 0$.

j) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$.

4.20. Riešte v $\mathbb{R}$ nerovnice.

a) $2^{3x-1} < 8$.

b) $0,5^{2-5x} > 256$.

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+3} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{x+2}$.

d) $e^{4x-1} \geq 1$.

e) $16^x < 0,125$.

f) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x-1} \leq \left(\frac{1}{49}\right)^{x+3}$.

4.21. Riešte v $\mathbb{R}$ nerovnice.

a) $5^x \cdot 2^x > 0,001 \cdot (10^x)^2$.

b) $9^{x+2} + 5 \cdot 9^{x+1} < 14$.

c) $2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$.

d) $5^{2x+1} > 5^x + 4$.

e) $3^{x+1} - 9^x > \log_3 9$.

f) $0,25^{\frac{3-2x}{x+1}} \leq 1$.

Výsledky

4.18. **a)** 2. **b)** $\frac{1}{2}$. **c)** $\frac{1}{2}$. **d)** -3. **e)** $\frac{7}{3}$. **f)** $\frac{17}{3}$. **g)** 3. **h)** $\frac{1}{2}$. **i)** 3.

4.19. **a)** 2. **b)** 9. **c)** $\frac{3}{2}$. **d)** $-\frac{1}{2}$. **e)** -1. **f)** 2. **g)** $\ln 3$. **h)** ± 1. **i)** 0. **j)** $0, 1$.

4.20. **a)** $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$. **b)** $(2, \infty)$. **c)** $\langle 0, \infty)$. **d)** $\left\langle \frac{1}{4}, \infty\right)$. **e)** $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$. **f)** $\langle 7, \infty)$.

4.21. **a)** $(-\infty, 3)$. **b)** $(-\infty, -1)$. **c)** $(0, 1)$. **d)** $(0, \infty)$. **e)** $\left(0, \log_3 2\right)$. **f)** $\left(-1, \frac{3}{2}\right\rangle$.

4.4 Logaritmické rovnice a nerovnice

Logaritmická rovnica je rovnica, v ktorej sa vyskytujú logaritmy výrazov s neznámou x.

Riešením základnej logaritmickej rovnice
$$\log_a x = b,$$
kde $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$, je podľa definície logaritmu
$$x = a^b.$$

Zložitejšie logaritmické rovnice najprv upravíme na tvar
$$\log_a f(x) = \log_a g(x),$$
kde $a > 0$, $a \neq 1$ a funkcie $f(x)$, $g(x)$ nadobudajú kladné hodnoty v množine riešení. Keďže logaritmická funkcia je prostá na celom svojom definičnom obore, tak platí
$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Pri riešení logaritmických rovníc a nerovníc využívame vety o logaritmoch:

- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,
- $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,
- $\log_a x^s = s \cdot \log_a x$,
- $\log_a a = 1$,
- $\log_a 1 = 0$,

kde x a y sú ľubovoľné kladné reálne čísla, a je kladné reálne číslo rôzne od jednej a s je ľubovoľné reálne číslo.

Dekadický logaritmus je logaritmus pri základe $a = 10$. V zápise $\log_{10} x$ sa „10“ vynecháva, píše sa len $\log x$. Prirodzený logaritmus je logaritmus pri základe e. Číslo e nazývame Eulerovo číslo. Namiesto $\log_e x$ píšeme len $\ln x$. Poznamenajme, že Eulerovo číslo e je iracionálne číslo, teda sa nedá zapísať v tvare zlomku. Jeho desatinný rozvoj je nekonečný a neperiodický. Približná hodnota čísla e, zaokrúhlená na tri desatinné miesta, je $e = 2,718$.

Platí taktiež:

- Ak $0 < a < 1$, tak
$$\begin{aligned}\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x),\\ \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x).\end{aligned}$$
- Ak $a > 1$, tak
$$\begin{aligned}\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x),\\ \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x).\end{aligned}$$

Pripomeňme, že logaritmus je definovaný len pre kladné výrazy. Teda pri riešení logaritmických rovníc musíme overiť, či výsledok patrí do definičného oboru rovnice alebo vykonať skúšku správnosti.

Príklad 4.10. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*
$$\log_3(2x + 5) = 4.$$

Riešenie. Pri určovaní definičného oboru funkcie musí platiť podmienka
$$2x + 5 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{5}{2}.$$

Vychádzajme z definície logaritmu
$$\log_a x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = a^b.$$

Teda

$$\begin{aligned} \log_3(2x+5) &= 4 \\ 2x+5 &= 3^4 \quad /-5 \\ 2x &= 76 \quad /:2 \\ x &= 38. \end{aligned}$$

Číslo 38 vyhovuje podmienke $x > -\frac{5}{2}$, teda $K = \{38\}$. •

Príklad 4.11. *Riešme v* $\mathbb{R}$ *rovnicu*

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7.$$

Riešenie. Keďže logaritmus existuje len z kladných výrazov podmienka, musí platiť $x > 0$.
Pri riešení vyžijeme vety o logaritmoch a upravíme jednotlivé logaritmy na logaritmy s rovnakým základom, napríklad so základom 2, použijúc vzťah

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Teda

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x &= 7 \\ \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 16} &= 7 \\ \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 2^2} + \frac{\log_2 x}{\log_2 2^4} &= 7 \\ \log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} + \frac{\log_2 x}{4} &= 7 \\ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \log_2 x &= 7 \\ \frac{1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1}{4} \log_2 x &= 7 \\ \frac{7}{4} \log_2 x &= 7 \quad / \cdot 4, \ /:7 \\ \log_2 x &= 4. \end{aligned}$$

Využijúc definíciu logaritmu dostávame

$$\begin{aligned} x &= 2^4 \\ x &= 16. \end{aligned}$$

Keďže číslo 16 vyhovuje podmienke $x > 0$, dostávame $K = \{16\}$. •

Príklad 4.12. *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnice*

a) $\log_8 (3x-1) < 1$.

b) $\log_{\frac{1}{5}} (2x-7) > 0$.

Riešenie.

a) Pri riešní vhodne prepíšeme číslo 1 pomocou logaritmu pri základe 8, t. j. $1 = \log_8 8$. Teda

$$\begin{aligned} \log_8 (3x-1) &< 1 \\ \log_8 (3x-1) &< \log_8 8. \end{aligned}$$

Keďže základ logaritmu je väčší ako jedna, znak nerovnosti po odlogaritmovaní medzi argumentmi nemeníme.

$$\begin{aligned} 3x-1 &< 8 \quad /+1 \\ 3x &< 9 \quad /:3 \\ x &< 3. \end{aligned}$$

Podmienka pre existenciu logaritmu je

$$3x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{3},$$

preto riešeniu nerovnice vyhovuje len také $x < 3$, ktoré zároveň spĺňa aj podmienku $x > \frac{1}{3}$. Teda hľadáme ich prienik, preto $K = \left(\frac{1}{3}, 3\right)$.

b) V tomto prípade je základ logaritmu menší ako jedna, preto znak nerovnosti po odlogaritmovaní medzi argumentmi zmeníme na opačný. Taktiež vhodne prepíšeme číslo 0 pomocou logaritmu pri základe $\frac{1}{5}$, teda $0 = \log_{\frac{1}{5}} 1$.

$$\begin{aligned}
\log_{\frac{1}{5}} (2x - 7) &> 0 \\
\log_{\frac{1}{5}} (2x - 7) &> \log_{\frac{1}{5}} 1 \\
2x - 7 &< 1 \quad / + 7 \\
2x &< 8 \quad / : 2 \\
x &< 4.
\end{aligned}$$

Podmienka pre existenciu logaritmu je

$$2x - 7 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{7}{2}.$$

Keďže musí zároveň platiť $x < 4$ a $x > \frac{7}{2}$, dostávame $K = \left(\frac{7}{2}, 4\right)$.

Úlohy

4.22. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $\log_4(2x + 8) = 2.$

b) $\log_{0,5}(2 - x) = 1.$

c) $\log_2(x + 2) + \log_2(1 - x) = 1.$

d) $\log(x + 2) + \log(x - 7) = 1.$

e) $\log_4 (3 + x) - \log_4 (3 - x) = 2.$

f) $\log (x + 5) - \log (x - 1) = 1 - \log 2.$

g) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x.$

h) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x.$

i) $\dfrac{3 + \log_5 x}{2 - \log_5 x} = 4.$

j) $\dfrac{5 + \log x}{3 - \log x} = 3.$

4.23. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $\log (1 + x) - \log (1 - x) = \log (3 + x) - \log (4 - x).$

b) $\log_4 (x^2 - 9) - \log_4 (x + 3) = 3.$

c) $\log (x + 2) + \log (x - 7) = 2 \log (x - 4).$

d) $\log_3(1 + \log_3(2^x - 7)) = 1.$

e) $1 + \log x^3 = \dfrac{20}{\log x^2}.$

f) $\ln x^2 + \ln^2 x = 0.$

g) $\dfrac{1}{5 - \log x} + \dfrac{2}{1 + \log x} = 1.$

h) $x^{\log x} - 10x^{-\log x} = 9.$

i) $x^{1+\log x} = 100.$

j) $\log_x 10 + \log_{x^2} 10 = 6.$

4.24. Riešte v $\mathbb{R}$ nerovnice.

a) $\log_5 (4x + 1) < 2.$

b) $\log (4 - 3x) \leq -1.$

c) $\ln x < 5.$

d) $\log_{0,5} (x^2 - 4x + 8) < -2.$

e) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2 - 3x}{x} \leq -1.$

f) $\log_3 (x^2 - 6x) > 2.$

g) $\log (2x - 1) + \log (4 - x) \geq 0.$

h) $\log^2 x - \log x > 2.$

i) $4^{\log (x^2 - 5x + 7)} > 1.$

j) $\log_4 \dfrac{5 - 2x}{x + 4} < 0.$

k) $6 - \log_5 x - \dfrac{5}{\log_5 x} \geq 0.$

l) $\log_4 \big(\log_2 (1 - x)\big) < 0.$

Výsledky

4.22. **a)** 4. **b)** $\frac{3}{2}$. **c)** $-1, 0$. **d)** 8. **e)** $\frac{45}{17}$. **f)** $\frac{5}{2}$. **g)** $0,3$. **h)** 2. **i)** 5. **j)** 10.

4.23. **a)** $-\frac{1}{5}$. **b)** 67. **c)** 10. **d)** 4. **e)** $10^{-2}, 10^{\frac{5}{3}}$. **f)** $e^{-2}, 1$. **g)** $100, 1000$. **h)** $\frac{1}{10}, 10$.

i) $\frac{1}{100}, 10$. **j)** $\sqrt[4]{10}$.

4.24. **a)** $\left(-\frac{1}{4}, 6\right)$. **b)** $\left\langle \frac{13}{10}, \frac{4}{3}\right)$. **c)** $\left(0, e^5\right)$. **d)** $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. **e)** $\left(0, \frac{1}{3}\right\rangle$.

f) $\left(-\infty, 3 - 3\sqrt{2}\right) \cup \left(3 + 3\sqrt{2}, \infty\right)$. **g)** $\left\langle \frac{9-\sqrt{41}}{4}, \frac{9+\sqrt{41}}{4} \right\rangle$. **h)** $\left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (100, \infty)$.

i) $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$. **j)** $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$. **k)** $(0,1) \cup \left\langle 5, 5^5\right\rangle$. **l)** $(-1, 0)$.

4.5 Iracionálne rovnice a nerovnice

Iracionálne rovnice obsahujú odmocniny z výrazov s neznámou x. Odmocniny odstraňujeme neekvivalentnou úpravou umocnením, preto je nutnou súčasťou riešenia takýchto rovníc a nerovníc skúška.

Poznámka 4.1. Pripomeňme si, že párna odmocnina existuje len z nezáporných výrazov.

Príklad 4.13. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*

$$\sqrt{x-3} - 4 = 0.$$

Riešenie. Odmocninu osamostatníme a potom rovnicu umocníme.

$$\begin{aligned} \sqrt{x-3} - 4 &= 0 \quad / + 4 \\ \sqrt{x-3} &= 4 \quad / \, ()^2 \\ x - 3 &= 16 \quad / + 3 \\ x &= 19. \end{aligned}$$

Vykonajme skúšku dosadením $x = 19$ do ľavej a do pravej strany pôvodnej rovnice.

$$\left.\begin{array}{l} L(19) = \sqrt{19-3} - 4 = \sqrt{16} - 4 = 4 - 4 = 0 \\ P(19) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow L(19) = P(19).$$

Keďže $L(x = 19) = P(x = 19)$, číslo 19 je riešením rovnice, teda

$$K = \{19\}.$$

Príklad 4.14. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x^2 - 7} = 0.$$

Riešenie. Rovnicu upravme, osamostatníme odmocniny, obidve strany umocníme a vyriešime kvadratickú rovnicu.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} - \sqrt{x^2-7} &= 0 \\ \sqrt{x+5} &= \sqrt{x^2-7} \quad / \, ()^2 \\ x + 5 &= x^2 - 7 \quad / - x^2 + 7 \\ -x^2 + x + 12 &= 0 \quad / \cdot (-1) \\ x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x-4)(x+3) &= 0 \\ x_1 = 4, \quad x_2 &= -3. \end{aligned}$$

Vykonajme skúšku

$$\left.\begin{array}{l} L(4) = \sqrt{4+5} - \sqrt{4^2-7} = \sqrt{9} - \sqrt{16-7} = 3 - \sqrt{9} = 3 - 3 = 0 \\ P(4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow L(4) = P(4).$$

$$\left.\begin{array}{l} L(-3) = \sqrt{-3+5} - \sqrt{(-3)^2-7} = \sqrt{2} - \sqrt{9-7} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \\ P(-3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow L(-3) = P(-3).$$

Skúškou sme overili, že obe čísla vyhovujú rovnici, preto $K = \{-3, 4\}$.

Príklad 4.15. *Riešme v* $\mathbb{R}$ *rovnicu*

$$2 + \sqrt{x-7} = \sqrt{x+9}.$$

Riešenie. Obidve strany umocníme, potom odmocninu, ktorá zostala osamostatníme. Rovnicu opäť umocníme.

$$\begin{aligned} 2 + \sqrt{x-7} &= \sqrt{x+9} \quad / \ ()^2 \\ 4 + 4\sqrt{x-7} + x - 7 &= x + 9 \\ 4\sqrt{x-7} + x - 3 &= x + 9 \quad / - x + 3 \\ 4\sqrt{x-7} &= 12 \quad / : 4 \\ \sqrt{x-7} &= 3 \quad / \ ^2 \\ x - 7 &= 9 \quad / + 7 \\ x &= 16. \end{aligned}$$

Vykonajme skúšku

$$\left.\begin{array}{l} L(16) = 2 + \sqrt{16-7} = 2 + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5 \\ P(16) = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow L(16) = P(16).$$

Skúškou sme overili, že číslo 16 vyhovuje rovnici, teda $K = \{16\}$.

Príklad 4.16. *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnicu*

$$\sqrt{4-x} < 1.$$

Riešenie. Keďže druhá odmocnina je definovaná len pre nezáporné čísla, musí byť splnená nasledujúca podmienka

$$4 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 4.$$

Nerovnicu riešme umocnením

$$\begin{aligned} \sqrt{4-x} &< 1 \quad / \ ()^2 \\ 4 - x &< 1 \quad / - 4 \\ -x &< -3 \quad / \cdot (-1) \\ x &> 3. \end{aligned}$$

Podmienky $x \leq 4$ a $x > 3$ musia byť splnené súčasne, preto hľadáme ich prienik. Preto $K = (3, 4\rangle$.

Príklad 4.17. *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnicu*

$$\sqrt{4+x} > x - 2.$$

Riešenie. Daná nerovnica ma zmysel, ak je splnená podmienka

$$4 + x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -4.$$

Keďže výraz na ľavej strane nerovnice je nezáporný, rozlíšime dva prípady vzhľadom na znamienko výrazu na pravej strane.

I. Pre $x-2 \geq 0$, t. j. $x \geq 2$, je pravá strana nerovnice nezáporná. Nerovnicu umocníme.

$$\begin{aligned} \sqrt{4+x} &> x-2 \quad / \, ()^2 \\ 4+x &> x^2-4x+4 \quad / -x^2+4x-4 \\ -x^2+5x &> 0 \quad / \cdot (-1) \\ x^2-5x &< 0 \\ x(x-5) &< 0. \end{aligned}$$

Nulové body sú $x=0$, $x=5$. Potom

	$(-\infty,0)$	$(0,5)$	$(5,\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$x(x-5)$	$+$	$-$	$+$

Teda $x \in (0,5)$, avšak súčasne musia platiť aj podmienky $x \geq 2$ a $x \geq -4$. Preto $x \in \langle 2,5)$, teda $K_1 = \langle 2,5)$.

II. Pre $x-2<0$, t. j. $x<2$, je pravá strana nerovnice záporná, pričom ľavá strana nerovnice je pre $x \geq -4$ nezáporná, teda nerovnica platí pre každé x, ktoré spĺňa uvedené podmienky.

$$x-2<0 \quad \text{a} \quad 4+x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \langle -4,\ 2)\,.$$

Teda $K_2 = \langle -4,2)$.

Riešením nerovnice je zjednotenie čiastočných riešení.

$$K = K_1 \cup K_2 = \langle 2,5) \cup \langle -4,2) = \langle -4,5)\,.$$

Príklad 4.18. *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnicu*

$$\sqrt{6-5x} < x.$$

Riešenie. Daná nerovnica má zmysel, ak je splnená podmienka

$$6-5x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{6}{5}.$$

Podobne, ako v predchádzajúcom príklade, je výraz na ľavej strane nerovnice nezáporný. Opäť uvažujme dva prípady vzhľadom na znamienko výrazu na pravej strane, teda rozoberme prípady $x \geq 0$ a $x<0$.

I. Pre $x \geq 0$ je pravá strana nerovnice nezáporná, teda nerovnicu umocníme

$$\begin{aligned} \sqrt{6-5x} < x \quad / \, ()^2 \\ 6-5x < x^2 \quad / -x^2 \\ -x^2-5x+6 < 0 \quad / \cdot (-1) \\ x^2+5x-6 > 0 \\ (x+6)(x-1) > 0. \end{aligned}$$

Využijúc nulové body $x=-6$, $x=1$ dostávame

	$(-\infty,-6)$	$(-6,1)$	$(1,\infty)$
$x+6$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$(x+6)(x-1)$	$+$	$-$	$+$

Teda $x \in (-\infty, -6) \cup (1, \infty)$. Súčasne s touto podmienkou musia tiež platiť podmienky $x \in \langle 0, \infty)$ a $x \in \left\langle -\infty, \frac{6}{5} \right\rangle$. Ich prienikom je $K_1 = \left(1, \frac{6}{5}\right\rangle$.

II. Pre $x < 0$ je pravá strana nerovnice záporná, pričom ľavá strana nerovnice je nezáporná. Dostávame teda nerovnosť typu $+ < -$, dospeli sme k sporu. Preto pre $x < 0$ nerovnica nemá riešenie, $K_2 = \emptyset$.

Riešenie nerovnice je

$$K = K_1 \cup K_2 = \left(1, \tfrac{6}{5}\right\rangle \cup \emptyset = \left(1, \tfrac{6}{5}\right\rangle.$$

Úlohy

4.25. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $\sqrt{3-x} = 3$. **b)** $\sqrt{2-x} = x$. **c)** $\sqrt{5+2x} = 3$.

d) $\sqrt{9-2x} - 1 = 0$. **e)** $3 + 2\sqrt{1+2x^2} = 9$. **f)** $x + 4\sqrt{x} = 0$.

g) $\sqrt{x+7} = x+5$. **h)** $\sqrt{x-5} = 25 - x$. **i)** $\sqrt{x^2+9} = x+9$.

j) $x + 9 + \sqrt{x^2+9} = 0$. **k)** $\sqrt{\dfrac{60x+4}{5x-1}} = 4$. **l)** $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+4}} - 1 = 0$.

4.26. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice

a) $\sqrt{x+8} - \sqrt{5x+20} + 2 = 0$. **b)** $\sqrt{x+5} - \sqrt{5-x} = 2$. **c)** $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5$.

d) $\sqrt{4x+16} - \sqrt{x-4} = 5$. **e)** $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3$. **f)** $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$.

g) $\sqrt{x+3} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x-2}}$. **h)** $\sqrt{x^2-9x+14} = x-2$. **i)** $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{24}{5}$.

4.27. Riešte v $\mathbb{R}$ nerovnice

a) $\sqrt{2x-1} > 5$. **b)** $\sqrt{3-x} - 4 < 0$. **c)** $\sqrt{1+x} \leq 2$.

d) $\sqrt{x+2} > x$. **e)** $\sqrt{4-3x} < x$. **f)** $x + 1 \geq \sqrt{x+3}$.

g) $x - 1 < \sqrt{x+1}$. **h)** $2\sqrt{x+14} < x + 11$. **i)** $\sqrt{2x-x^2} \leq 1 + x$.

j) $\sqrt{2+x-x^2} > x - 4$. **k)** $\sqrt{x^2+3x+2} < 1 + \sqrt{x^2+1}$. **l)** $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > 0$.

Výsledky

4.25. **a)** -6. **b)** 1. **c)** 2. **d)** 4. **e)** ± 2. **f)** 0. **g)** -3. **h)** 21. **i)** -4. **j)** $\emptyset$. **k)** 1. **l)** 5.

4.26. **a)** 1. **b)** 4. **c)** 5. **d)** $5, \frac{85}{9}$. **e)** 1. **f)** $\frac{16}{25}$. **g)** $\frac{22}{9}, 6$. **h)** 2. **i)** 25.

4.27. **a)** $(13, \infty)$. **b)** $(-13, 3\rangle$. **c)** $\langle -1, 3\rangle$. **d)** $\langle -2, 2)$. **e)** $\left(1, \frac{4}{3}\right\rangle$. **f)** $\langle 1, \infty)$. **g)** $\langle -1, 3)$. **h)** $(-5, \infty)$. **i)** $\langle 0, 2\rangle$. **j)** $\langle -1, 2\rangle$. **k)** $(-\infty, -2\rangle \cup \left\langle -1, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **l)** $\langle -1, 1)$.

4.6 Rovnice a nerovnice s absolútnou hodnotou

Pri riešení rovníc a nerovníc s absolútnou hodnotou vychádzame z definície absolútnej hodnoty.

Pripomeňme, že *absolútna hodnota* reálneho čísla $|a|$, viď podkapitola 1.2 Reálne čísla, je definovaná nasledujúcim spôsobom

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ak } a \geq 0 \\ -a, & \text{ak } a < 0. \end{cases}$$

Geometricky absolútna hodnota čísla a predstavuje vzdialenosť obrazu reálneho čísla a od počiatku číselnej osi.

Rovnice a nerovnice, v ktorých neznáma vystupuje v absolútnej hodnote riešime rozdelením definičného oboru rovnice (nerovnice) na intervaly, v ktorých každý z výrazov v absolútnej hodnote nemení znamienko. V každom z týchto intervalov riešime rovnicu (nerovnicu), ktorá je ekvivalentná s pôvodnou a neobsahuje už absolútne hodnoty.

Ak príslušné čiastkové riešenia sú $K_1,\ K_2,\ K_3,\ \dots,\ K_n$, tak celkové riešenie je ich zjednotením

$$K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n.$$

Príklad 4.19. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*

$$|2-3x| + 4 = 5x.$$

Riešenie. Rovnicu môžeme riešiť metódou nulových bodov

$$2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Tento nulový bod rozdeľuje množinu reálnych čísel na dva intervaly

$$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right), \quad \left\langle\frac{2}{3}, \infty\right).$$

V každom z týchto intervalov zistíme znamienko výrazu $2-3x$ a vyjadríme absolútnu hodnotu tohto dvojčlena. Potom riešime príslušné rovnice a dostaneme dve čiastkové množiny riešení.

Pre $x \in \left(-\infty,\ \frac{2}{3}\right)$ je $|2-3x| = 2-3x$.

Pre $x \in \left\langle\frac{2}{3},\ \infty\right)$ je $|2-3x| = -2+3x$.

Potom rovnica je v tvare

$$\begin{aligned} 2-3x+4 &= 5x \\ 6-3x &= 5x \quad / +3x \\ 6 &= 8x \quad / : 8 \\ x &= \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} &\notin \left(-\infty,\ \frac{2}{3}\right) \\ K_1 &= \emptyset. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2+3x+4 &= 5x \\ 2+3x &= 5x \quad / -3x \\ 2 &= 2x \quad / : 2 \\ x &= 1 \\ 1 &\in \left\langle\frac{2}{3},\ \infty\right) \\ K_2 &= \{1\}. \end{aligned}$$

Teda

$$K = K_1 \cup K_2 = \{1\}.$$

Príklad 4.20. *Riešme v $\mathbb{Z}$ rovnicu*

$$|x+1| + 2\,|x-3| = 5.$$

Riešenie. Rovnicu vyriešime metódou nulových bodov

$$x+1=0 \quad\Updownarrow\quad x=-1. \qquad\qquad x-3=0 \quad\Updownarrow\quad x=3.$$

Tieto dva nulové body rozdeľujú množinu $\mathbb{R}$ na tri intervaly

$$(-\infty,\ -1)\,,\quad \langle -1,\ 3)\,,\quad \langle 3,\ \infty)\,.$$

V každom z týchto intervalov zistíme znamienko príslušných výrazov a vyjadríme absolútne hodnoty týchto dvojčlenov. Potom riešime príslušné rovnice a dostaneme tri obory pravdivosti.

Pre $x \in (-\infty,\ -1)$	Pre $x \in \langle -1,\ 3)$	Pre $x \in \langle 3,\ \infty)$
$\|x+1\| = -x-1$	$\|x+1\| = x+1$	$\|x+1\| = x+1$
$\|x-3\| = -x+3$	$\|x-3\| = -x+3$	$\|x-3\| = x-3$
$-x-1+2(-x+3) = 5$	$x+1+2(-x+3) = 5$	$x+1+2(x-3) = 5$
$-x-1-2x+6 = 5$	$x+1-2x+6 = 5$	$x+1+2x-6 = 5$
$-3x+5 = 5 \quad /-5$	$-x+7 = 5 \quad /-7$	$3x-5 = 5 \quad /+5$
$-3x = 0 \quad /:(-3)$	$-x = -2 \quad /\cdot(-1)$	$3x = 10 \quad /:3$
$x = 0$	$x = 2$	$x = \frac{10}{3}$
$0 \notin (-\infty,-1)$	$2 \in \langle -1,3)$	$\frac{10}{3} \in \langle 3,\infty)$
$K_1 = \emptyset.$	$K_2 = \{2\}.$	$K_3 = \left\{\frac{10}{3}\right\}.$

Keďže $K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \left\{2, \frac{10}{3}\right\}$, ale len $2 \in \mathbb{Z}$, dostávame, že riešenie rovnice je $K = \{2\}$.

Príklad 4.21. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*

$$|3 - |1+x|| = 2x.$$

Riešenie. Rovnicu budeme riešiť postupne, najprv zistíme nulový bod vnútornej absolútnej hodnoty

$$x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-1.$$

Tento nulový bod rozdeľuje množinu reálnych čísel na dva intervaly

$$(-\infty,-1)\,,\quad \langle -1,\infty)\,.$$

Rozlíšme

Pre $x \in (-\infty,-1)$ je $|x+1| = -x-1$.Pre $x \in \langle -1,\infty)$ je $|x+1| = x+1$.

$$\begin{aligned} |3-(-x-1)| &= 2x \\ |3+x+1| &= 2x \\ |4+x| &= 2x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} |3-(1+x)| &= 2x \\ |3-1-x| &= 2x \\ |2-x| &= 2x \end{aligned}$$

Tieto dve rovnice riešime podobne ako predchádzajúce. Určíme odpovedajúce nulové body a príslušné intervaly opäť rozdelíme na intervaly.

$$x+4=0 \quad\Updownarrow\quad x=-4. \qquad\qquad 2-x=0 \quad\Updownarrow\quad x=2.$$

Platí.

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
\text{Pre } x \in (-\infty, -4) & \text{Pre } x \in \langle -4, -1) & \text{Pre } x \in \langle -1, 2) & \text{Pre } x \in \langle 2, \infty) \\
|x+4| = -x-4 & |x+4| = x+4 & |2-x| = 2-x & |2-x| = -2+x \\
& & & \\
-x-4 = 2x & x+4 = 2x & 2-x = 2x & -2+x = 2x \\
-3x = 4 & -x = -4 & -3x = -2 & -x = 2 \\
x = -\frac{4}{3} & x = 4 & x = \frac{2}{3} & x = -2 \\
-\frac{4}{3} \notin (-\infty, -4) & 4 \notin \langle -4, -1) & \frac{2}{3} \in \langle -1, 2) & -2 \notin \langle 2, \infty) \\
K_1 = \emptyset. & K_2 = \emptyset. & K_3 = \left\{\frac{2}{3}\right\}. & K_4 = \emptyset.
\end{array}
$$

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = \left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

•

Príklad 4.22. *Riešme v $\mathbb{R}$ nerovnicu*

$$|2x+1| - |x-4| < 3.$$

Riešenie. Nájdeme nulové body

$$
\begin{array}{ccc}
2x+1 = 0 & \qquad & x-4 = 0 \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
x = -\dfrac{1}{2}. & & x = 4.
\end{array}
$$

Nulové body rozdeľujú množinu reálnych čísel na tri intervaly

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \quad \left\langle -\frac{1}{2}, 4\right), \quad \langle 4, \infty).$$

V každom z týchto intervalov zistíme znamienka vyšetrovaných výrazov a vyjadríme ich absolútne hodnoty. Potom riešime jednotlivé nerovnice.

$$
\begin{array}{rl|rl|rl}
\text{Pre } x & \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) & \text{Pre } x & \in \left\langle -\frac{1}{2}, 4\right) & \text{Pre } x & \in \langle 4, \infty) \\
|2x+1| & = -2x-1 & |2x+1| & = 2x+1 & |2x+1| & = 2x+1 \\
|x-4| & = -x+4 & |x-4| & = -x+4 & |x-4| & = x-4 \\
& & & & & \\
-2x-1-(-x+4) & < 3 & 2x+1-(-x+4) & < 3 & 2x+1-(x-4) & < 3 \\
-2x-1+x-4 & < 3 & 2x+1+x-4 & < 3 & 2x+1-x+4 & < 3 \\
-x & < 8 & 3x & < 6 & x+5 & < 3 \\
x & > -8 & x & < 2 & x & < -2 \\
K_1 = (-8, \infty) & \cap \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) & K_2 = (-\infty, 2) & \cap \left\langle -\frac{1}{2}, 4\right) & K_3 = (-\infty, -2) & \cap \langle 4, \infty) \\
K_1 & = \left(-8, -\frac{1}{2}\right\rangle. & K_2 & = \left(-\frac{1}{2}, 2\right). & K_3 & = \emptyset.
\end{array}
$$

Riešením nerovnice je

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = (-8, 2).$$

•

Úlohy

4.28. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $|2x-5| = 3$.

b) $|5-x| = 4x$.

c) $|x-2| = 2x-3$.

d) $|5x-1| = 10+4x$.

e) $2-x = |7x-1|$.

f) $2\,|8-2x| + |x+1| = 11$.

g) $3\,|x-1| - 5\,|2+x| + 19 = 0$.

h) $|x+6| = 3\,|x-1|$.

4.29. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $x^2 + 5\,|x| = 6$.

b) $|x+4| - 5\,|2-x| + 2\,|x-7| = 16$.

c) $|2 + |x-5|| = 3$.

d) $||x+4| - 6| = 1$.

e) $\dfrac{|x|-5}{|x|+5} = \dfrac{1}{5}$.

f) $\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right| = 1$.

g) $\left|\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}\right| = \dfrac{x}{x+1}$.

h) $\left|\dfrac{2x^2+x-6}{x+2}\right| = 1$.

4.30. Riešte v $\mathbb{R}$ nerovnice.

a) $|3+x| < 4$.

b) $|4-5x| \geq 1$.

c) $|2+3x| \leq x$.

d) $|2x-5| < x-1$.

e) $|7+x| \geq 2-x$.

f) $|5+x| + |2+x| \geq 3$.

g) $|x-3| \leq |2x-4|$.

h) $|3-4x| \leq |4+3x|$.

i) $|6-3x| - |5x-1| > 4$.

j) $|3x-1| + |5-x| < 2+x$.

4.31. Riešte v $\mathbb{R}$ nerovnice.

a) $2\,|x+1| + |2x+1| > x-1$.

b) $|x^2-5x| > 6$.

c) $\dfrac{5}{|x+3|} \leq 2$.

d) $\dfrac{4}{|x-2|} \geq x+1$.

e) $|x^2+6x+10| \leq 2$.

f) $||x+3| - 7| < 5$.

g) $\left|\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}\right| < 1$.

h) $\left|\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}\right| \geq 3$.

Výsledky

4.28. **a)** $1, 4$. **b)** 1. **c)** $\frac{5}{3}$. **d)** $-1, 11$. **e)** $-\frac{1}{6}, \frac{3}{8}$. **f)** $2, \frac{26}{5}$. **g)** $-16, 3$. **h)** $-\frac{3}{4}, \frac{9}{2}$.

4.29. **a)** ± 1. **b)** 2. **c)** $4, 6$. **d)** $-11, -9, 1, 3$. **e)** $\pm\frac{15}{2}$. **f)** $\pm 1, \pm 4$. **g)** 2. **h)** $1, 2$.

4.30. **a)** $(-7, 1)$. **b)** $\left(-\infty, \frac{3}{5}\right\rangle \cup \langle 1, \infty)$. **c)** $\emptyset$. **d)** $(2, 4)$. **e)** $\left\langle -\frac{5}{2}, \infty\right)$. **f)** $\mathbb{R}$. **g)** $(-\infty, 1\rangle \cup \left\langle \frac{7}{3}, \infty\right)$. **h)** $\left\langle -\frac{1}{7}, 7\right\rangle$. **i)** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$. **j)** $\emptyset$.

4.31. **a)** $\mathbb{R}$. **b)** $(-\infty, -1) \cup (2, 3) \cup (6, \infty)$. **c)** $\left(-\infty, -\frac{11}{2}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{1}{2}, \infty\right)$. **d)** $(-\infty, 2) \cup (2, 3\rangle$. **e)** $\langle -4, -2\rangle$. **f)** $(-15, -5) \cup (-1, 9)$. **g)** $\left\langle \frac{3}{2}, 3\right) \cup (3, \infty)$. **h)** $\langle 0, 1) \cup (1, 3)$.

4.7 Rovnice a nerovnice s parametrom

Rovnica s parametrom obsahuje okrem neznámej x aj ďalšiu premennú, ktorú nazývame parameter. Parameter zvyčajne označujeme symbolom p. Riešenie rovnice s parametrom spočíva v určení jej koreňov v závislosti od hodnoty parametra p. Riešenie rovnice s parametrom závisí od typu rovnice.

Lineárna rovnica s parametrom. Rovnicu upravíme na tvar

$$x \cdot P(p) = Q(p).$$

Riešenie rovnice je zjednotením všetkých možných prípadov, ktoré dostaneme diskusiou nulových a nenulových hodnôt výrazu $P(p)$. Pri riešení rozlišujeme dva prípady

$$P(p) = 0 \quad \text{a} \quad P(p) \neq 0.$$

Poznamenajme, že v oboch prípadoch sa použije odlišný postup pri riešení danej rovnice.

Kvadratická rovnica s parametrom. Pri riešení rozlišujeme dva prípady.

1. Ak je výraz pri kvadratickom člene pre nejakú hodnotu parametra rovný nule, tak rovnica nie je kvadratická, ale lineárna. Riešime teda lineárnu rovnicu.
2. Ak je výraz pri kvadratickom člene nenulový, vypočítame diskriminant kvadratickej rovnice a urobíme diskusiu.
   - Ak je diskriminant kladný, tak rovnica má dva reálne korene.
   - Ak je diskriminant nulový, tak rovnica má jeden dvojnásobný reálny koreň.
   - Ak je diskriminant záporný, tak rovnica nemá riešenie v množine reálnych čísel.

Lineárna nerovnica s parametrom. Nerovnicu upravíme na jeden z tvarov

$$x \cdot P(p) < Q(p), \quad x \cdot P(p) > Q(p), \quad x \cdot P(p) \leq Q(p), \quad x \cdot P(p) \geq Q(p).$$

Pri riešení rozlišujeme tieto prípady

$$P(p) = 0, \quad P(p) > 0, \quad P(p) < 0.$$

Pripomeňme, že deliť možno len nenulovým výrazom a pri delení záporným výrazom sa zmení znak nerovnosti na opačný.

Príklad 4.23. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu s parametrom p*

$$p^2x + 2 = p + 4x.$$

Riešenie. Rovnicu upravíme na vhodný tvar a potom urobíme diskusiu vzhľadom na parameter p.

$$\begin{aligned} p^2x + 2 &= p + 4x \\ p^2x - 4x &= p - 2 \\ x(p^2 - 4) &= p - 2 \\ x(p-2)(p+2) &= p - 2. \end{aligned}$$

Deliť môžeme len nenulovým výrazom. Výraz $(p-2)(p+2)$ je rovný nule, buď ak $p - 2 = 0$ alebo $p + 2 = 0$. Rozlíšme tri prípady.

I. $\quad p - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 2.$

Potom

$$\begin{aligned} x(2-2)(2+2) &= 2 - 2 \\ x \cdot 0 &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Táto rovnosť platí pre všetky reálne čísla, preto $K_1 = \mathbb{R}$.

II. $p + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = -2$.
Teda

$$\begin{aligned} x(-2-2)(-2+2) &= -2-2 \\ x \cdot 0 &= -4 \\ 0 &= -4. \end{aligned}$$

Dospeli sme k sporu, teda $K_2 = \emptyset$.

III. $p - 2 \neq 0,\, p + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \neq 2,\, p \neq -2$.
V tomto prípade môžeme rovnicu predeliť výrazom $(p-2)(p+2)$.

$$\begin{aligned} x(p-2)(p+2) &= p-2 \quad / : (p-2),\ / : (p+2) \\ x &= \frac{p-2}{(p-2)(p+2)} \\ x &= \frac{1}{p+2} \\ K_3 &= \left\{ \frac{1}{p+2} \right\}. \end{aligned}$$

Záver

$$K = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pre } p = 2, \\ \emptyset & \text{pre } p = -2, \\ \left\{ \frac{1}{p+2} \right\} & \text{pre } p \neq \pm 2. \end{cases}$$

Príklad 4.24. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu s parametrom p*

$$px^2 + (2p+3)x + p + 2 = 0.$$

Riešenie. Pre $p = 0$ daná rovnica neobsahuje kvadratický člen, teda je to lineárna rovnica.

$$\begin{aligned} 0 \cdot x^2 + (2 \cdot 0 + 3)x + 0 + 2 &= 0 \\ 3x + 2 &= 0 \quad / - 2 \\ 3x &= -2 \quad / : 3 \\ x &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Teda pre $p = 0$ je $K_1 = \{-\frac{2}{3}\}$.

Pre $p \neq 0$ je daná rovnica kvadratická. Vypočítame jej diskriminant a urobíme diskusiu vzhľadom na hodnotu parametra p a určíme riešenia. Pripomeňme, že korene kvadratickej rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

vypočítame pomocou vzorca

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

kde diskriminant D je rovný

$$D = b^2 - 4ac.$$

V tomto príklade je $a = p$, $b = 2p + 3$, $c = p + 2$, teda

$$D = (2p+3)^2 - 4p(p+2) = 4p^2 + 12p + 9 - 4p^2 - 8p = 4p + 9.$$

Rozlíšme tri prípady.

I. Ak $D = 4p + 9 < 0$, t. j. $p < -\frac{9}{4}$, tak daná kvadratická rovnica nemá riešenie v množine reálnych čísel,

teda $K_2 = \emptyset$.
II. Ak $D = 4p + 9 = 0$, t. j. $p = -\frac{9}{4}$, tak kvadratická rovnica má jeden dvojnásobný reálny koreň

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2p+3}{2p} = -\frac{2\cdot(-\frac{9}{4})+3}{2\cdot(-\frac{9}{4})} = -\frac{-\frac{9}{2}+3}{-\frac{9}{2}} = -\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{9}{2}} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3},$$

preto $K_3 = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.
III. Ak $D = 4p + 9 > 0$, t. j. $p > -\frac{9}{4}$, tak kvadratická rovnica má dva rôzne reálne korene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2p - 3 \pm \sqrt{4p+9}}{2p}$$
$$K_4 = \left\{\frac{-2p - 3 \pm \sqrt{4p+9}}{2p}\right\}.$$

Riešením rovnice je

$$K = \begin{cases} \emptyset & \text{pre } p \in \left(-\infty, -\frac{9}{4}\right), \\ \left\{-\dfrac{1}{3}\right\} & \text{pre } p = -\frac{9}{4}, \\ \left\{-\dfrac{2}{3}\right\} & \text{pre } p = 0, \\ \left\{\dfrac{-2p - 3 \pm \sqrt{4p+9}}{2p}\right\} & \text{pre } p \in \left(-\frac{9}{4}, 0\right) \cup (0, \infty). \end{cases}$$

Príklad 4.25. *Riešme v $\mathbb{R}$ nerovnicu s parametrom p*

$$\frac{x-p}{p-2} > 1.$$

Riešenie. Výraz na ľavej strane nerovnice má zmysel, ak $p - 2 \neq 0$, teda $p \neq 2$. Upravme

$$\frac{x-p}{p-2} > 1$$
$$\frac{x-p}{p-2} - 1 > 0$$
$$\frac{x-2p+2}{p-2} > 0.$$

Podiel dvoch výrazov je kladný, ak sú oba výrazy kladné alebo sú oba výrazy záporné. Rozlíšme dva prípady.
I. $p - 2 > 0$ a $x - 2p + 2 > 0$, teda $p > 2$ a $x > 2p - 2$.
II. $p - 2 < 0$ a $x - 2p + 2 < 0$, teda $p < 2$ a $x < 2p - 2$.
Riešením nerovnice je

$$K = \begin{cases} (-\infty, 2p-2) & \text{pre } p \in (-\infty, 2), \\ \emptyset & \text{pre } p = 2, \\ (2p-2, \infty) & \text{pre } p \in (2, \infty). \end{cases}$$

Úlohy

4.32. Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice s parametrom p.

a) $2(x-p) = p^2(1-x)$. **b)** $p^2x + 1 = p + x$. **c)** $p^3x - 1 = px + p$.

d) $p^2(x-1) = 2(px-2)$. **e)** $2x - p = \dfrac{2x-1}{p}$. **f)** $p + 1 = \dfrac{p^2-1}{x}$.

4.33. Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice s parametrom p.

a) $6(2+x) = \dfrac{2-p}{3p}$. **b)** $\dfrac{x-p}{x+1} = p$. **c)** $\dfrac{5x-2}{p-3} - \dfrac{2x}{3} = 4$.

d) $\dfrac{5}{2x-p} = \dfrac{3}{4-px}$. **e)** $\dfrac{x-p}{10} - 5 = \dfrac{4x+p}{p}$. **f)** $p^2x^2 + 2px + 1 = 0$.

4.34. Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice s parametrom p.

a) $x^2 - px + \dfrac{p}{4} + 5 = 0$. **b)** $(p+2)x^2 = (p-2)x - \dfrac{p}{4}$.

c) $(p^2-1)x^2 + 2px + 1 = 0$. **d)** $x^2 - 6px + 5 = 0$.

e) $x^2 - 2(p+4)x + p^2 + 6p = 0$. **f)** $x^2 + (2p-1)x + p^2 + 2 = 0$.

4.35. Vyriešte v $\mathbb{R}$ nerovnice s parametrom p.

a) $3x - px < 2$. **b)** $x + px - 6 > 0$. **c)** $p - 3x \leq 3px - 1$.

d) $px - x < 1 + p$. **e)** $px + x \leq p^2 - 1$. **f)** $\dfrac{x}{2p} + \dfrac{1-x}{6} < \dfrac{1+x}{8p}$.

g) $\dfrac{x+p}{3} < \dfrac{x}{p}$. **h)** $\dfrac{x-p}{p-4} > 1$. **i)** $px^2 - 4 \leq 0$.

4.36. Určte všetky hodnoty parametra p, pre ktoré má rovnica $(p-1)x^2 - (p-2)x + 2p - 1 = 0$ jeden dvojnásobný koreň.

4.37. Určte všetky hodnoty parametra p, pre ktoré má rovnica $2x^2 + \sqrt{3}px + p + 2 = 0$ dva rôzne reálne korene.

4.38. Určte všetky hodnoty parametra p, pre ktoré rovnica $\dfrac{p+1}{2p} = \dfrac{3}{x+4}$ nemá riešenie.

Výsledky

4.32. **a)** $K = \left\{ \dfrac{p(2+p)}{2+p^2} \right\}$ pre $p = \mathbb{R}$.

b) $K = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pre } p = 1, \\ \emptyset & \text{pre } p = -1, \\ \left\{ \dfrac{1}{p+1} \right\} & \text{pre } p \neq \pm 1. \end{cases}$

c) $K = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pre } p = -1, \\ \emptyset & \text{pre } p = 0,\ p = 1, \\ \left\{ \dfrac{1}{p(p-1)} \right\} & \text{pre } p \neq 0,\ p \neq \pm 1. \end{cases}$

d) $K = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pre } p = 2, \\ \emptyset & \text{pre } p = 0, \\ \left\{ \dfrac{p+2}{p} \right\} & \text{pre } p \neq 0,\ p \neq 2. \end{cases}$

e) $K = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pre } p = 1, \\ \emptyset & \text{pre } p = 0, \\ \left\{ \dfrac{p+1}{2} \right\} & \text{pre } p \neq 0,\ p \neq 1. \end{cases}$

f) $K = \begin{cases} \mathbb{R} - \{0\} & \text{pre } p = -1, \\ \{p-1\} & \text{pre } p \neq -1. \end{cases}$

4.33. **a)** $K = \begin{cases} \emptyset & \text{pre } p = 0, \\ \left\{ \dfrac{2-37p}{18p} \right\} & \text{pre } p \neq 0. \end{cases}$

b) $K = \begin{cases} \emptyset & \text{pre } p = 1, \\ \left\{ \dfrac{2p}{1-p} \right\} & \text{pre } p \neq 1. \end{cases}$

c) $K = \begin{cases} \emptyset & \text{pre } p = 3,\ p = \frac{21}{2}, \\ \left\{ \dfrac{12p-30}{21-2p} \right\} & \text{pre } p \neq 3,\ p \neq \frac{21}{2}. \end{cases}$

d) $K = \begin{cases} \emptyset & \text{pre } p = -\frac{6}{5},\ p = \pm 2\sqrt{2}, \\ \left\{ \dfrac{20+3p}{6+5p} \right\} & \text{pre } p \neq -\frac{6}{5},\ p \neq \pm 2\sqrt{2}. \end{cases}$

e) $K = \begin{cases} \emptyset & \text{pre } p = 0,\ p = 40, \\ \left\{ \dfrac{p^2+60p}{p-40} \right\} & \text{pre } p \neq 0,\ p \neq 40. \end{cases}$

f) $K = \begin{cases} \emptyset & \text{pre } p = 0, \\ \left\{ -\dfrac{1}{p} \right\} & \text{pre } p \neq 0. \end{cases}$

4.34. **a)** $K = \begin{cases} \emptyset & \text{pre } p \in (-4, 5), \\ \{-2\} & \text{pre } p = -4, \\ \left\{ \dfrac{5}{2} \right\} & \text{pre } p = 5, \\ \left\{ \dfrac{p \pm \sqrt{p^2-p-20}}{2} \right\} & \text{pre } p \in (-\infty, -4) \cup (5, \infty). \end{cases}$

b) $K = \begin{cases} \emptyset & \text{pre } p \in \left(\frac{2}{3}, \infty\right), \\ \left\{ \dfrac{1}{8} \right\} & \text{pre } p = -2, \\ \left\{ -\dfrac{1}{4} \right\} & \text{pre } p = \frac{2}{3}, \\ \left\{ \dfrac{p-2 \pm \sqrt{4-6p}}{2p+4} \right\} & \text{pre } p \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, \frac{2}{3}\right). \end{cases}$

c) $K = \begin{cases} \left\{ -\dfrac{1}{2} \right\} & \text{pre } p = 1, \\ \left\{ \dfrac{1}{2} \right\} & \text{pre } p = -1, \\ \left\{ -\dfrac{1}{p+1};\ \dfrac{1}{1-p} \right\} & \text{pre } p \neq \pm 1. \end{cases}$

d) $K = \begin{cases} \emptyset & \text{pre } p \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right), \\ \{\pm\sqrt{5}\} & \text{pre } p = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}, \\ \left\{ 3p \pm \sqrt{9p^2-5} \right\} & \text{pre } p \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \infty\right). \end{cases}$

e) $K = \begin{cases} \emptyset & \text{pre } p \in (-\infty, -8), \\ \{-4\} & \text{pre } p = -8, \\ \left\{ p+4 \pm \sqrt{2p+16} \right\} & \text{pre } p \in (-8, \infty). \end{cases}$

f) $K = \begin{cases} \left\{ \dfrac{1-2p \pm \sqrt{-4p-7}}{2} \right\} & \text{pre } p \in \left(-\infty, -\frac{7}{4}\right), \\ \left\{ \dfrac{9}{4} \right\} & \text{pre } p = -\frac{7}{4}, \\ \emptyset & \text{pre } p \in \left(-\frac{7}{4}, \infty\right). \end{cases}$

4.35. **a)** $K = \begin{cases} \left(-\infty, \dfrac{2}{3-p}\right) & \text{pre } p \in (-\infty, 3), \\ \mathbb{R} & \text{pre } p = 3, \\ \left(\frac{2}{3-p}, \infty\right) & \text{pre } p \in (3, \infty). \end{cases}$

b) $K = \begin{cases} \left(-\infty, \dfrac{6}{1+p}\right) & \text{pre } p \in (-\infty, -1), \\ \mathbb{R} & \text{pre } p = -1, \\ \left(\dfrac{6}{1+p}, \infty\right) & \text{pre } p \in (-1, \infty). \end{cases}$

c) $K = \begin{cases} \left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right\rangle & \text{pre } p \in (-\infty, -1), \\ \mathbb{R} & \text{pre } p = -1, \\ \left\langle \dfrac{1}{3}, \infty\right) & \text{pre } p \in (-1, \infty). \end{cases}$

d) $K = \begin{cases} \left(\dfrac{1+p}{p-1}, \infty\right) & \text{pre } p \in (-\infty, 1), \\ \mathbb{R} & \text{pre } p = 1, \\ \left(-\infty, -\dfrac{1+p}{p-1}\right) & \text{pre } p \in (1, \infty). \end{cases}$

e) $K = \begin{cases} \langle p-1, \infty) & \text{pre } p \in (-\infty, -1), \\ \mathbb{R} & \text{pre } p = -1, \\ (-\infty, p-1\rangle & \text{pre } p \in (-1, \infty). \end{cases}$

f) $K = \begin{cases} \left(\dfrac{3-4p}{9-4p}, \infty\right) & \text{pre } p \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{9}{4}, \infty\right), \\ \emptyset & \text{pre } p = 0,\ p = \frac{9}{4}, \\ \left(-\infty, \dfrac{3-4p}{9-4p}\right) & \text{pre } p \in \left(0, \frac{9}{4}\right). \end{cases}$

g) $K = \begin{cases} \left(-\infty, -\dfrac{p^2}{p-3}\right) & \text{pre } p \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty), \\ \emptyset & \text{pre } p = 0,\ p = 3, \\ \left(-\dfrac{p^2}{p-3}, \infty\right) & \text{pre } p \in (0, 3). \end{cases}$

h) $K = \begin{cases} (-\infty, 2p-4) & \text{pre } p \in (-\infty, 4), \\ \emptyset & \text{pre } p = 4, \\ (2p-4, \infty) & \text{pre } p \in (4, \infty). \end{cases}$

i) $K = \begin{cases} \emptyset & \text{pre } p \in (-\infty, 0), \\ \mathbb{R} & \text{pre } p = 0, \\ \left\langle -\dfrac{2}{\sqrt{p}}, \dfrac{2}{\sqrt{p}} \right\rangle & \text{pre } p \in (0, \infty). \end{cases}$

4.36. $p = 0$, $p = \frac{8}{7}$.

4.37. $p \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (4, \infty)$.

4.38. $p = -1$, $p = 0$.

4.8 Sústavy rovníc a nerovníc

Niekoľko rovníc s dvoma a viac neznámymi tvorí *sústavu rovníc*. Riešením sústavy rovníc je prienik riešení jednotlivých rovníc. Sústavu môžeme riešiť napríklad sčítacou alebo dosadzovacou metódou.

Sčítacia metóda je metóda, pri ktorej rovnice sústavy vynásobíme vhodne zvolenými číslami tak, aby sa po sčítaní rovníc jedna neznáma vylúčila.

Dosadzovacia metóda je metóda, pri ktorej vyjadríme jednu neznámu z jednej rovnice a dosadíme ju do zvyšných rovníc. Tým dostaneme menej rovníc s menším počtom neznámych.

Ak pri riešení sústavy rovníc dostaneme rovnosť

$$0 = k,$$

kde k je číslo rôzne od nuly, tak sústava nemá riešenie.

Ak dostaneme identitu

$$0 = 0,$$

tak sústava má nekonečne veľa riešení.

Ak sústava rovníc s n neznámymi má riešenie, tak je to usporiadaná n-tica reálnych čísel

$$[r_1, r_2, \dots, r_n]$$

taká, že po dosadení r_1 za prvú neznámu x_1, r_2 za druhú neznámu x_2, ..., r_n za n-tú neznámu x_n do sústavy rovníc dostaneme n rovností.

Príklad 4.26. *Riešme v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 3y &= 6. \end{aligned}$$

Riešenie. Sústavu budeme riešiť sčítacou metódou. Prvú rovnicu vynásobíme číslom 3. Takto upravené rovnice spočítame, čím dostaneme jednu rovnicu len s neznámou x. Vyriešime ju.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \qquad / \cdot 3 \\ x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 6x - 3y &= 15 \\ x + 3y &= 6 \end{aligned}\right\} +$$

$$7x = 21 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 3.$$

Dosadením $x = 3$ napríklad do prvej rovnice dostaneme rovnicu s jednou neznámu y.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 - y &= 5 \\ 6 - y &= 5 \quad / - 6 \\ -y &= -1 \quad / \cdot (-1) \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Riešením sústavy je usporiadaná dvojica $[3, 1]$. Zapisujeme $K = \{[3, 1]\}$.

Príklad 4.27. *Riešme v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} x + \;\; 2y &= 14 \\ x^2 + 4y^2 &= 100. \end{aligned}$$

Riešenie. Sústavu budeme riešiť dosadzovacou metódou. Z prvej rovnice vyjadríme napríklad neznámu x a dosadíme ju do druhej rovnice, čím dostaneme rovnicu len s neznámou y.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 14 \quad \Rightarrow \quad x = 14 - 2y \\ x^2 + 4y^2 &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (14 - 2y)^2 + 4y^2 &= 100 \\ 196 - 56y + 4y^2 + 4y^2 &= 100 \quad / - 100 \\ 8y^2 - 56y + 96 &= 0 \quad / : 8 \\ y^2 - 7y + 12 &= 0. \end{aligned}$$

Túto kvadratickú rovnicu vyriešime rozkladom na súčin koreňových činiteľov.

$$(y - 3)(y - 4) = 0.$$

Riešením kvadratickej rovnice sú $y_1 = 3$, $y_2 = 4$.

Neznámu x dopočítame dosadením vypočítaných hodnôt y napríklad do rovnice $x = 14 - 2y$.
Pre $y_1 = 3$ je $x_1 = 14 - 2y_1 = 14 - 2 \cdot 3 = 14 - 6 = 8$.
Pre $y_2 = 4$ je $x_2 = 14 - 2y_2 = 14 - 2 \cdot 4 = 14 - 8 = 6$.

Riešením sústavy rovníc sú dve usporiadané dvojice $[8, 3]$ a $[6, 4]$, teda $K = \{[8, 3], [6, 4]\}$. •

Príklad 4.28. *Riešme v $\mathbb{Z}$ sústavu nerovníc*

$$\begin{aligned} x(x + 2) + x(x - 1) &\geq (2x - 3)(x + 4) \\ (x + 3)(x - 1) &> (x - 2)(x + 2). \end{aligned}$$

Riešenie. Sústavu nerovníc rozdelíme na dve nerovnice, pričom každú z nich vyriešime osobitne. Výsledné riešenie je prienikom množiny riešení oboch nerovníc.

Najprv riešme prvú nerovnicu.

$$\begin{aligned} x(x + 2) + x(x - 1) &\geq (2x - 3)(x + 4) \\ x^2 + 2x + x^2 - x &\geq 2x^2 + 8x - 3x - 12 \\ 2x^2 + x &\geq 2x^2 + 5x - 12 \quad / - 2x^2, / - 5x \\ -4x &\geq -12 \quad / : (-4) \\ x &\leq 3 \\ K_1 &= (-\infty, 3\rangle\,. \end{aligned}$$

Pre druhú nerovnicu dostávame

$$\begin{aligned} (x + 3)(x - 1) &> (x - 2)(x + 2) \\ x^2 - x + 3x - 3 &> x^2 - 4 \\ x^2 + 2x - 3 &> x^2 - 4 \quad / - x^2, / + 3 \\ 2x &> -1 \quad / : 2 \\ x &> -\frac{1}{2} \\ K_2 &= \left(-\frac{1}{2}, \infty\right). \end{aligned}$$

Teda

$$K = K_1 \cap K_2 = (-\infty, 3\rangle \cap \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) = \left(-\frac{1}{2}, 3\right\rangle.$$

Keďže hľadáme riešenie sústavy nerovníc v $\mathbb{Z}$, tak riešeniu nerovnice vyhovujú len čísla z množiny $\{0, 1, 2, 3\}$.

Príklad 4.29. *Riešme v $\mathbb{R}$ sústavu nerovníc*

$$x + 2 - \frac{3x}{4} < \frac{5x-1}{2} \leq 5 - 2x.$$

Riešenie. Sústavu nerovníc rozdelíme na dve nerovnice a nájdeme riešenie každej z nich. Prienik obidvoch riešení je výslednou množinou pravdivosti danej sústavy.

Prvá nerovnica

$$\begin{aligned} x + 2 - \frac{3x}{4} &< \frac{5x-1}{2} \quad / \cdot 4 \\ 4x + 8 - 3x &< 10x - 2 \\ x + 8 &< 10x - 2 \quad / - 10x, \ / - 8 \\ -9x &< -10 \quad / : (-9) \\ x &> \frac{10}{9} \\ K_1 &= \left(\frac{10}{9}, \infty \right). \end{aligned}$$

Druhá nerovnica

$$\begin{aligned} \frac{5x-1}{2} &\leq 5 - 2x \quad / \cdot 2 \\ 5x - 1 &\leq 10 - 4x \quad / + 4x, \ / + 1 \\ 9x &\leq 11 \quad / : 9 \\ x &\leq \frac{11}{9} \\ K_2 &= \left(-\infty, \frac{11}{9} \right\rangle. \end{aligned}$$

Riešením sústavy nerovníc je

$$K = K_1 \cap K_2 = \left(\frac{10}{9}, \infty \right) \cap \left(-\infty, \frac{11}{9} \right\rangle = \left(\frac{10}{9}, \frac{11}{9} \right\rangle.$$

Úlohy

4.39. Vyriešte v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sústavu rovníc.

a) $$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x + 2y &= 1. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4x + 3y &= 2 \\ 3x + 6y &= -1. \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x - y - 2 &= 0 \\ x - 2y + 5 &= 0. \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x^2 + 2y + 1 &= 0 \\ 3x - 2y &= 0. \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x + y + 1 &= 0 \\ 2x + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ y^2 - x &= 0. \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x^3 + y &= 0. \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 6x^2 - y^2 + 10x &= 0 \\ 2y - 2xy &= 0. \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} \frac{4}{x^2} - y &= 0 \\ \frac{2}{y^2} - x &= 0. \end{aligned}$$

4.40. Vyriešte v $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sústavu rovníc

a) $$\begin{aligned} 3^x\cdot 4^y &= 16\\ x+3y &= 6. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \log_5 x+\log_5 y &= 4\\ x+y &= 50. \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} \frac{2}{x+y}+\frac{1}{x-y} &= 0\\ \frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y} &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x+y+z &= 10\\ 2x-y+z &= 9\\ 4x+3y-2z &= 8. \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x+2y+3z &= 10\\ 2x+3y+z &= 13\\ 3x+y+2z &= 13. \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} \frac{x+2y}{y-x} &= \frac{5}{4}\\ \frac{2y+z}{y-z} &= \frac{1}{8}\\ \frac{x-5}{x-z} &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

4.41. Vyriešte v $\mathbb{R}$ sústavu nerovníc.

a) $1+\dfrac{5-x}{3}\le\dfrac{4+3x}{5}<7x+4.$ **b)** $\dfrac{3x}{2}-\dfrac{x}{3}<\dfrac{5+2x}{2}<4+\dfrac{7+3x}{4}.$

c) $x-\dfrac{7}{4}<\dfrac{3x-1}{x}\le 2+3x.$ **d)** $\dfrac{5x}{2}-x>\dfrac{6+5x}{3}\ge\dfrac{x-4}{5}-2x.$

4.42. Vyriešte v $\mathbb{Z}$ sústavu nerovníc.

a) $$\begin{aligned} x(x+3)+3x^2 &< x(x-5)+(3x-2)(x+5)\\ x^2-5x &\le 0. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \frac{x}{2}+\frac{x}{3} &< \frac{4x+9}{12}\\ x+\frac{2}{x} &\ge 1. \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 8-\frac{2x+7}{3} &\ge \frac{3x-10}{5}-\frac{3x+5}{7}\\ \frac{x-13}{2}-\frac{1-3x}{5} &\ge \frac{3x-27}{10}. \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 1+\frac{2x-8}{5}+\frac{6x}{5} &\ge \frac{3x+5}{4}-2\\ \frac{10+3x}{4}-\frac{x+3}{2} &< \frac{24x-10}{4}. \end{aligned}$$

Výsledky

4.39. **a)** $[3,-1]$. **b)** $[1,-\frac{2}{3}]$. **c)** $[\frac{9}{5},\frac{17}{5}]$. **d)** $[-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}]$, $[-1,-\frac{3}{2}]$. **e)** $[-4,3]$, $[0,-1]$. **f)** $[0,0]$, $[1,1]$. **g)** $[0,0]$, $[1,-1]$, $[-1,1]$. **h)** $[0,0]$, $[-\frac{5}{3},0]$, $[1,4]$, $[1,-4]$. **i)** $[2,1]$.

4.40. **a)** $[0,2]$. **b)** $[25,25]$. **c)** $[1,3]$. **d)** $[3,2,5]$. **e)** $[3,2,1]$. **f)** $[-1,3,-5]$.

4.41. **a)** $\langle 2,\infty)$. **b)** $(-\infty,13\rangle$. **c)** $\left(\frac{19-\sqrt{297}}{8},\frac{19+\sqrt{297}}{8}\right)$. **d)** $\emptyset$.

4.42. **a)** $\{3,4,5\}$. **b)** $\{1\}$. **c)** $\{5,6,7,8,9,10\}$. **d)** $\{1,2,3,\dots\}$.

4.9 Definičný obor zložitejších funkcií

Príklad 4.30. *Nájdime definičný obor funkcie f,*

$$f: y=\sqrt{5x-x^2}-2\log_5\frac{5x-4}{3}-\frac{2+5x}{x-2}.$$

Riešenie. Pri určovaní definičného oboru potrebujeme uvažovať nasledujúce podmienky:
I. párna odmocnina … $\sqrt{5x-x^2}$ $\quad\Rightarrow\quad 5x-x^2\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad x(5-x)\ge 0$, nulové body sú $x_1=0, x_2=5$.

Pri riešení nerovnice môžeme napríklad využiť nasledujúcu tabuľku, v ktorej je uvedené, aké hodnoty nadobúdajú výrazy x a $5-x$ na intervaloch $(-\infty,0)$, $\langle 0,5\rangle$ a $\langle 5,\infty)$.

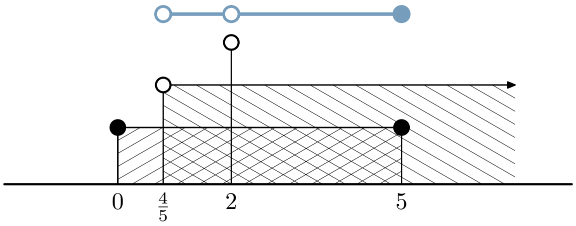
	$(-\infty, 0\rangle$	$\langle 0, 5\rangle$	$\langle 5, \infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$5-x$	$+$	$+$	$-$
$x(5-x)$	$-$	$+$	$-$

Riešením danej nerovnice je $x \in \langle 0, 5\rangle$.

II. logaritmus ... $\log_5 \dfrac{5x-4}{3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{5x-4}{3} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x-4>0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \dfrac{4}{5}$.

III. zlomok ... $\dfrac{2+5x}{x-2} \quad \Rightarrow \quad x-2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$.

Tieto podmienky musia platiť súčasne, preto určíme ich prienik, pričom si môžeme pomôcť grafickým znázornením.



Definičný obor funkcie f je $D_f = \left(\frac{4}{5}, 2\right) \cup (2, 5\rangle$.

Príklad 4.31. *Nájdime definičný obor funkcie g,*

$$g : y = \frac{x+5}{\sqrt{x^2-2x-8}}.$$

Riešenie. Podmienky:

I. párna odmocnina ... $\sqrt{x^2-2x-8} \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-8 \geq 0$.

II. zlomok ... $\dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-2x-8}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2-2x-8} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-8 \neq 0$.

Keďže obe podmienky musia platiť súčasne, dostávame $x^2-2x-8>0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4)>0$, nulové body sú $x=-2, x=4$. Opäť využijeme tabuľkovú metódu.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 4)$	$(4, \infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x-4)$	$+$	$-$	$+$

Teda definičný obor funkcie g je $D_g = (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$.

Úlohy

4.43. Určte definičný obor funkcií.

a) $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{4+x}} + \ln(3-x)$.

b) $y = \sqrt{3x-x^2} - \log \dfrac{3-2x}{4} + \sqrt[3]{\dfrac{2}{x}}$.

c) $y = \ln \dfrac{2+x}{2-x} + \sqrt{x^2-1}$.

d) $y = \sqrt{x-3} + \log_7(4-x) + \dfrac{3-x}{x+5}$.

e) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x-21}} + \ln(2x+7) + \dfrac{4}{x-8}$.

f) $y = \log(3x+5) + \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

4.44. Nájdite definičný obor nasledujúcich funkcií.

a) $y = \log \dfrac{2-x}{3+x}$.

b) $y = \dfrac{21x - 3^x}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$.

c) $y = 2\sqrt{\dfrac{2x-3}{3}} + \sqrt{\dfrac{3x}{4x-7}}$.

d) $y = \sqrt{x} - \ln(3x-4) - \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-6}}$.

e) $y = \sqrt{\log_5(7+3x)}$.

f) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(5x-3)}$.

Výsledky

4.43. **a)** $(-\infty, -4)$. **b)** $\big(0, \frac{3}{2}\big)$. **c)** $(-2, -1\rangle \cup \langle 1, 2)$. **d)** $\langle 3, 4)$. **e)** $\big(-\frac{7}{2}, -3\big) \cup \big(7, 8\big) \cup \big(8, \infty\big)$.

f) $\big(-\frac{5}{3}, 2\big)$.

4.44. **a)** $(-3, 2)$. **b)** $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$. **c)** $\big(\frac{7}{4}, \infty\big)$. **d)** $\big(\frac{4}{3}, 6\big) \cup \big(6, \infty\big)$. **e)** $\langle -2, \infty)$.

f) $\big(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\big\rangle$.

Príklad 4.32. *Zistite, pre aké x nadobúda funkcia $f: y = 2x^3 - 1$ hodnotu $f(x) = 53$.*

Riešenie. Nájsť hodnotu x, pre ktoré funkcia $f: y = 2x^3 - 1$ nadobúda hodnotu $f(x) = 53$ znamená riešiť rovnicu $53 = 2x^3 - 1$. Teda $54 = 2x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 27 = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad 3^3 = x^3$. Porovnaním exponentov dostávame $x = 3$.

Príklad 4.33. *Zistite, pre aké x nadobúda funkcia $f: y = x^2 - 3x + 2$ nezáporné funkčné hodnoty.*

Riešenie. Určiť, pre ktoré x nadobúda funkcia $f: y = x^2 - 3x + 2$ nezáporné funkčné hodnoty, znamená riešiť nerovnicu

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0.$$

Rozložme kvadratický trojčlen na súčin koreňových činiteľov

$$(x-2)(x-1) \geq 0.$$

Nulové body sú $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. Uvažujme nasledujúcu tabuľku.

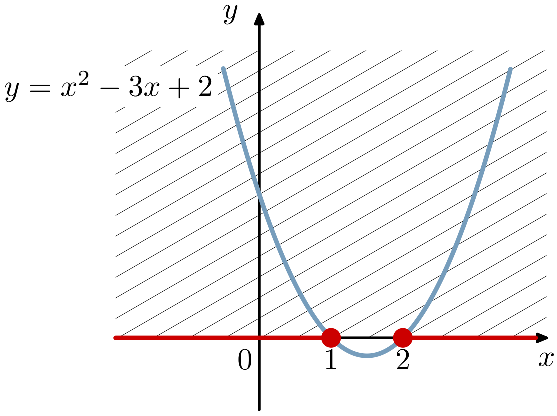
	$(-\infty, 1\rangle$	$\langle 1, 2\rangle$	$\langle 2, \infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)(x-1)$	$+$	$-$	$+$

Funkcia f nadobúda nezáporné funkčné hodnoty pre $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, \infty)$.

Poznamenajme, že príklad je možné riešiť aj graficky. Na Obr. 4.1 je znázornený graf kvadratickej funkcie $f: y = x^2 - 3x + 2$. Grafom kvadratickej funkcie je parabola, keďže koeficient pri x^2 je kladný, parabola bude mať lokálne minimum. Funkcia f pretne os x v bodoch $x = 1$ a $x = 2$. Z grafu ľahko zistíme, že funkcia f nadobúda nezáporné funkčné hodnoty pre $x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, \infty)$. Jedná sa o časť krivky, ktorá je nad osou x spolu s bodmi, ktoré ležia na osi x.

Úlohy

4.45. Pre funkciu $f: y = -2x + 3$ určte x, ak $f(x) = 5$.



Obr. 4.1: Grafické riešenie kvadratickej nerovnice $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

4.46. Pre funkciu $f:\ y = x^2 - 4x + 4$ určte x, ak $f(x) = 0$.

4.47. Pre funkciu $f:\ y = x^2 - 4x - 12$ určte x, ak $f(x) = 9$.

4.48. Zistite, pre ktoré čísla nadobúdajú nasledujúce funkcie nulové funkčné hodnoty.

a) $y = 4x^2 - 25$. **b)** $y = x^2 - 10x + 24$. **c)** $y = \dfrac{x-1}{x+3}$.

d) $y = \dfrac{5x}{x^2+4}$. **e)** $y = \log(5-x)$. **f)** $y = \dfrac{\sqrt{3x-81}}{x+2}$.

4.49. Zistite, pre ktoré čísla nadobúdajú nasledujúce funkcie kladné funkčné hodnoty.

a) $y = 9x + 15$. **b)** $y = 3 - 2x - x^2$. **c)** $y = \dfrac{2-3x}{x+3}$.

d) $y = \dfrac{x-25}{x^2+1}$. **e)** $y = e^{3x-1}$. **f)** $y = \sqrt{3^x - 81}$.

4.50. Zistite, pre ktoré čísla nadobúdajú nasledujúce funkcie záporné funkčné hodnoty.

a) $y = 7x - 21$. **b)** $y = x^2 - 2x + 3$. **c)** $y = \dfrac{2-x}{3x+1}$.

d) $y = \dfrac{x^2-9}{4x+12}$. **e)** $y = \ln(2x-7)$. **f)** $y = \sqrt{16 - 4^x}$.

Výsledky

4.45. $x = -1$.

4.46. $x = 2$.

4.47. $x = -3$, $x = 7$.

4.48. **a)** $x = \pm\frac{5}{2}$. **b)** $x = 4$, $x = 6$. **c)** $x = 1$. **d)** $x = 0$. **e)** $x = 4$. **f)** $x = 27$.

4.49. **a)** $x \in \big(-\frac{5}{3}, \infty\big)$. **b)** $x \in (-3, 1)$. **c)** $x \in (-3, \frac{2}{3})$. **d)** $x \in (25, \infty)$. **e)** $x \in \mathbb{R}$.

f) $x = (4, \infty)$.

4.50. **a)** $x \in (-\infty, 3)$. **b)** Nemá riešenie. **c)** $x \in \big(-\infty, -\frac{1}{3}\big) \cup \big(2, \infty\big)$. **d)** $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3)$.

e) $x \in \big(\frac{7}{2}, 4\big)$. **f)** Nemá riešenie.

4.10 Testy

4.10.1 Test 1

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

4.1. Množina všetkých reálnych riešení nerovnice $\dfrac{|2-3x|}{x-1} > 4$ je

A) $(1, 2)$. **B)** $\emptyset$. **C)** $\left(\frac{6}{7}, 2\right\rangle$. **D)** $\left(\frac{6}{7}, 1\right) \cup (1, 2)$.

4.2. Určte množinu všetkých hodnôt parametra p, pre ktoré má rovnica $px^2 + 2x + p = 0$ v množine reálnych čísel jediný reálny koreň.

A) $\{-1, 1\}$. **B)** $\{0, -1, 1\}$. **C)** $\{0\}$. **D)** $\{1\}$.

4.3. Koreňom rovnice $\sqrt{4x^2 - \sqrt{5+8x}} = 1 + 2x$ v množine reálnych čísel patrí do množiny

A) $\{0, 1\}$. **B)** $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. **C)** $\{-1, 1\}$. **D)** $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.

4.4. Určte všetky hodnoty parametra p, pre ktoré rovnica $\dfrac{2}{x-3} = 5 - p$ nemá riešenie v množine reálnych čísel

A) $p = 1$. **B)** $p = 5$. **C)** $p = 3$. **D)** $p = 4$.

4.5. Riešením rovnice $3^{x+2} + 3^{-x} = 7 + 3^{x+3}$ v $\mathbb{R}$ je

A) kladné číslo menšie ako 3. **B)** číslo menšie ako 3.

C) číslo väčšie ako 3. **D)** číslo deliteľné 3.

Správne odpovede: A, B, D, B, B.

4.10.2 Test 2

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

4.1. Počet riešení rovnice $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{3}{2}$ v množine reálnych čísel je

A) párne číslo. **B)** nepárne číslo.

C) záporné číslo. **D)** číslo deliteľné 3.

4.2. Riešením nerovnice $\dfrac{|x-4|}{x-4} > 0$ v $\mathbb{R}$ je

A) $(-\infty, 4)$. **B)** $\mathbb{R} - \{4\}$. **C)** $(4, \infty)$. **D)** $(-4, 4)$.

4.3. Koreňom rovnice $0,25^{2-x} = \dfrac{256}{2^{x+3}}$ v množine reálnych čísel je

A) $x = 1$. **B)** $x = 3$. **C)** $x = 0$. **D)** $x = -1$.

4.4. Riešením nerovnice $\dfrac{-5}{\log_2 x} < \log_2 x - 6$ v množine reálnych čísel je

A) $(2, \infty)$. **B)** $\emptyset$. **C)** $(1, 2)$. **D)** $(1, 2) \cup (32, \infty)$.

4.5. Riešením rovnice $x^2 - 6x + 4 = \dfrac{x-1}{1-x}$ v $\mathbb{R}$ je

A) $\{1, -5\}$. **B)** $\{-1, 5\}$. **C)** $\{1, 5\}$. **D)** $\{5\}$.

Správne odpovede: A, C, B a D, D, D.

4.10.3 Test 3

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

4.1. Súčin koreňov rovnice $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ v množine reálnych čísel je

A) 9. **B)** -9. **C)** 0. **D)** 10.

4.2. Riešenim sústavy nerovníc $x + 1 \leq 2x + 3 < 3x + 5$ v množine celých záporných čísel je

A) $\{-2, -1\}$. **B)** $\{-1\}$. **C)** $(-2, \infty)$. **D)** $\emptyset$.

4.3. Počet riešení rovnice $1 - |x - 4| = x + 2$ v množine reálnych čísel je

A) 1. **B)** ∞. **C)** 0. **D)** 2.

4.4. Riešením nerovnice $\sqrt{2x - x^2} < 5 - x$ v $\mathbb{R}$ je

A) $(0, 2)$. **B)** $\emptyset$.

C) $(0, 2)$. **D)** $\langle 0, 2 \rangle$.

4.5. Súčet koreňov rovnice $25^{x^2+5x+3} = 5^{x^2+4x-2}$ je

A) 6. **B)** -6. **C)** 0. **D)** -2.

Správne odpovede: A, B, C, D, B.

4.10.4 Test 4

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

4.1. Riešením nerovnice $\dfrac{3x-1}{2-x} \leq 1$ v množine prirodzených čísel je

A) $\mathbb{N}$. **B)** $\mathbb{N} - \{1,2\}$. **C)** $\mathbb{N} - \{1\}$. **D)** $\mathbb{N} - \{2\}$.

4.2. Koreňom rovnice $\log_2 x + \log_4 x = 3$ v $\mathbb{R}$ je

A) prvočíslo. **B)** číslo väčšie ako 5.

C) nepárne číslo. **D)** párne číslo.

4.3. Množinu všetkých reálnych čísel p, pre ktoré má rovnica $p - 3 = \dfrac{4}{x+2}$ kladné riešenie je

A) $(-\infty, 3)$. **B)** $\emptyset$. **C)** $\langle 3, 5\rangle$. **D)** $(3, 5)$.

4.4. Súčet koreňov rovnice $|3x+2| + |2-x| = 4$ v množine reálnych čísel je

A) 2. **B)** -1. **C)** 0. **D)** 6.

4.5. Počet riešení rovnice $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ v $\mathbb{R}$ je

A) 1. **B)** 0. **C)** 3. **D)** 2.

Správne odpovede: B, D, D, B, A.

5 Goniometria

Goniometria je oblasť matematiky, ktorá sa zaoberá goniometrickými funkciami.

Uhly meriame

- v stupňovej miere – jednotkou je stupeň, označujeme °,

- v oblúkovej miere – jednotkou je radián, označujeme rad.

Pre prevod medzi stupňami a radiánmi platí

$$\boxed{\begin{aligned} 1^\circ &= \frac{\pi}{180} \doteq 0,0175 \text{ rad} \\ 1\,\text{rad} &= \frac{180^\circ}{\pi} \doteq 57^\circ\, 17'\, 45'' \end{aligned}}$$

Výhodou merania uhlov v radiánoch je, že veľkosť uhla v radiánoch je zároveň dĺžkou kružnicového oblúka prislúchajúceho tomuto uhlu na jednotkovej kružnici.

Poznamenajme, že číslo π (nazýva sa tiež Ludolfovo číslo) je iracionálne číslo, teda sa nedá zapísať v tvare zlomku. Jeho desatinný rozvoj je nekonečný a neperiodický. Približná hodnota čísla π, zaokrúhlená na dve desatinné miesta, je $\pi = 3,14$.

Príklad 5.1. *Prepíšme 45° na radiány a* $\frac{2\pi}{3}$ *radiánov na stupne.*

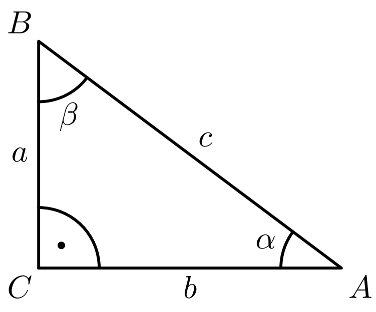
Riešenie. Platí

$45^\circ = 45 \cdot 1^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ rad,

$\frac{2\pi}{3}$ rad $= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{2\pi \cdot 180^\circ}{3\pi} = 120^\circ$.

5.1 Goniometrické funkcie

Definícia goniometrických funkcií ostrých uhlov pomocou pomerov strán v pravouhlom trojuholníku.
Uvažujme pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C, pozri Obr. 5.1. Označme α uhol pri vrchole A a β uhol pri vrchole B. Strana AB, teda strana oproti pravému uhlu, sa nazýva prepona. Jej dĺžku označme c. Zvyšné dve strany pravouhlého trojuholníka sa nazývajú odvesny. Dĺžku strany BC označme a a dĺžku strany AC označme b.



Obr. 5.1: Pravouhlý trojuholník ABC.

Platí

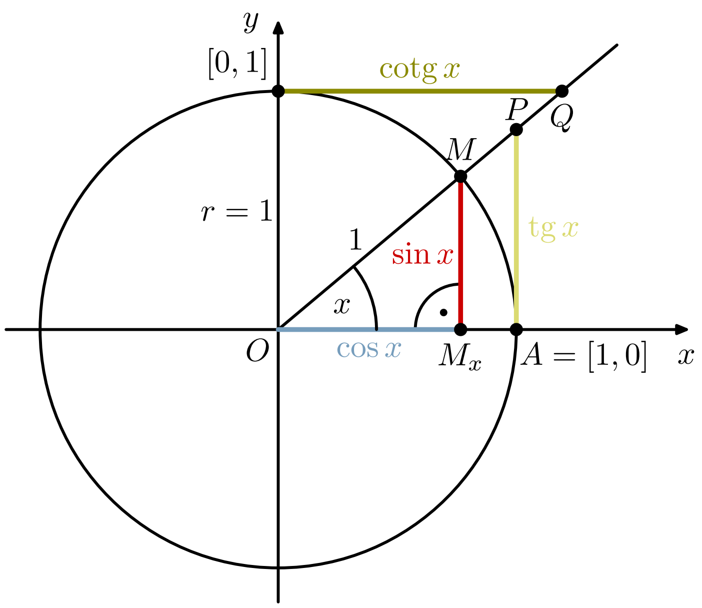
- *sínus* uhla sa definuje ako pomer dĺžok protiľahlej odvesny a prepony,
- *kosínus* uhla sa definuje ako pomer dĺžok priľahlej odvesny a prepony,
- *tangens* uhla sa definuje ako pomer dĺžok protiľahlej odvesny a priľahlej odvesny,
- *kotangens* uhla sa definuje ako pomer dĺžok priľahlej odvesny a protiľahlej odvesny.

Teda

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\sin\beta = \frac{b}{c}$
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\cos\beta = \frac{a}{c}$
$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{a}{b}$	$\mathrm{tg}\ \beta = \frac{b}{a}$
$\mathrm{cotg}\ \alpha = \frac{b}{a}$	$\mathrm{cotg}\ \beta = \frac{a}{b}$

Nevýhodou tejto definície je, že goniometrické funkcie sú definované len pre uhly z intervalu $(0°, 90°)$, resp. $(0, \frac{\pi}{2})$.

Definícia goniometrických funkcií pomocou jednotkovej kružnice.
Majme súradnicový systém s počiatkom v bode $O = [0, 0]$. Jednotková kružnica je kružnica s polomerom 1 a so stredom v počiatku súradnicového systému, teda je daná predpisom $x^2 + y^2 = 1$. Pozri Obr. 5.2.



Obr. 5.2: Jednotková kružnica.

Uvažujme bod $A = [1, 0]$ a nech $M = [x_M, y_M]$ je ľubovoľný bod na jednotkovej kružnici nachádzajúci sa v I. kvadrante. Keďže obvod kruhu s polomerom $r = 1$ je 2π, dĺžka kružnicového oblúka prislúchajúceho nejakému uhlu α je α. (Poznamenajme, že dĺžka kružnicového oblúka je rovná 1 práve vtedy, keď prislúchajúci uhol má veľkosť 1 radiánu.) Teda veľkosť orientovaného uhla $\measuredangle AOM$ v radiánoch, označme ho x, je zároveň dĺžkou kružnicového oblúka prislúchajúceho tomuto uhlu na jednotkovej kružnici.

Označme kolmý priemet bodu M na x-ovú os M_x. Teda trojuholník OM_xM je pravouhlý. Potom x-ová súradnica bodu M bude kosínus uhla x a y-ová súradnica bude sínus uhla x. Na jednotkovej kružnici je tangens reprezentovaný ako y-ová súradnica bodu P, ktorý je priesečníkom priamky, na ktorej leží koncové rameno orientovaného uhla, a dotyčnice ku kružnici v bode $A = [1, 0]$. Kotangens je x-ová súradnica priesečníka Q priamky, na ktorej leží koncové rameno orientovaného uhla, a dotyčnice ku kružnici v bode $[0, 1]$.

Poznámka 5.1. Analogicky definujeme goniometrické funkcie pre uhly z ostatných kvadrantov.

Poznámka 5.2. Vlastnosťami a grafmi goniometrických funkcií sme sa zaoberali v 3. kapitole Funkcie.

Pre znamienka goniometrických funkcií v jednotlivých kvadrantoch platí

kvadrant	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{cotg}\, x$
I.	$+$	$+$	$+$	$+$
II.	$+$	$-$	$-$	$-$
III.	$-$	$-$	$+$	$+$
IV.	$-$	$+$	$-$	$-$

Tabuľka základných hodnôt goniometrických funkcií

x	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$	360° 2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$*$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$*$	0
$\mathrm{cotg}\, x$	$*$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$*$	0	$*$

Symbol $*$ v predchádzajúcej tabuľke znamená, že príslušná funkcia pre danú hodnotu nie je definovaná.

Základné vzťahy medzi goniometrickými funkciami

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\mathrm{cotg}\, x}$$

$$\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, x = 1 \qquad \mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}$$

Súčtové vzorce

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y \qquad \operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \qquad \operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \qquad \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \qquad \operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \cdot \sin y}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

Vzorce pre výpočet funkcií dvojnásobných a polovičných argumentov

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

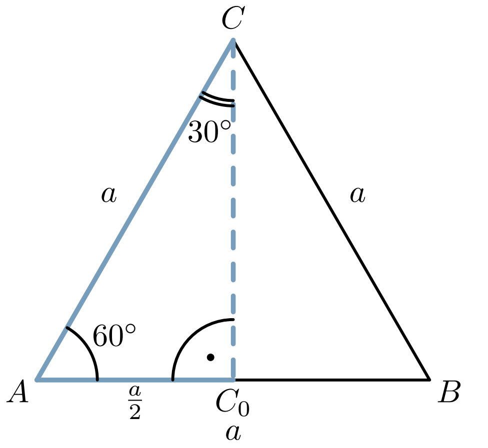
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1-\cos x}$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Príklad 5.2. *Pomocou vhodného trojuholníka odvoďme hodnoty goniometrických funkcií uhlov 30° a 60°.*
Riešenie. Uvažujme rovnostranný trojuholník ABC, znázornený na Obr. 5.3, so stranou veľkosti $a = 1$. Nech C_0 je stred strany AB, teda veľkosť strany AC_0 je $\frac{1}{2}$. Trojuholník AC_0C je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole C_0. Platí

$$|\measuredangle CAC_0| = 60° \quad \text{a} \quad |\measuredangle ACC_0| = 30°.$$



Obr. 5.3: Rovnostranný trojuholník ABC.

Z Pytagorovej vety dostaneme

$$
\begin{aligned}
|AC_0|^2 + |CC_0|^2 &= |AC|^2 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^2 + |CC_0|^2 &= 1^2 \\
|CC_0|^2 &= 1 - \frac{1}{4} \\
|CC_0|^2 &= \frac{4-1}{4} \\
|CC_0|^2 &= \frac{3}{4} \\
|CC_0| &= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

Podľa definície goniometrických funkcií pomocou pomerov strán v pravouhlom trojuholníku AC_0C dostávame

$$
\begin{aligned}
\sin 30^\circ &= \frac{|AC_0|}{|AC|} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \\
\sin 60^\circ &= \frac{|CC_0|}{|AC|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\cos 30^\circ &= \frac{|CC_0|}{|AC|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\cos 60^\circ &= \frac{|AC_0|}{|AC|} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \\
\text{tg } 30^\circ &= \frac{|AC_0|}{|CC_0|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\
\text{tg } 60^\circ &= \frac{|CC_0|}{|AC_0|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \\
\text{cotg } 30^\circ &= \frac{|CC_0|}{|AC_0|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \\
\text{cotg } 60^\circ &= \frac{|AC_0|}{|CC_0|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}
$$

Príklad 5.3. *Vypočítajme*

a) $\sin\dfrac{29\pi}{4}$. **b)** $\cos(-840°)$. **c)** $\operatorname{tg}\dfrac{17\pi}{6}$. **d)** $\operatorname{cotg}\left(-\dfrac{19\pi}{3}\right)$.

Riešenie.

a) Funkcia sínus je periodická s periódou 2π, teda

$$\begin{aligned}\sin\frac{29\pi}{4} &= \sin\frac{24\pi+5\pi}{4} = \sin\left(\frac{24\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(6\pi+\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(3\cdot 2\pi+\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4}\\ &= \sin\frac{4\pi+1\pi}{4} = \sin\left(\frac{4\pi}{4}+\frac{1\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

b) Funkcia kosínus je párna, teda

$$\cos(-840°) = \cos 840°.$$

Keďže funkcia kosínus je periodická s periódou $360°$, platí

$$\cos 840° = \cos(2\cdot 360° + 120°) = \cos 120° = \cos(90° + 30°) = -\cos(90° - 30°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}.$$

c) Funkcia tangens je periodická s periódou π. Platí

$$\operatorname{tg}\frac{17\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{18\pi-\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Keďže funkcia tangens je nepárna, dostávame

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

d) Funkcia kotangens je nepárna, teda

$$\operatorname{cotg}\left(-\frac{19\pi}{3}\right) = -\operatorname{cotg}\frac{19\pi}{3}.$$

Vzhľadom k tomu, že funkcia kotangens je periodická s periódou π môžeme písať

$$\operatorname{cotg}\frac{19\pi}{3} = \operatorname{cotg}\frac{18\pi+\pi}{3} = \operatorname{cotg}\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Teda $\operatorname{cotg}\left(-\frac{19\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Príklad 5.4. *Nakreslime grafy nasledujúcich funkcií.*

a) $f:\ y = \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$. **b)** $f:\ y = \operatorname{tg} 3x$. **c)** $f:\ y = -\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2$.

Riešenie.

a) Z toho, že funkcia kosínus je párna funkcia, vyplýva, že pre všetky reálne čísla x platí

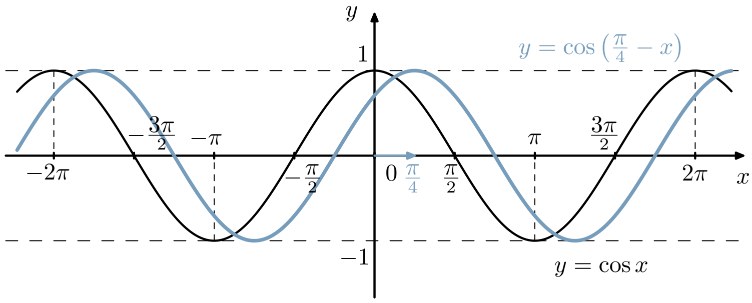
$$y = \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \cos\left[-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Vychádzajme z grafu funkcie $y = \cos x$.

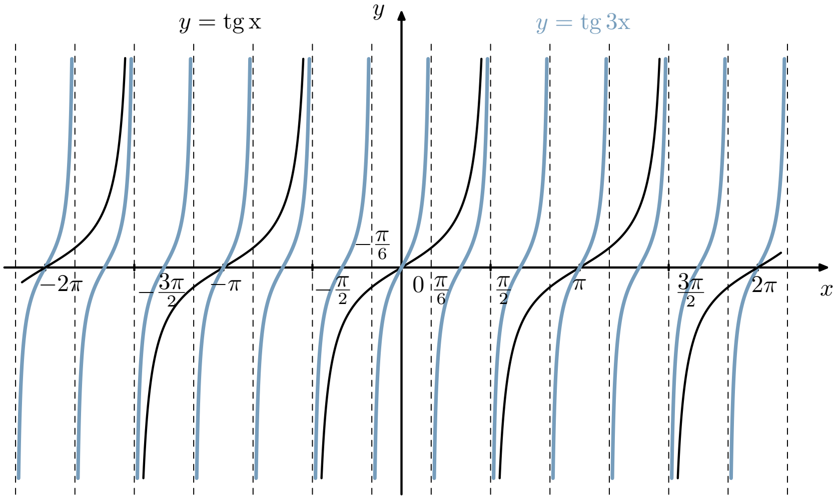
Pripočítanie konštanty $-\frac{\pi}{4}$ ku argumentu funkcie spôsobí, že graf funkcie sa posunie v smere osi x o hodnotu $\frac{\pi}{4}$. (Poznamenajme, že v 3. kapitole Funkcie sme sa zaoberali tým, ako sa zmení graf nejakej funkcie, ak jej predpis modifikujeme.)

b) Uvažujme graf funkcie $y = \operatorname{tg} x$.

Násobenie argumentu funkcie konštantou 3 spôsobí, že sa graf funkcie v smere osi x skráti 3-krát. Funkcia $y = \operatorname{tg} 3x$ bude teda periodická s periódou $\frac{\pi}{3}$.



Obr. 5.4: Graf funkcie $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.



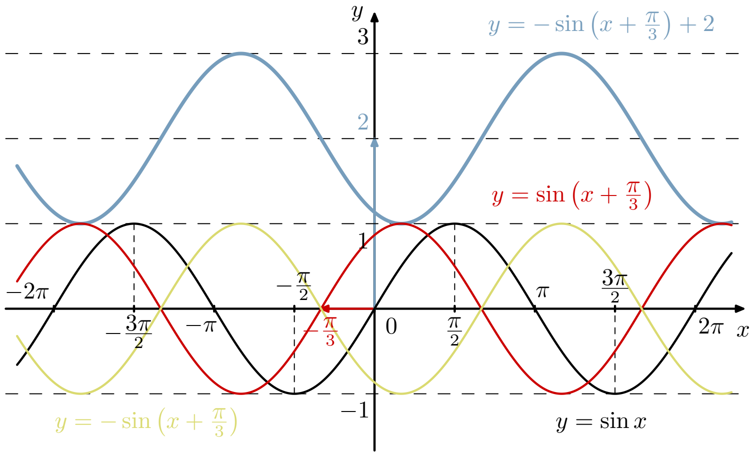
Obr. 5.5: Graf funkcie $y = \mathrm{tg}\ 3x$.

c) Vychádzajme z grafu funkcie $y = \sin x$.

Pripočítanie konštanty $\frac{\pi}{3}$ ku argumentu funkcie spôsobí, že graf funkcie sa posunie v smere osi x o hodnotu $-\frac{\pi}{3}$.

Zmena znamienka pri funkcii má za následok, že graf novej funkcie je súmerný s grafom pôvodnej funkcie podľa osi x.

Pripočítaním konštanty 2 k funkcii sa graf funkcie posunie v smere osi y o hodnotu 2.



Obr. 5.6: Graf funkcie $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

Grafy daných funkcií sú znázornené na Obr. 5.4, 5.5 a 5.6.

Úlohy

5.1. Vyjadrite stupne v radiánoch.

a) $45°$. **b)** $30°$. **c)** $60°$. **d)** $120°$. **e)** $90°$.

f) $180°$. **g)** $360°$. **h)** $1°$. **i)** $720°$. **j)** $225°$.

5.2. Vyjadrite radiány na stupňoch.

a) 2π. **b)** $\dfrac{\pi}{3}$. **c)** $\dfrac{\pi}{4}$. **d)** $\dfrac{2\pi}{3}$. **e)** $\dfrac{\pi}{6}$.

f) π. **g)** 3π. **h)** $\dfrac{5\pi}{6}$. **i)** 0. **j)** $\dfrac{7\pi}{3}$.

5.3. Pomocou vhodného trojuholníka odvoďte hodnoty goniometrických funkcií uhla $45°$.

5.4. Vypočítajte

a) $\sin 4\pi$. **b)** $\cos 7\pi$. **c)** $\sin(-7\pi)$. **d)** $\cos \frac{13\pi}{3}$. **e)** $\cos\left(-\frac{27\pi}{6}\right)$.

f) $\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$. **g)** $\cos \frac{13\pi}{4}$. **h)** $\cos \frac{7}{6}\pi$. **i)** $\cos \frac{14}{3}\pi$. **j)** $\sin \frac{14}{3}\pi$.

5.5. Vypočítajte

a) $\sin 150°$. **b)** $\cos 300°$. **c)** $\sin(-225°)$. **d)** $\cos(-945°)$. **e)** $\cos 60°$.

f) $\sin 45°$. **g)** $\cos 30°$. **h)** $\sin 90°$. **i)** $\cos 180°$. **j)** $\sin 270°$.

5.6. Vypočítajte

a) $\mathrm{tg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$. **b)** $\mathrm{tg}\frac{10\pi}{3}$. **c)** $\mathrm{cotg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$. **d)** $\mathrm{cotg}\frac{5}{4}\pi$. **e)** $\mathrm{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

f) $\mathrm{tg}\ 210°$. **g)** $\mathrm{cotg}\ 45°$. **h)** $\mathrm{tg}\ 0°$. **i)** $\mathrm{cotg}\ 0°$. **j)** $\mathrm{cotg}\ 600°$.

5.7. Nakreslite grafy nasledujúcich funkcií.

a) $y = -\sin x$. **b)** $y = 2\cos x$. **c)** $y = \sin x + 2$. **d)** $y = \cos 2x$. **e)** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

f) $y = \sin(-x)$. **g)** $y = \cos(-x)$. **h)** $y = \mathrm{tg}\, 2x$. **i)** $y = -\mathrm{cotg}\, x$. **j)** $y = \mathrm{cotg}\,\frac{x}{2} - 1$.

5.8. Nakreslite grafy nasledujúcich funkcií.

a) $y = 3\cos(x + \pi) - 1$. **b)** $y = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$. **c)** $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}$.

d) $y = 2\cos(2x + \frac{\pi}{4}) + 2$. **e)** $y = \mathrm{tg}\big(x + \frac{\pi}{2}\big) + 2$. **f)** $y = -\mathrm{tg}\big(2x - 3\big) + \frac{1}{3}$.

Výsledky

5.1. **a)** $\dfrac{\pi}{4}$. **b)** $\dfrac{\pi}{6}$. **c)** $\dfrac{\pi}{3}$. **d)** $\dfrac{2\pi}{3}$. **e)** $\dfrac{\pi}{2}$. **f)** π. **g)** 2π. **h)** $\dfrac{\pi}{180}$. **i)** 4π. **j)** $\dfrac{5\pi}{4}$.

5.2. **a)** $360°$. **b)** $60°$. **c)** $45°$. **d)** $120°$. **e)** $30°$. **f)** $180°$. **g)** $540°$. **h)** $150°$. **i)** $0°$. **j)** $420°$.

5.3. Uvažujte rovnoramenný pravouhlý trojuholník.

5.4. **a)** 0. **b)** -1. **c)** 0. **d)** $\dfrac{1}{2}$. **e)** 0. **f)** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **g)** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **h)** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **i)** $-\dfrac{1}{2}$. **j)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5.5. **a)** $\dfrac{1}{2}$. **b)** $\dfrac{1}{2}$. **c)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **d)** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **e)** $\dfrac{1}{2}$. **f)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **g)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **h)** 1. **i)** -1. **j)** -1.

5.6. **a)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **b)** $\sqrt{3}$. **c)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **d)** 1. **e)** -1. **f)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **g)** 1. **h)** 0. **i)** Nie je definované. **j)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.7. Využite poznatky z podkapitol 3.8 Elementárne funkcie a 3.1 Pojem funkcie, definičný obor funkcie, kde je uvedené, ako sa zmenia grafy funkcií, ak sa ich predpis modifikuje.

5.8. Postupujte analogicky ako v predchádzajúcej úlohe.

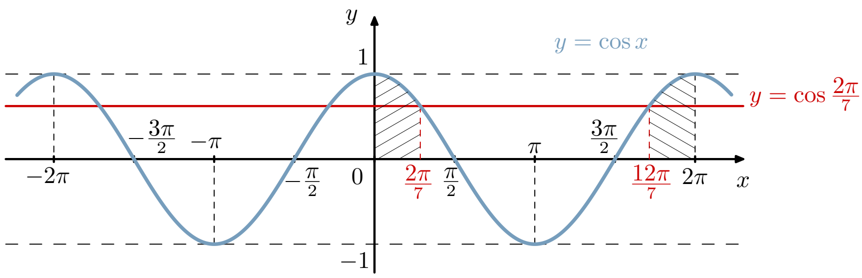
5.2 Goniometrické rovnice a nerovnice

Pri riešení goniometrických rovníc a nerovníc využívame vlastnosti goniometrických funkcií, vzťahy medzi goniometrickými funkciami a súčtové vzorce. Často sa pri riešení používa taktiež metóda substitúcie.

Príklad 5.5. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*

$$\cos x = \cos \frac{2\pi}{7}.$$

Riešenie. Nájdime najprv korene tejto rovice na intervale $\langle 0, 2\pi)$.



Obr. 5.7: Grafické riešenie rovnice $\cos x = \cos \frac{2\pi}{7}$.

Číslo $\frac{2\pi}{7}$ je z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2})$, teda sa nachádza v I. kvadrante. Z vlastností funkcie kosínus dostávame, pozri Obr. 5.7, že pre všetky čísla x z I. kvadrantu platí $\cos x = \cos(2\pi - x)$, odtiaľ

$$\cos \frac{2\pi}{7} = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = \cos \frac{14\pi - 2\pi}{7} = \cos \frac{12\pi}{7}.$$

Teda korene danej rovnice na intervale $\langle 0, 2\pi)$ sú $x_1 = \frac{2\pi}{7}$ a $x_2 = \frac{12\pi}{7}$.

Keďže funkcia kosínus je periodická s periódou 2π, množinu všetkých koreňov v množine reálnych čísel môžeme vyjadriť v tvare $x_1 + 2k\pi$ alebo $x_2 + 2k\pi$, kde k je ľubovoľné celé číslo.

Teda riešením danej rovnice sú čísla $\frac{2\pi}{7} + 2k\pi$, $\frac{12\pi}{7} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Množinu riešení možno stručne zapísať v tvare

$$K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{2\pi}{7} + 2k\pi, \frac{12\pi}{7} + 2k\pi\right\}.$$

Príklad 5.6. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*

$$2\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

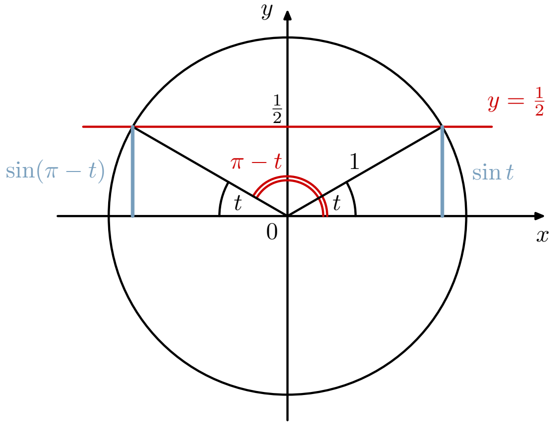
Riešenie. Rovnicu budeme riešiť pomocou substitúcie

$$7x - \frac{\pi}{4} = t.$$

Zaoberajme sa najprv rovnicou

$$2\sin t = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin t = \frac{1}{2}.$$

Hľadajme opäť najskôr korene tejto rovice na intervale $\langle 0, 2\pi)$. Uvažujme jednotkovú kružnicu znázornenú na Obr. 5.8.



Obr. 5.8: Grafické riešenie rovnice $\sin t = \frac{1}{2}$.

Je zrejmé, že rovnica $\sin t = \frac{1}{2}$ má na $\langle 0, 2\pi)$ dva korene t_1, t_2, pričom platí

$$t_1 = \frac{\pi}{6} \quad \text{a} \quad t_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Funkcia sínus je periodická s periódou 2π, teda riešenia v $\mathbb{R}$ sú

$$t_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad t_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Keďže $t = 7x - \frac{\pi}{4}$, potrebujeme ešte vyriešiť dve lineárne rovnice

$$\text{I.} \qquad \begin{aligned} 7x - \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 7x &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 7x &= \frac{2\pi + 3\pi}{12} + 2k\pi \\ 7x &= \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ x &= \frac{5\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} \end{aligned}$$

$$\text{II.} \qquad \begin{aligned} 7x - \frac{\pi}{4} &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ 7x &= \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 7x &= \frac{10\pi + 3\pi}{12} + 2k\pi \\ 7x &= \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ x &= \frac{13\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} \end{aligned}$$

Teda množina riešení danej rovnice je

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7}, \frac{13\pi}{84} + \frac{2k\pi}{7} \right\}.$$

Príklad 5.7. *Riešme v* $\mathbb{R}$ *rovnicu*

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0.$$

Riešenie. Danú rovnicu budeme riešiť pomocou substitúcie

$$\sin x = t.$$

Po použití tejto substitúcie dostaneme kvadratickú rovnicu

$$2t^2 + 3t - 2 = 0.$$

Korene tejto kvadratickej rovnice môžeme nájsť napríklad pomocou diskriminantu. Pozri podkapitolu 4.2 Kvadratické rovnice a nerovnice.

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}, \\[2mm] \dfrac{-3-5}{4} = -2. \end{cases}$$

Ak sa vrátime späť od premennej t k premennej x, tak dostávame dve rovnice

$$\sin x = t_1 = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \sin x = t_2 = -2.$$

Podľa Príkladu 5.6 je riešením rovnice $\sin x = \frac{1}{2}$ množina

$$K_1 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}.$$

Pre všetky reálne čísla x platí

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Z toho vyplýva, že druhá rovnica $\sin x = -2$ nemá riešenie. Teda, $K_2 = \emptyset$.

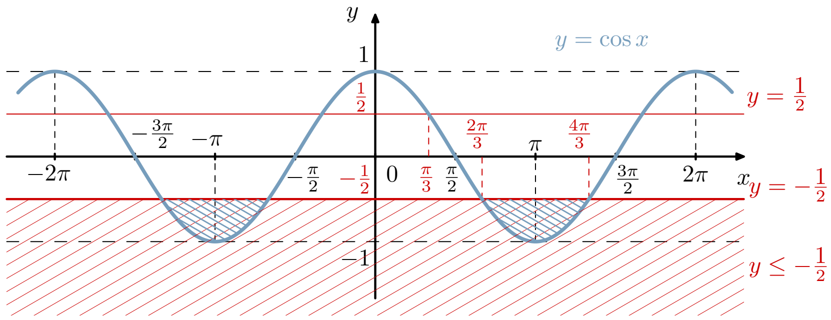
Zhrnutím dostávame, že množina riešení danej rovnice je

$$K = K_1 \cup K_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}.$$

Príklad 5.8. *V* $\mathbb{R}$ *riešme nerovnicu*

$$\cos x \leq -\frac{1}{2}.$$

Riešenie. Hľadajme riešenie danej nerovnice na intervale $\langle 0, 2\pi)$. Uvažujme graf funkcie $y = \cos x$. Najprv nájdime riešenie rovnice $\cos x = \frac{1}{2}$ v prvom kvadrante. Je zrejmé, že riešením je $x_0 = \frac{\pi}{3}$.



Obr. 5.9: Grafické riešenie nerovnice $\cos x \leq -\frac{1}{2}$.

Riešenia x_1, x_2 rovnice $\cos x = -\frac{1}{2}$ na itervale $\langle 0, 2\pi)$ nájdeme využitím vlastností funkcie kosínus, pozri Obr. 5.9.

$$x_1 = \pi - x_0 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$
$$x_2 = \pi + x_0 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Teda riešením nerovnice je interval $\langle \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \rangle$. Keďže funkcia kosínus je periodická s periódou 2π, riešením nerovnice je zjednotenie intervalov

$$K = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right\rangle.$$

Poznámka 5.3. Keďže sme v predchádzajúcich príkladoch použili len ekvivalentné úpravy, nie je nutné vykonať skúšku správnosti.

Úlohy

5.9. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $\sin x = \sin 10^\circ$. **b)** $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 117^\circ$. **c)** $\cos x = \cos \frac{7}{4}\pi$.

d) $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3}$. **e)** $\cos(x-4) = \cos(2,1\pi)$. **f)** $\sin \frac{x}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$.

5.10. V množine reálnych čísel riešte rovnice.

a) $\sin x = \frac{4}{3}$. **b)** $2\cos x = 1$. **c)** $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $\operatorname{cotg} x = \cos 0$. **e)** $\cos 3x = 0,5$. **f)** $\sin 2x = 0$.

g) $\operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$. **h)** $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$. **i)** $\cos \frac{3x+2}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.11. Riešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $(\cos x + 3)(\cos x - 1) = 0$. **b)** $2\big(\sin x + \frac{1}{2}\big)(\sin x + 1) = 0$.

c) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$. **d)** $2\cos^2 y - 7\cos y + 3 = 0$.

e) $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$. **f)** $2\cos^2 x = \sin x + 1$.

g) $\dfrac{1}{\cos^2 y} - \operatorname{tg}^2 y = 1$. **h)** $\sin 2x = \operatorname{tg} x$.

i) $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x$. **j)** $\cos 3x = \sin 4x \cdot \cos 3x$.

5.12. Nájdite riešenie rovnice na intervale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

a) $\sin^2 x + 5\sin x + 4 = 0$. **b)** $2\cos^2 x - \cos x = 0$.

c) $3\cos^2 x + \cos x = 1 - \sin^2 x$. **d)** $\cos x + \sin 2x = 0$.

e) $4\cos^2 x + \sin x - 7 = 0$. **f)** $\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$.

5.13. Riešte v $\mathbb{R}$ nerovnice.

a) $\sin x < \frac{1}{2}$. **b)** $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **c)** $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

d) $\operatorname{cotg} x + 1 \geq 0$. **e)** $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **f)** $\sin x + \frac{1}{2} < 0$.

5.14. Riešte v $\mathbb{R}$ nerovnice.

a) $\cos x > 2$. **b)** $\cos x \geq -3$. **c)** $\sin x < \frac{\pi}{2}$.

d) $\cos(x-3) > 1$. **e)** $-3 \cdot \operatorname{tg}\frac{3x-\pi}{4} > 0$. **f)** $2\sin(3x-4) \leq -1$.

Výsledky

5.9. **a)** $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{10^\circ + 360^\circ k, 170^\circ + 360^\circ k\}$. **b)** $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{117^\circ + 180^\circ k\}$. **c)** $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right\}$.

d) $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi\right\}$. **e)** $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{4 + 0,1\pi + 2k\pi, 4 + 1,9\pi + 2k\pi\}$. **f)** $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{12\pi}{5} + 4k\pi, \frac{18\pi}{5} + 4k\pi\right\}$.

5.10. **a)** Nemá riešenie. **b)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right\}$. **c)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{5\pi}{4}+2k\pi, \frac{7\pi}{4}+2k\pi\right\}$.

d) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}$. **e)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right\}$. **f)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$. **g)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi\right\}$.

h) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi\right\}$. **i)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{10\pi}{9}-\frac{2}{3}+\frac{8k\pi}{3}, \frac{14\pi}{9}-\frac{2}{3}+\frac{8k\pi}{3}\right\}$.

5.11. **a)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{2k\pi\}$. **b)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{11\pi}{6}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\}$. **c)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$.

d) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right\}$. **e)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, \operatorname{arctg}(-3)+k\pi\right\}$.

f) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\}$. **g)** $\mathbb{R}-\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$. **h)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k, k\pi\right\}$.

i) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, 2k\pi, \frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right\}$. **j)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right\}$.

5.12. **a)** $\frac{3\pi}{2}$. **b)** $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$. **c)** $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$. **d)** $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$. **e)** Nemá riešenie.

f) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

5.13. **a)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{13\pi}{6}+2k\pi\right)$. **b)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle -\frac{3\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\rangle$. **c)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{3}+k\pi\right)$.

d) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle k\pi, \frac{3\pi}{4}+k\pi\right\rangle$. **e)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle \frac{5\pi}{6}+2k\pi, \frac{7\pi}{6}+2k\pi\right\rangle$. **f)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)$.

5.14. **a)** $\emptyset$. **b)** $\mathbb{R}$. **c)** $\mathbb{R}$. **d)** $\emptyset$. **e)** $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}, \frac{\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}\right)$.

f) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\langle \frac{7\pi}{18}+\frac{4}{3}+\frac{2k\pi}{3}, \frac{11\pi}{18}+\frac{4}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right\rangle$.

5.3 Testy

5.3.1 Test 1

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

5.1. Výraz $\cos\frac{21\pi}{4}$ je rovný

A) $\cos\frac{\pi}{4}$. **B)** $\sin\frac{\pi}{4}$. **C)** $\cos\frac{3\pi}{4}$. **D)** $\sin\frac{3\pi}{4}$.

5.2. Počet riešení rovnice $\sin 2x = \sin x$ na intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ je

A) 3. **B)** 2. **C)** 4. **D)** 1.

5.3. Ak je x riešením rovnice $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tak $\cos^2 x$ je rovné

A) $\frac{1}{2}$. **B)** $\frac{1}{4}$. **C)** 0. **D)** 1.

5.4. Označme M množinu všetkých riešení rovnice $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$. Potom

A) $M = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$. **B)** $M = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right\}$.

C) $M = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\}$. **D)** $M = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\}$.

5.5. Označme M množinu všetkých riešení nerovnice $\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) < \frac{1}{2}$ na intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Potom

A) $M = \left\langle 0, \frac{5\pi}{18} \right\rangle$. **B)** $M = \left\langle \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18} \right\rangle$. **C)** $M = \left(\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. **D)** $M = \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{18} \right)$.

Správne odpovede: C, C, B, A, C.

5.3.2 Test 2

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1. Výraz $\cos \frac{\pi}{4}$ je rovný

   A) $-\cos \frac{3\pi}{4}$. **B)** $\frac{1}{2}$. **C)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D)** $\sin \frac{\pi}{4}$.

2. Počet riešení rovnice $\sin x = 0$ na intervale $\big(0, 2\pi\big)$ je

   A) 3. **B)** 2. **C)** 4. **D)** 1.

3. Ak je $x = \frac{\pi}{6}$, tak hodnota výrazu $2\sin^2 x + \cos^2 x$ je rovná

   A) $\frac{1}{2}$. **B)** $\frac{1}{4}$. **C)** 1. **D)** $\frac{5}{4}$.

4. Podmienka $\cos x < 0$ na intervale $\big(0, \pi\big)$ je ekvivalentná s podmienkou

   A) $0 < x < \pi$. **B)** $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$. **C)** $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. **D)** $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

5. Označme M množinu všetkých riešení nerovnice $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ na intervale $\big\langle 0, 2\pi \big\rangle$. Potom

   A) $M = \big\langle 0, \frac{5\pi}{6} \big\rangle$. **B)** $M = \big\langle \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \big\rangle$. **C)** $M = \big(\frac{5\pi}{6}, \pi \big\rangle$. **D)** $M = \big\langle 0, \frac{5\pi}{6} \big)$.

Správne odpovede: A a C a D, D, D, D, B.

5.3.3 Test 3

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1. Výraz $\sin\frac{\pi}{3}$ je rovný

   A) $\cos\frac{\pi}{6}$. **B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C)** $\frac{1}{2}$. **D)** $\sin\big(-\frac{\pi}{3}\big)$.

2. Počet riešení rovnice $\cos 4x = 2$ na intervale $\big(0,\pi\big)$ je

   A) 0. **B)** 2. **C)** 4. **D)** 1.

3. Označme M množinu všetkých riešení rovnice $\sin 2x = \frac{1}{2}$ na intervale $\big(-\pi,\pi\big)$. Potom

   A) $M = \big\{\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\big\}$. **B)** $M = \big\{-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\big\}$. **C)** $M = \big\{-\frac{11\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\big\}$. **D)** $M = \big\{-\frac{11\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\big\}$.

4. Podmienka $\sin x \geq 0$ na intervale $\big(0,2\pi\big)$ je ekvivalentná s podmienkou

   A) $0 < x < \pi$. **B)** $0 \leq x \leq \pi$. **C)** $0 < x \leq \pi$. **D)** $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

5. Ak je $x = \frac{\pi}{4}$, tak výraz $2\sin x\cos x$ je rovný

   A) 1. **B)** $\frac{1}{4}$. **C)** 0. **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Správne odpovede: A a B, A, C, C, A.

5.3.4 Test 4

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1. Súčet riešení rovnice $\cos^2 x = 1$ na intervale $\big(-2\pi, 2\pi\big)$ je rovný

   A) π. **B)** 2π. **C)** 0. **D)** 1.

2. Ak je x z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, tak pre $\sin x \cos x$ platí

   A) $\sin x \cdot \cos x > 0$. **B)** $\sin x \cdot \cos x < 0$. **C)** Nedá sa určiť. **D)** $\sin x \cdot \cos x \geq 0$.

3. Označme M množinu všetkých riešení rovnice $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$. Potom

   A) $M = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \big\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\big\}$. **B)** $M = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \big\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\big\}$.

   C) $M = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \big\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\big\}$. **D)** $M = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \big\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\big\}$.

4. Počet riešení rovnice $\cos 3x = 0$ na intervale $\langle -\pi, \pi\rangle$ je

   A) 0. **B)** 2. **C)** 4. **D)** 6.

5. Označme M množinu všetkých riešení nerovnice $\sin 2x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ na intervale $\langle 0, \pi\rangle$. Potom

   A) $M = \langle 0, \frac{5\pi}{8}\rangle$. **B)** $M = \langle \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\rangle$. **C)** $M = \big(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\big\rangle$. **D)** $M = \big\langle \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\big)$.

Správne odpovede: C, D, B, D, B.

6 Postupnosti

6.1 Postupnosti

Postupnosť je ľubovoľná funkcia definovaná na množine prirodzených čísel. Teda

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$$

Funkčné hodnoty postupnosti priradené prirodzeným číslam n, $n = 1, 2, \dots$, nazývame *členmi postupnosti.* Označujeme a_1 – prvý člen postupnosti, a_2 – druhý člen postupnosti, $\dots$, a_n – n-tý člen postupnosti. V prípade, že členmi postupnosti sú čísla, hovoríme o číselnej postupnosti alebo postupnosti čísel. Ak sú členmi postupnosti funkcie, tak hovoríme o funkcionálnej postupnosti. My sa budeme v tejto zbierke zaoberať len číselnými postupnosťami.

Ak je definičný obor postupnosti množina prvých k prirodzených čísel, teda množina $\{1, 2, \dots, k\}$, tak postupnosť nazveme *konečnou* a označujeme ju

$$\{a_n\}_{n=1}^{k} = \{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k\}.$$

Ak definičným oborom postupnosti je celá množina prirodzených čísel, tak hovoríme o *nekonečnej postupnosti.* Označujeme ju

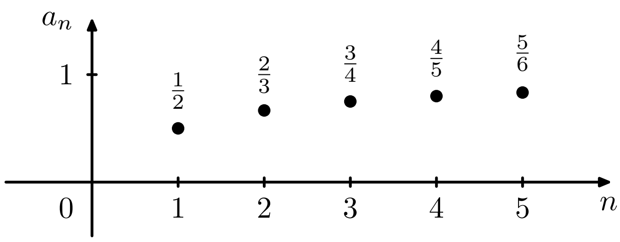
$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots\}$$

Grafom postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je množina izolovaných bodov $[n, a_n]$ v rovine, kde $n \in \mathbb{N}$.

Postupnosť môže byť určená niekoľkými spôsobmi.

- Vymenovaním niekoľkých členov postupnosti, prípadne graficky pre konečné postupnosti.

  Napríklad postupnosť $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ je daná prvými piatimi členmi. Táto postupnosť je znázornená na Obr. 6.1.



Obr. 6.1: Graf postupnosti danej prvými piatimi členmi $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$.

- Rekurentným vzorcom. Znamená to, že je daný prvý člen alebo niekoľko prvých členov postupnosti a vzťah pre výpočet ďalších členov postupnosti pomocou predchádzajúcich.

  Napríklad $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$, teda $a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 5 + 1 = 11, \dots$

- Vzorcom pre n-tý člen.

  Napríklad $\left\{\dfrac{3n-2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, teda $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$.

Vlastnosti postupností.
Keďže postupnosť je špeciálny prípad funkcie, má analogické vlastnosti, ako sú uvedené v 3. kapitole Funkcie – vlastnosti funkcií, elementárne funkcie.

Teda postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- *rastúca*, ak pre všetky prirodzené čísla n platí $a_{n+1} > a_n$,
- *klesajúca*, ak pre všetky prirodzené čísla n platí $a_{n+1} < a_n$,
- *nerastúca*, ak pre všetky prirodzené čísla n platí $a_{n+1} \leq a_n$,
- *neklesajúca*, ak pre všetky prirodzené čísla n platí $a_{n+1} \geq a_n$,
- *konštantná*, ak pre všetky prirodzené čísla n platí $a_{n+1} = a_n$,
- *zhora ohraničená*, ak existuje také reálne číslo h, že pre všetky prirodzené čísla n platí $a_n \leq h$,
- *zdola ohraničená*, ak existuje také reálne číslo d, že pre všetky prirodzené čísla n platí $a_n \geq d$.

  Číslo d nazývame dolné ohraničenie a číslo h horné ohraničenie postupnosti. Postupnosť je ohraničená, ak je ohraničená zhora aj zdola.

Príklad 6.1. *Je daná postupnosť* $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. *Napíšme prvých päť členov tejto postupnosti a $(n+1)$-vý člen. Zistime, či je daná postupnosť rastúca, a či je ohraničená.*

Riešenie. Postupnosť je určená vzorcom pre n-tý člen $a_n = \frac{n}{n+1}$. Teda $a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$, $a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$, $a_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$.

Ak má byť postupnosť rastúca, musí pre všetky prirodzené čísla n platiť $a_{n+1} > a_n$. Pre danú postupnosť teda musí platiť

$$\frac{n+1}{n+2} > \frac{n}{n+1}.$$

Táto nerovnica je ekvivalentná s nerovnicou

$$(n+1)(n+1) > n(n+2) \quad \Leftrightarrow \quad n^2+2n+1 > n^2+2n \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 0,$$

ktorá platí pre všetky prirodzené čísla n, to znamená, že daná postupnosť je rastúca.

Keďže podiel dvoch kladných čísel je číslo kladné, pre všetky prirodzené čísla n platí $\dfrac{n}{n+1} > 0$. Daná postupnosť je teda ohraničená zdola. Keďže pre všetky prirodzené čísla n je čitateľ menší ako menovateľ, taktiež platí $\dfrac{n}{n+1} < 1$. Teda daná postupnosť je ohraničená zhora. Tým sme dokázali, že uvedená postupnosť je ohraničená.

Príklad 6.2. *Napíšme vzťah pre n-tý člen postupnosti, ktorej prvých päť členov je* $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \frac{4}{81}, \frac{5}{243}, \frac{6}{729}$.

Riešenie. Čitatele členov posupnosti sú čísla $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots,\ n$.
Menovateľ je tvaru $3 = 3^1,\ 9 = 3^2,\ 27 = 3^3,\ 81 = 3^4,\ \dots,\ 3^n$. Teda predpis pre n-tý člen postupnosti je $a_n = \dfrac{n}{3^n}$.

Príklad 6.3. *Postupnosť* $\{3 \cdot 2^n\}_{n=1}^{\infty}$ *vyjadrime rekurentným vzťahom.*

Riešenie. Platí $a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$, $a_n = 3 \cdot 2^n$, $a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot 2 \cdot 2^n$. Teda

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^n} = 2.$$

Odtiaľ $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$. Teda daná postupnosť je rekurentne vyjadrená vzťahom $a_{n+1} = 2 \cdot a_n$, kde $a_1 = 6$.

Úlohy

6.1. Vyšetrite monotónnosť nasledujúcich postupností.

a) $\left\{2n+1\right\}_{n=1}^{\infty}$. **b)** $\left\{\frac{3n-1}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. **c)** $\left\{1+n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$.

d) $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. **e)** $\left\{\frac{n+1}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$. **f)** $\left\{n^2-10n+1\right\}_{n=1}^{\infty}$.

g) $\left\{(-1)^{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. **h)** $\left\{n^3-2n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$. **i)** $\left\{3^n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

6.2. Vyšetrite monotónosť a ohraničenosť daných postupností.

a) $\left\{\frac{3n}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$. **b)** $\left\{\frac{2n^2+1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. **c)** $\left\{3-2n-n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$.

6.3. Napíšte vzorec pre n-tý člen nasledujúcich postupností.

a) $3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ \ldots$ **b)** $5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots$ **c)** $4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \ldots$

d) $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots$ **e)** $1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ 0,\ 7,\ 0,\ \ldots$ **f)** $-1,\ 3,\ -5,\ 7,\ -9,\ \ldots$

6.4. Napíšte vzorec pre n-tý člen nasledujúcich postupností.

a) $\frac{1}{2\cdot3},\ \frac{4}{3\cdot4},\ \frac{9}{4\cdot5},\ \frac{16}{5\cdot6},\ \frac{25}{6\cdot7},\ \ldots.$ **b)** $1,\ -\frac{2}{2},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{8},\ \frac{5}{16},\ -\frac{6}{32},\ \ldots$ **c)** $\frac{1}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{3}{27},\ \frac{4}{81},\ \frac{5}{243},\ \ldots$

d) $-\frac{2}{4},\ -\frac{1}{5},\ 0,\ \frac{1}{7},\ \frac{2}{8},\ \frac{3}{9},\ \ldots$ **e)** $4,\ -2,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \ldots$ **f)** $3,\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{5},\ \frac{9}{7},\ \frac{11}{9},\ \frac{13}{11},\ \ldots$

6.5. Postupnosť je daná rekurentne nasledujúcim vzťahom $a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+1}=2a_n+a_{n-1}$. Určte prvých päť členov postupnosti.

6.6. Postupnosť je daná rekurentne $a_{n-1}=\dfrac{a_n}{n+1}$, pričom hodnotu prvého člena postupnosti udáva prirodzené číslo vyhovujúce nerovnici $\dfrac{3x-2}{4}-\dfrac{1-2x}{5}<3-\dfrac{x+1}{5}$. Určte prvých päť členov postupnosti.

6.7. Napíšte prvé štyri členy postupnosti $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

a) $a_n=2+3n$. **b)** $a_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$. **c)** $a_n=\dfrac{(n+1)(n-1)}{n}$.

d) $a_n=(-1)^n(n^2+1)$. **e)** $a_n=2^n\cdot n$. **f)** $a_n=(-1)^n\sqrt{n+1}$.

g) $a_n=\log n$. **h)** $a_n=\sin\frac{n\pi}{4}$. **i)** $a_n=\cos n\pi$.

6.8. Nájdite prvých päť členov postupnosti $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

a) $a_1=2,\ a_{n+1}=3+(-1)^n a_n$. **b)** $a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1}=2a_n$.

c) $a_1=3,\ a_2=5,\ a_{n+2}=a_n-a_{n+1}$. **d)** $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=a_n\cdot a_{n+1}$.

e) $a_2=4,\ a_{n+1}=2a_n$. **f)** $a_1=3,\ a_2=2,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n-1}}$.

g) $a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{3n-a_n{}^2}$. **h)** $a_1=3,\ a_2=2,\ a_3=1,\ a_{n+1}=2a_n-a_{n-2}$.

6.9. V postupnosti $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n=3-2n$, vypočítajte nasledujúce členy.

a) a_{n+1}. **b)** a_n+1. **c)** a_{2n-1}. **d)** $a_{2n}-1$.

e) $2a_{n-1}$. **f)** $2a_n-1$. **g)** a_{n^2}. **h)** $a_{n^2}+1$.

6.10. Dané postupnosti vyjadrite rekurentne.

a) $a_n=n(n+1)$. **b)** $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$. **c)** $a_n=4\cdot2^n$. **d)** $a_n=\log 5^n$.

Výsledky

6.1. **a)** Rastúca. **b)** Rastúca. **c)** Rastúca. **d)** Klesajúca. **e)** Rastúca. **f)** Pre $n = 1, 2, \ldots, 5$ je postupnosť klesajúca, pre $n = 5, 6, \ldots$ je rastúca. **g)** Ani rastúca, ani klesajúca. **h)** Rastúca. **i)** Rastúca.

6.2. **a)** Rastúca, ohraničená. **b)** Rastúca, zdola ohraničená. **c)** Klesajúca, zhora ohraničená.

6.3. **a)** $a_n = 3n$. **b)** $a_n = 2n + 3$. **c)** $a_n = 3n + 1$. **d)** $a_n = 2^n$.
e) Pre n párne je $a_n = 0$, pre n nepárne je $a_n = n$. **f)** $a_n = (-1)^n(2n - 1)$.

6.4. **a)** $a_n = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}$. **b)** $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{2^{n-1}}$. **c)** $a_n = \dfrac{n}{3^n}$. **d)** $a_n = \dfrac{n-3}{n+3}$.
e) $a_n = (-1)^{n+1}2^{3-n}$. **f)** $a_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$.

6.5. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, $a_5 = 12$.

6.6. $\{1, 3, 12, 60, 360\}$ alebo $\{2, 6, 24, 120, 720\}$.

6.7. **a)** $5, 8, 11, 14$. **b)** $0, 1, 3, 6$. **c)** $0, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}$. **d)** $-2, 5, -10, 17$. **e)** $2, 8, 24, 64$.
f) $-\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{4}, \sqrt{5}$. **g)** $0, \log 2, \log 3, \log 4$. **h)** $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0$. **i)** $-1, 1, -1, 1$.

6.8. **a)** $2, 1, 4, -1, 2$. **b)** $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$. **c)** $3, 5, -2, 7, -9$. **d)** $1, 2, 2, 4, 8$.
e) $2, 4, 8, 16, 32$. **f)** $3, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 3$. **g)** $1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{7}$. **h)** $3, 2, 1, -1, -4$.

6.9. **a)** $1 - 2n$. **b)** $4 - 2n$. **c)** $5 - 4n$. **d)** $2 - 4n$. **e)** $10 - 4n$. **f)** $5 - 4n$. **g)** $3 - 2n^2$.
h) $4 - 2n^2$.

6.10. **a)** $a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n}a_n$. **b)** $a_1 = \dfrac{1}{2}, a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2}a_n$. **c)** $a_1 = 8, a_{n+1} = 2a_n$.
d) $a_1 = \log 5, a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n}a_n$.

6.2 Aritmetická postupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva *aritmetická*, ak existuje také reálne číslo d, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Teda každý nasledujúci člen aritmetickej postupnosti dostaneme tak, že k danému členu pripočítame konštantu d. Číslo d sa nazýva *diferencia aritmetickej* postupnosti.

- Ak $d > 0$, tak je aritmetická postupnosť rastúca.
- Ak $d < 0$, tak je aritmetická postupnosť klesajúca.
- Ak $d = 0$, tak je aritmetická postupnosť konštantná.

Aritmetická postupnosť je jednoznačne určená prvým členom a_1 a diferenciou d.

Každý člen aritmetickej postupnosti (okrem prvého) sa rovná aritmetickému priemeru svojho predchádzajúceho a nasledujúceho člena, teda

$$a_n = \frac{1}{2}\big(a_{n-1} + a_{n+1}\big).$$

Pre n-tý člen aritmetickej postupnosti platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Pre dva ľubovoľné členy aritmetickej postupnosti platí

$$a_r = a_s + (r-s)d.$$

Súčet s_n prvých n členov aritmetickej postupnosti je

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\big[a_1 + \big(a_1 + (n-1)d\big)\big] = \frac{n}{2}\big[2a_1 + (n-1)d\big].$$

Grafom aritmetickej postupnosti je množina izolovaných bodov $[n, a_1 + (n-1)d]$, pričom tieto body ležia na priamke danej rovnicou $y = (a_1 - d) + dx$.

Príklad 6.4. *Postupnosť* $1, 4, 7, 10, \dots$ *je aritmetická, lebo každý nasledujúci člen postupnosti je o* 3 *väčší ako predchádzajúci. Diferencia tejto aritmetickej postupnosti je* $d = 3$.

Príklad 6.5. *Určme súčet prvých 15 členov aritmetickej postupnosti, ak platí* $a_2 = -5$, $a_7 = 10$.

Riešenie. Využijúc vzťah medzi druhým a siedmym členom aritmetickej postupnosti dostávame

$$a_7 = a_2 + (7-2)d.$$

Po dosadení

$$10 = -5 + 5d.$$

Odtiaľ pre diferenciu aritmetickej postupnosti platí $d = 3$.

Hodnotu prvého člena aritmetickej postupnosti určíme napríklad použitím vzťahu

$$a_2 = a_1 + (2-1)d.$$

Po dosadení dostaneme

$$\begin{aligned} -5 &= a_1 + 3 \\ a_1 &= -8. \end{aligned}$$

Podľa vzorca $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, pre súčet prvých 15 členov aritmetickej postupnosti platí

$$s_{15} = \frac{15}{2}(a_1 + a_{15}) = \frac{15}{2}\left[a_1 + \big(a_1 + (15-1)d\big)\right] = \frac{15}{2}\big(2a_1 + 14d\big) = 15(a_1 + 7d) = 15(-8 + 7 \cdot 3) = 195.$$

Príklad 6.6. *Určme aritmetickú postupnosť, pre ktorú platí* $a_2 + a_5 = 8$, $a_3 + a_7 = 14$.

Riešenie. Jednotlivé členy aritmetickej postupnosti vyjadríme pomocou prvého člena a_1 a diferencie d. Dostaneme

$$\begin{aligned} (a_1 + d) + (a_1 + 4d) &= 8 \\ (a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) &= 14. \end{aligned}$$

Po úprave

$$\begin{aligned} 2a_1 + 5d &= 8 \\ 2a_1 + 8d &= 14. \end{aligned}$$

Odčítaním týchto rovníc dostávame jednu rovnicu s jednou neznámou

$$\begin{aligned} -3d &= -6 \\ d &= 2. \end{aligned}$$

Dosadením hodnoty $d = 2$ napríklad do prvej rovnice dostávame

$$\begin{aligned} 2a_1 + 5 \cdot 2 &= 8 \\ 2a_1 + 10 &= 8 \\ 2a_1 &= -2 \\ a_1 &= -1. \end{aligned}$$

Teda prvý člen danej aritmetickej postupnosti je $a_1 = -1$ a jej diferencia je $d = 2$.

Príklad 6.7. *Pred skúškou sa študent v prvý deň naučí 15 otázok a každý ďalší deň o 3 otázky menej. Stihne sa naučiť všetkých 50 otázok za 5 dní?*

Riešenie. V prvý deň sa naučí 15 otázok, čiže $a_1 = 15$. Každý nasledujúci deň sa naučí o 3 menej, teda $d = -3$. Za 5 dní sa naučí s_5 otázok. Platí

$$s_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5) = \frac{5}{2}\big(a_1 + (a_1 + 4d)\big) = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 5(a_1 + 2d) = 5\big(15 + 2 \cdot (-3)\big) = 5 \cdot 9 = 45.$$

Za 5 dní sa študent naučí len 45 otázok, teda nestihne sa naučiť každú z 50 otázok.

Úlohy

6.11. Vypočítajte a_2, a_3, a_4, a_5 aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak platí $a_1 = 2$, $d = 5$.

6.12. Je daná aritmetická postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_3 = 6$, $d = -2$. Vypočítajte a_1, a_2, a_4.

6.13. Určte prvý člen a diferenciu aritmetickej postupnosti, ak platí $a_{14} = 140$, $s_{14} = 1050$.

6.14. Je daná aritmetická postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_1 = 1$, $a_3 = 7$. Vypočítajte a_5 a s_{10}.

6.15. Vypočítajte a_{25} a a_{100} aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v ktorej $a_8 = 6$, $a_{15} = -1$.

6.16. Je daná aritmetická postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_8 = 1$, $a_{14} = 4$. Vypočítajte s_{50}.

6.17. Nájdite súčet prvých sto nepárnych čísel.

6.18. Vypočítajte súčet všetkých dvojciferných prirodzených čísel.

6.19. Napíšte prvých šesť členov aritmetickej postupnosti, ak platí $a_1 + a_4 + a_6 = 49$, $a_5 - a_2 - a_3 = 2$.

6.20. Napíšte prvých päť členov aritmetickej postupnosti, ak platí $a_2 + a_4 = 42$, $\dfrac{a_3}{a_7} = \dfrac{3}{7}$.

6.21. Určte šesť členov klesajúcej aritmetickej postupnosti, ak súčet prostredných členov je 19 a súčin krajných je 34.

6.22. Medzi korene kvadratickej rovnice $x^2 - 6x - 27 = 0$ vložte tri čísla tak, aby spolu s nimi tvorili aritmetickú postupnosť. Napíšte tieto tri čísla.

6.23. Medzi čísla 5 a 45 vložte štyri také čísla, aby s danými číslami tvorili aritmetickú postupnosť. Určte tieto štyri čísla.

6.24. Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoria aritmetickú postupnosť. Vypočítajte jeho obvod, ak dlhšia odvesna má dĺžku 24 cm.

6.25. Uhly v trojuholníku tvoria aritmetickú postupnosť. Určte ostatné uhly, ak najväčší má veľkosť 100°.

6.26. Dĺžky hrán kvádra tvoria tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Určte ich veľkosť, ak súčet dĺžok hrán prechádzajúcich jedným vrcholom je 24 cm a objem kvádra je 384 cm^3.

6.27. Zrýchľujúce auto prejde za prvú sekundu 2 m, za každú ďalšiu sekundu prejde o 5 m viac. Akú dráhu prejde auto za 20 sekúnd?

Výsledky

6.11. $7, 12, 17, 22$.	6.12. $10, 8, 4$.	6.13. $a_1 = 10, d = 10$.
6.14. $a_5 = 13, s_{10} = 145$.	6.15. $a_{25} = -11, a_{100} = -86$.	6.16. $s_{50} = 487,5$.
6.17. 10000.	6.18. 4905.	6.19. $3, 8, 13, 18, 23, 28$.
6.20. $7, 14, 21, 28, 35$.	6.21. $17, 14, 11, 8, 5, 2$.	6.22. $0, 3, 6$.
6.23. $13, 21, 29, 37$.	6.24. 72 cm.	6.25. $20°, 60°$.
6.26. 4 cm, 8 cm, 12 cm.	6.27. 990 m.	

6.3 Geometrická postupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva *geometrická*, ak existuje také reálne číslo q, že pre všetky prirodzené čísla n platí
$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$
Teda každý nasledujúci člen geometrickej postupnosti dostaneme tak, že daný člen vynásobime konštantou q. Číslo q sa nazýva *kvocient* geometrickej postupnosti.

- Ak $q < 0$, tak dostávame geometrickú postupnosť so striedavými znamienkami. Nazývame ju tiež alternujúca postupnosť.
- Ak $0 < q < 1$ a $a_1 > 0$, tak geometrická postupnosť je klesajúca.
- Ak $0 < q < 1$ a $a_1 < 0$, tak geometrická postupnosť je rastúca.
- Ak $q > 1$ a $a_1 > 0$, tak geometrická postupnosť je rastúca.
- Ak $q > 1$ a $a_1 < 0$, tak geometrická postupnosť je klesajúca.

Geometrická postupnosť je jednoznačne určená prvým členom a_1 a kvocientom q.

Každý člen geometrickej postupnosti sa dá vyjadriť pomocou prvého člena a_1 a kvocienta q.

Absolútna hodnota každého člena geometrickej postupnosti (okrem prvého) sa rovná geometrickému priemeru jeho susedných členov, teda
$$|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}.$$

Pre n-tý člen geometrickej postupnosti platí
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Pre dva ľubovoľné členy geometrickej postupnosti platí
$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}.$$

Súčet s_n prvých n členov geometrickej postupnosti je
$$\begin{aligned} s_n &= a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, && \text{pre } q \neq 1, \\ s_n &= n a_1, && \text{pre } q = 1. \end{aligned}$$

Ak $q > 0$, $q \neq 1$, tak grafom geometrickej postupnosti je množina izolovaných bodov $[n, a_1 \cdot q^{n-1}]$. Tieto body ležia na exponenciálnej krivke, ktorá je daná predpisom $y = a_1 \cdot q^{x-1}$.

Príklad 6.8. *Postupnosť $1, 3, 9, 27, \ldots$ je geometrická, lebo každý nasledujúci člen postupnosti je 3 krát väčší ako predchádzajúci. Jej kvocient je $q = 3$.*

Príklad 6.9. *Je daná geometrická postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_3 = 9$, $q = 3$. *Vypočítajme* a_1, a_2, a_4, a_5.

Riešenie. Pre tretí člen a_3 geometrickej postupnosti platí

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ 9 &= a_1 \cdot 3^2 \\ 9 &= a_1 \cdot 9 \\ a_1 &= 1. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q = 1 \cdot 3 = 3, \\ a_4 &= a_1 \cdot q^3 = 1 \cdot 3^3 = 27, \\ a_5 &= a_1 \cdot q^4 = 1 \cdot 3^4 = 81. \end{aligned}$$

•

Príklad 6.10. *Napíšme prvých sedem členov geometrickej postupnosti, ak platí* $a_3 = 8, a_7 = 128$.

Riešenie. Medzi siedmym a tretím členom geometrickej postupnosti platí vzťah

$$a_7 = a_3 \cdot q^{7-3}.$$

Po dosadení dostávame

$$\begin{aligned} 128 &= 8 \cdot q^4 \\ 16 &= q^4 \\ (\pm 2)^4 &= q^4 \\ q &= \pm 2. \end{aligned}$$

Hodnotu a_1 vypočítame napríklad pomocou vzťahu

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ 8 &= a_1 \cdot (\pm 2)^2 \\ 8 &= a_1 \cdot 4 \\ a_1 &= 2. \end{aligned}$$

Zadaniu vyhovujú dve geometrické postupnosti, ktorých prvých sedem členov je $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$, pre $q = 2$, alebo $\{2, -4, 8, -16, 32, -64, 128\}$ pre $q = -2$.

•

Príklad 6.11. *Určme* q *a* a_6 *v geometrickej postupnosti, v ktorej platí* $a_1 = 4$, $s_3 = 84$.

Riešenie. Pre s_3 platí $s_3 = a_1 \dfrac{q^3 - 1}{q - 1}$. Teda

$$\begin{aligned} 84 &= 4 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \\ 21 &= \frac{(q-1)(q^2 + q + 1)}{q - 1} \\ 21 &= q^2 + q + 1 \\ 0 &= q^2 + q - 20 \\ 0 &= (q - 4)(q + 5). \end{aligned}$$

Korene tejto kvadratickej rovnice sú $q_1 = 4$ a $q_2 = -5$.

Ak $q_1 = 4$, tak 6-ty člen geometrickej postupnosti je

$$a_6 = a_1 \cdot q_1^5 = 4 \cdot 4^5 = 4096.$$

Ak $q_2 = -5$, tak 6-ty člen geometrickej postupnosti je

$$a_6 = a_1 \cdot q_2^5 = 4 \cdot (-5)^5 = -12500.$$

•

Aplikácia geometrickej postupnosti.
Ako príklad využitia geometrickej postupnosti v praxi uvedieme tzv. *zložené úrokovanie.* Používa sa hlavne vo finančníctve, ale nie len tam. Jedná sa o úlohy, v ktorých sa nejaká veličina (množstvo peňazí na bankovom konte, počet obyvateľov v meste, ...) pravidelne zvyšuje, resp. znižuje zo základnej hodnoty.

Označme N_0 začiatočnú (základnú) hodnotu nejakej veličiny, N jej výslednú hodnotu, p počet percent, o ktoré začiatočná hodnota za dané obdobie vzrastie alebo poklesne, n počet období, za ktoré vzrast alebo pokles prebieha. Potom platí

$$N = N_0 \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n.$$

Príklad 6.12. *Na akú dobu je potrebné vložiť do banky 10 000 €, aby sa táto suma zdvojnásobila pri 5% zloženom úrokovaní?*

Riešenie. Zo zadania $N_0 = 10\ 000$, $p = 5$, $N = 20\ 000$. Cieľom úlohy je určiť n. Využijúc vzorec pre zložené úrokovanie dostávame

$$\begin{aligned} N &= N_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ \frac{N}{N_0} &= \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ \ln \frac{N}{N_0} &= \ln \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \\ \ln \frac{N}{N_0} &= n \ln \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ n &= \frac{\ln \frac{N}{N_0}}{\ln \left(1 + \frac{p}{100}\right)} \\ n &= \frac{\ln \frac{20000}{10000}}{\ln \left(1 + \frac{5}{100}\right)} \approx 14,2. \end{aligned}$$

Pre zdvojnásobenie vloženej sumy je potrebné vložiť do banky 10 000 € pri 5% zloženom úrokovaní na 14,2 roka.

•

Úlohy

6.28. Určte a_3, a_4, a_5, a_6 geometrickej postupnosti, ak platí $a_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$.

6.29. Určte prvý člen a kvocient geometrickej postupnosti, v ktorej platí $a_3 = 8$, $s_3 = 14$.

6.30. Geometrická postupnosť je daná dvoma členmi $a_1 = 1$, $a_4 = \frac{1}{8}$. Vypočítajte a_{10} a s_5.

6.31. Daná je geometrická postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_5 = 1$, $a_{10} = 243$. Vypočítajte s_{10}.

6.32. Určte prvý člen a kvocient geometrickej postupnosti, ak platí $3a_3 + 7a_2 = 10$, $3a_1 + 2a_2 = 5$.

6.33. Medzi korene kvadratickej rovnice $x^2 - 51x + 144 = 0$ vložte jedno číslo tak, aby spolu tvorili geometrickú postupnosť. Napíšte, ktoré číslo je potrebné vložiť.

6.34. Napíšte prvé štyri členy geometrickej postupnosti, pre ktorú platí $a_1 + a_3 = \dfrac{10}{9}$, $\dfrac{a_4}{a_2} = 9$.

6.35. Určte osemčlennú geometrickú postupnosť, ak súčet dvoch prostredných členov je 6 a súčin dvoch krajných členov je 5.

6.36. V geometrickej postupnosti platí $a_1 = 1$, $q = \sqrt{2}$, $a_n = 32$. Určte n.

6.37. Určte prvý člen a kvocient geometrickej postupnosti, ak platí $a_1 + a_4 = 18$, $a_2 + a_3 = 12$.

6.38. Medzi čísla 3 a 18 vložte dve čísla tak, aby v danej pätici čísel prvé tri tvorili geometrickú postupnosť a posledné tri aritmetickú postupnosť. Napíšte vložené čísla.

6.39. Medzi korene rovnice $x^2 - 9x + 8 = 0$ vložte dve čísla tak, aby vznikli štyri za sebou idúce členy geometrickej postupnosti. Napíšte danú štvoricu čísel.

6.40. Za prvý deň práce dostane zamestnanec 1 €, za druhý deň 2 €, za tretí deň 4 €. Koľko dní musí pracovať, aby zarobil 511 €?

6.41. Kváder, ktorého dĺžky hrán tvoria geometrickú postupnosť má povrch 78 cm^2. Súčet dĺžok hrán prechádzajúcich jedným vrcholom je 13 cm. Určte objem kvádra.

6.42. Dĺžky strán trojuholníka a, b, c v tomto poradí, tvoria tri za sebou idúce členy geometrickej postupnosti. Určte a a c, ak $b = 8$ cm a obvod trojuholníka je 42 cm.

6.43. Koľko našetríme za 14 rokov pri 3% zloženom úrokovaní, ak vložíme do banky 1 000 €?

6.44. O koľko percent ročne je potrebné počas piatich rokov zvyšovať výrobu, aby sa za päť rokov pri konštantnom percentuálnom prírastku zvýšila trojnásobne?

6.45. Súčasné náklady na výrobu určitého výrobku sú 300 €. Za akú dobu sa náklady zmenšia na tretinu, ak každoročne klesnú o 15%?

6.46. Aký musí byť ročný percentuálny prírastok pri zloženom úrokovaní, aby vklad 500 € vzrástol za 3 roky o tretinu?

6.47. V meste, ktoré má 100 000 obyvateľov, je ročný prírastok 42 obyvateľov na 1 000 obyvateľov. Koľko obyvateľov bude mať toto mesto po 10 rokoch odteraz?

6.48. Pri prechode sklenenou doskou stráca svetlo 6% svojej intenzity. Koľko takých dosiek treba na seba položiť, aby sa intenzita svetla stlmila na polovicu?

Výsledky

6.28. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$.

6.29. $a_1 = 2, q = 2$ alebo $a_1 = 18, q = -\frac{2}{3}$.

6.30. $a_{10} = \frac{1}{512}, s_5 = \frac{31}{16}$.

6.31. $s_{10} = \frac{29524}{81}$.

6.32. $a_1 = 5, q_1 = 1$, alebo $a_1 = \frac{5}{7}, q_2 = -2$.

6.33. 12 alebo -12.

6.34. $\{\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3\}$ alebo $\{\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, -3\}$.

6.35. $\{\frac{1}{125}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, 25, 125, 625\}$.

6.36. 11.

6.37. $a_1 = 2, q = 2$ alebo $a_1 = 16, q = \frac{1}{2}$.

6.38. $6, 12$ alebo $-\frac{9}{2}, \frac{27}{4}$.

6.39. $1, 2, 4, 8$.

6.40. Deväť dní.

6.41. 27 cm^3.

6.42. $a = 2$ cm, $c = 32$ cm.

6.43. 1 512, 59 €.

6.44. 24, 57%.

6.45. 6, 76 rokov.

6.46. 10, 06%.

6.47. 150 895 obyvateľov.

6.48. 11 dosiek.

6.4 Nekonečný rad a jeho súčet

Nech $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ sú členy geometrickej postupnosti. Potom výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

nazývame *nekonečný geometrický rad.*

Pre súčet s nekonečného geometrického radu platí

$$s = \frac{a_1}{1-q}, \qquad \text{pričom } |q| < 1.$$

Príklad 6.13. *Vypočítajme súčet nekonečného geometrického radu* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

Riešenie. Keďže $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, pre kvocient geometrickej postupnosti platí

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

Teda súčet daného nekonečného geometrického radu je

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Príklad 6.14. *Vyriešme nasledujúcu rovnicu a určme podmienku, kedy existuje súčet nekonečného v geometrického radu*

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \cdots = \frac{3x-1}{2}.$$

Riešenie. Zo zadania je zrejmé, že $a_1 = \dfrac{x}{2}$, $a_2 = \dfrac{x^2}{4}$, teda

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2}.$$

Aby existoval súčet nekonečného geometrického radu, musí byť splnená podmienka

$$|q| < 1,$$

čiže

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{2}\right| &< 1 \\ |x| &< 2 \\ -2 < x &< 2. \end{aligned}$$

Súčet nekonečného geometrického radu je

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{2-x}{2}} = \frac{x}{2-x}.$$

Zo zadania je súčet daného nekonečného geometrického radu rovný $\dfrac{3x-1}{2}$. Teda riešime rovnicu

$$\begin{aligned} \frac{x}{2-x} &= \frac{3x-1}{2} \\ 2x &= (3x-1)(2-x) \\ 2x &= 6x - 2 - 3x^2 + x \\ 3x^2 - 5x + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Riešenie tejto kvadratickej rovnice nájdeme napríklad pomocou diskriminantu, pričom $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$.

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1.$$

Pre korene dostávame

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} \dfrac{5+1}{6} = \dfrac{6}{6} = 1, \\ \dfrac{5-1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Obidva korene splňajú podmienku $-2 < x < 2$, teda riešením rovnice zo zadania sú čísla $1, \frac{2}{3}$.

Úlohy

6.49. Vypočítajte súčet nekonečného geometrického radu.

a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$ **b)** $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \cdots$ **c)** $\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \frac{81}{256} + \cdots$

d) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$ **e)** $\frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{8}{75} + \frac{16}{375} + \cdots$ **f)** $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$

6.50. Vyriešte rovnice a určte podmienku, kedy existuje súčet nekonečného geometrického radu.

a) $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **b)** $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \cdots = \frac{4x-3}{3x-4}$.

c) $1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \cdots = \frac{8}{x+10}$. **d)** $1^x + 2^x + 4^x + 8^x + \cdots = 2$.

6.51. Prvé dva členy nekonečného geometrického radu sú $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$. Určte jeho súčet.

6.52. Určte hodnotu súčinu $x \cdot \sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[16]{x^3} \ldots$

6.53. Vyriešte rovnicu $x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + \cdots = \frac{5}{3}$.

6.54. Vyriešte rovnicu $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{9} + \frac{x}{16} + \frac{x}{27} + \cdots = 2x^2 - \frac{7x}{2} + 2$.

Výsledky

6.49. **a)** $\frac{3}{2}$. **b)** 6. **c)** 3. **d)** $\frac{2}{3}$. **e)** $\frac{10}{9}$. **f)** $\frac{3}{2}$.

6.50. **a)** $x = \sqrt{2} - 1,\ x \in (-1, 1)$. **b)** $x = 6,\ x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

c) $x = -6, x = 4, x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. **d)** $x = -1, x \in (-\infty, 0)$.

6.51. 3.

6.52. x^4.

6.53. $\frac{1}{2}, -\frac{5}{7}$.

6.54. $\frac{1}{2}, 2$.

6.5 Testy

6.5.1 Test 1

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

6.1. Rozhodnite, ktoré tvrdenie o postupnosti $\left\{\dfrac{n+3}{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty}$ je pravdivé.

A) Nie je rastúca, nie je klesajúca. **B)** Je rastúca a zhora ohraničená.

C) Je rastúca a zhora neohraničená. **D)** Je klesajúca a ohraničená.

6.2. Rozhodnite, ktorá z uvedených postupností je aritmetická.

A) $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{11}, \dots$ **B)** $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots$

C) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{9}, \dots$ **D)** $\dfrac{1}{17}, -\dfrac{1}{17}, -\dfrac{3}{17}, -\dfrac{5}{17}, \dots$

6.3. Turista prešiel za prvý deň 26 km. Ak zvyšuje svoj výkon denne o jeden kilometer, tak za 18 dní prejde

A) 621 km. **B)** 347 km. **C)** 633 km. **D)** 584 km.

6.4. Pre geometrickú postupnosť platí $a_2 - a_1 = 15$ a $a_3 - a_2 = 60$. Určte súčet s_4.

A) 425. **B)** 524. **C)** 254. **D)** 422.

6.5. Množstvo dreva v lese sa odhaduje na 20 000 m^3 a jeho priemerný ročný prírastok na 2,5%. Určte, za akú dobu sa pôvodné množstvo dreva, bez ťažby, zvýši o 10 000 m^3.

A) 2 roky. **B)** 25 rokov. **C)** $15,7$ rokov. **D)** $16,42$ rokov.

Správne odpovede: D, D, A, A, D.

6.5.2 Test 2

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

6.1. Pre aritmetickú postupnosť platí $s_n = n^2$. Určte piaty člen postupnosti a_5.

A) 3. **B)** 5. **C)** 9. **D)** 25.

6.2. Pre aritmetickú postupnosť platí $a_1 = 4$ a $s_5 = -10$. Určte diferenciu d.

A) 3. **B)** -3. **C)** -2. **D)** -1.

6.3. Pre geometrickú postupnosť platí $a_2 = 3$ a $a_5 = 81$. Určte súčet s_5.

A) 243. **B)** 121. **C)** 363. **D)** 120.

6.4. Ak medzi korene kvadratickej rovnice $x^2 - 11x - 26 = 0$ vložíme dve čísla, tak vznikne aritmetická postupnosť. Určte súčet vložených čísel.

A) 11. **B)** -11. **C)** 26. **D)** 24.

6.5. V prvý deň dovolenky minie dovolenkár 2 €, každý ďalší deň minie dvojnásobok sumy z predchádzajúceho dňa. Koľko eur minie za 10 dní dovolenky?

A) 20 €. **B)** 2046 €. **C)** 1024 €. **D)** 200 €.

Správne odpovede: C, B, B, A, B.

6.5.3 Test 3

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

6.1. Rozhodnite, ktoré tvrdenie o postupnosti $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=2}^{\infty}$ je pravdivé.

A) Nie je rastúca ani klesajúca.

B) Je klesajúca a zhora ohraničená.

C) Je rastúca a zhora neohraničená.

D) Je rastúca a ohraničená.

6.2. Rozhodnite, ktorá z uvedených postupností je geometrická.

A) $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

B) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

C) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, \dots$

D) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

6.3. Pre aritmetickú postupnosť platí $s_n = \dfrac{5n^2 - 15n}{2}$. Určte tretí člen postupnosti a_3.

A) 3. **B)** -3. **C)** 0. **D)** 5.

6.4. Súčet všetkých dvojciferných čísel deliteľných číslom 5 je

A) 500. **B)** 555. **C)** 945. **D)** 955.

6.5. Pre geometrickú postupnosť platí $a_1 = \frac{1}{2}$ a $q = 3$. Určte n, ak $s_n = 20$.

A) 2. **B)** 4. **C)** 5. **D)** 6.

Správne odpovede: D, A a D, D, C, B.

6.5.4 Test 4

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

6.1. Ak medzi korene kvadratickej rovnice $x^2 - 165x + 800 = 0$ vložíme štyri čísla, vznikne rastúca geometrická postupnosť, ktorej kvocient q je

A) 5. **B)** -5. **C)** 2. **D)** 4.

6.2. Pre aritmetickú postupnosť platí $a_2 = -5$ a $a_7 = 10$. Určte súčet s_{10}.

A) 10. **B)** 55. **C)** -55. **D)** 50.

6.3. Pre rastúcu geometrickú postupnosť platí $a_2 + a_4 = 90$ a $a_1 \cdot a_3 = 81$. Prvé tri členy tejto postupnosti sú

A) $3, 9, 27$. **B)** $-27, -9, -3$. **C)** $1, 3, 9$. **D)** $-3, 9, -27$.

6.4. Určte n-tý člen postupnosti $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \cdots$

A) $a_n = \frac{2n+1}{n^2}$. **B)** $a_n = \frac{n+1}{n^2}$. **C)** $a_n = (n+1) \cdot n^2$. **D)** $a_n = \frac{2n+1}{2n+3}$.

6.5. Za prvý mesiac dostane zamestnanec odmenu 10 €, každý ďalší mesiac o 15 € viac. Po koľkých mesiacoch bude jeho odmena 100 €.

A) 7. **B)** 10. **C)** 6. **D)** 5.

Správne odpovede: C, B, A, B, A.

7 Kombinatorika

Zaoberajme sa výberom k-členných skupín prvkov z n-prvkovej množiny, pričom budeme rozlišovať, či v týchto skupinách

- *záleží* na poradí prvkov (vtedy hovoríme o variáciách a permutáciách),
- *nezáleží* na poradí prvkov (v tomto prípade sa jedná o kombinácie).

Okrem toho budeme rozlišovať, či sa vo výbere prvky budú alebo nebudú opakovať.

7.1 Variácie

7.1.1 Variácie bez opakovania

Variácia k-tej triedy z n prvkov bez opakovania je každá *usporiadaná k-tica* vytvorená z týchto n prvkov, pričom sa žiaden prvok v k-tici neopakuje, $0 \leq k \leq n$.

Teda z množiny n prvkov vyberáme k prvkov, pričom záleží na ich poradí a prvky sa neopakujú.

Označenie: $V(k,n)$

Počítame:

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Symbolom $n!$ (čítame n faktoriál) označujeme faktoriál prirodzeného čísla n. Ide o súčin všetkých kladných prirodzených čísel menších alebo rovných n. Teda

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Platí

$$0! = 1.$$

Teda
$1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24, \cdots$

Priamo z definície n faktoriálu dostávame

$$n! = n \cdot (n-1)!.$$

Napríklad $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4!$.

Príklad 7.1. *Určme počet variácií druhej triedy z piatich prvkov bez opakovania.*

Riešenie. Použijeme vzorec $V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$, pričom $n = 5$, $k = 2$. Teda

$$V(2,5) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20.$$

Počet variácií druhej triedy z piatich prvkov bez opakovania je 20. •

Príklad 7.2. *Koľko trojciferných čísel môžeme vytvoriť z cifier $2, 3, 4, 7$, ak sa cifry nesmú opakovať?*

Riešenie. Vytvárame trojice zo štvorprvkovej množiny, pričom záleží na poradí prvkov a prvky sa nesmú opakovať. Jedná sa teda o variácie tretej triedy zo štyroch prvkov bez opakovania. Dosadením do vzorca dostávame

$$V(3,4) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{24}{1} = 24.$$

Z cifier $2, 3, 4, 7$ možno vytvoriť 24 trojciferných čísel, ak sa cifry nesmú opakovať.

Príklad je možné vyriešiť aj bez použtia vzorca. Stačí si uvedomiť, že cifru, ktorú použijeme na mieste stoviek vyberáme zo štyroch cifier, teda máme na jej výber štyri možnosti. Keďže jednu cifru sme už použili, na mieste desiatok sa môže nachádzať len jedna z troch cifer. Po tomto výbere sme už použili dve cifry zo štyroch. Teda ostávajú nepoužité dve cifry, pričom každú z nich môžeme použiť na mieste jednotiek. Teda počet hľadaných čísel je

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Príklad 7.3. *Na turnaji sa zúčastní 10 družstiev. Koľko rôznych umiestnení môže byť na prvých troch miestach?*

Riešenie. Keďže záleží na poradí a prvky sa nesmú opakovať, jedná sa o variácie tretej triedy z desiatich prvkov bez opakovania, t. j.

$$V(3,10) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720.$$

Na stupni víťazov môže stáť 720 rôznych výťazných trojíc.

Vyriešme teraz príklad bez použitia vzorca. Na prvom mieste môže skončiť jedno z desiatich družstiev. Teda na druhom mieste môže skončiť ľubovoľné z deviatich družstiev. Keďže poradie na prvých dvoch miestach je už teraz určené, na treťom mieste sa môže umiestniť niektoré z ôsmych družstiev. Teda počet rôznych výťazných trojíc vypočítame ako

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

7.1.2 Variácie s opakovaním

Variácia k-tej triedy z n prvkov s opakovaním je každá *usporiadaná k-tica* vytvorená z týchto n prvkov, pričom sa prvky môžu v k-tici ľubovoľne opakovať.

Teda z množiny n prvkov vyberáme k prvkov, pričom záleží na ich poradí a prvky sa môžu opakovať.

Označenie: $V'(k,n)$

Počítame:

$$V'(k,n) = n^k.$$

Príklad 7.4. *Koľko dvojciferných čísel možno vytvoriť z cifier $7, 8, 9$?*

Riešenie. Vytvárame usporiadané dvojice z troch prvkov, pričom sa prvky môžu opakovať. Dosadením do vzorca pre výpočet variácií s opakovaním dostávame

$$V'(2,3) = 3^2 = 9.$$

Z cifier $7, 8, 9$ je možné vytvoriť deväť dvojciferných čísel. Sú to tieto čísla: 77, 78, 79, 87, 88, 89, 97, 98, 99.

Ak by sme chceli vyriešiť príklad bez použitia vzorca, stačí si uvedomiť, že na mieste desiatok sa môže nachádzať ľubovoľná cifra z troch. Keďže sa cifry môžu opakovať, tak aj pre výber cifry na mieste jednotiek máme tri možnosti. Teda počet dvojciferných čísel, ktoré možno vytvoriť z troch rôznych cifier vypočítame ako

$$3 \cdot 3 = 9.$$

Príklad 7.5. *Koľko je rôznych šesťmiestnych telefónnych čísel? Koľko z nich je takých, ktoré sa nezačínajú nulou?*

Riešenie. Počet všetkých šesťmiestnych telefónnych čísel určíme ako počet variácií šiestej triedy z desiatich prvkov s opakovaním. Platí

$$V'(6,10) = 10^6 = 1\ 000\ 000.$$

Počet všetkých šesťmiestnych telefónnych čísel je milión.

Počet šesťmiestnych čísel, ktoré sa začínajú nulou určíme ako počet variácií piatej triedy z desiatich prvkov s opakovaním, keďže je známe číslo na začiatku a meniť sa môže len zvyšných päť čísel.

$$V'(5,10) = 10^5.$$

Rozdiel počtu všetkých šesťmiestnych čísel a počtu šesťmiestnych čísel začínajúcich sa nulou dáva počet šesťmiestnych čísel nezačínajúcich sa nulou. Teda

$$V'(6,10) - V'(5,10) = 10^6 - 10^5 = 900\ 000.$$

Počet šesťmiestnych čísel, ktoré sa nezačínajú nulou je 900 000.

Vypočítajme teraz počet šesťmiestnych čísel nezačínajúcich sa nulou bez použitia vzorca. Na prvom mieste sa môže nachádzať ľubovoľná cifra z množiny $\{1, 2, \dots, 9\}$. Teda na jej výber mame deväť možností. Na druhom mieste sa už môže nachádzať ľubovoľná cifra z desiatich. To isté platí pre cifru, na treťom až šiestom mieste, keďže cifry sa môžu opakovať. Teda počet šesťmiestnych čísel nezačínajúcich sa nulou môžeme vypočítať ako

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 900\ 000.$$

•

Príklad 7.6. *Koľko je párnych trojciferných čísel vytvorených z cifier* $4, 7, 8, 9$*?*

Riešenie. Párne čísla vytvorené z týchto cifier musia mať na konci číslicu 4 alebo 8. To znamená, že vytvárame dvojciferné čísla z cifier $4, 7, 8, 9$. Pre $n = 4$, $k = 2$ platí

$$V'(2,4) = 4^2 = 16.$$

Ak k týmto číslam pripíšeme na koniec cifru 4 alebo 8, vzniknú tak párne trojciferné čísla, ktoré možno vytvoriť z daných cifier. Teda ich počet je $16 \cdot 2 = 32$.

Sú to tieto čísla: $444, 474, 484, 494, 744, 774, 784, 794, 844, 874, 884, 894, 944, 974, 984, 994, 448, 478, 488, 498, 748, 778, 788, 798, 848, 878, 888, 898, 948, 978, 988, 998$. •

Úlohy

7.1. Sú dané cifry 1, 2, 3, 4, 5, 8. Koľko dvojciferných, štvorciferných a päťciferných čísel z nich možno vytvoriť, ak sa cifry nesmú opakovať?

7.2. Koľko je párnych prirodzených čísel, v zápise ktorých sa vyskytujú iba cifry 2, 5, 6, 7 a to najviac jedenkrát?

7.3. Koľko je štvorciferných čísel s rôznymi ciframi, ktoré môžete zostaviť z cifier 1, 2, 3, 5, 7, 9? Koľko z nich je deliteľných číslom 5? Koľko z nich je nepárnych?

7.4. Koľko prirodzených čísel väčších ako 500 možno napísať pomocou číslic 1, 3, 4, 5, 7, ak sa žiadna číslica neopakuje?

7.5. Koľko je všetkých štvorciferných prirodzených čísel?

7.6. Koľko je päťciferných čísel, ktoré obsahujú len číslice 1, 3?

7.7. Koľko päťciferných čísel možno vytvoriť z cifier 1, 2, 4, 7?

7.8. Koľko prirodzených čísel menších ako 300 možno vytvoriť z cifier 1, 2, 4, 5, 7?

7.9. Koľko štvormiestnych číselných kódov možno vytvoriť, ak kód nesmie zažínať nulou? Koľko ich bude v prípade, ak má kód začínať párnym číslom?

7.10. Koľko je prvkov, ak počet variácií bez opakovania tretej triedy z týchto prvkov je štyridsaťdvakrát menší ako počet variácií piatej triedy bez opakovania z tých istých prvkov?

7.11. Vyriešte rovnicu $V(2, n) = 132$.

7.12. Ak sa zmenší počet prvkov o 27, zmenší sa počet variácií druhej triedy bez opakovania vytvorených z týchto prvkov 10-krát. Aký je pôvodný počet prvkov?

7.13. Z koľkých prvkov možno utvoriť 343 variácií tretej triedy s opakovaním?

7.14. Koľko rôznych signálov možno vytvoriť použitím jedného až troch znakov Morseovej abecedy?

7.15. Vyriešte rovnicu $V'(4,n) - 4V'(2,n) = 1152$.

7.16. Ak sa počet prvkov zväčší o 2, zväčší sa počet variácií s opakovaním druhej triedy o 16. Aký je pôvodný počet prvkov?

7.17. Koľko je prvkov, ak je počet variácií s opakovaním 2. triedy z týchto prvkov stokrát menší ako počet variácií s opakovaním 4. triedy z tých istých prvkov?

Výsledky

7.1. $30, 360, 720$.	7.2. 32.	7.3. $360, 60, 300$.	7.4. 264.
7.5. 9000.	7.6. 32.	7.7. 1024.	7.8. 80.
7.9. $9000, 5000$.	7.10. 10.	7.11. 12.	7.12. 40.
7.13. 7.	7.14. 14.	7.15. 6.	7.16. 3.
7.17. 10.			

7.2 Permutácie

7.2.1 Permutácie bez opakovania

Permutácia n prvkov bez opakovania je každá *usporiadaná n-tica* prvkov vytvorené z n prvkovej množiny, pričom sa žiaden prvok v n-tici neopakuje. Ide teda o variáciu n-tej triedy z n prvkov bez opakovania.

Teda z množiny n prvkov vyberáme n prvkov, záleží na ich poradí a prvky sa neopakujú.

Označenie: $P(n)$

Počítame:

$$P(n) = V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Príklad 7.7. *Koľkými spôsobmi môžeme vedľa seba uložiť sedem rôznych kníh?*

Riešenie. Máme uložiť sedem rôznych kníh, to známená, že zaleží na poradí, ide teda o permutácie, kde $n = 7$. Dosadením do vzorca dostávame

$$P(7) = 7! = 5040.$$

Sedem rôznych kníh môžeme vedľa seba uložiť 5040 rôznymi spôsobmi. •

Príklad 7.8. *Koľkými spôsobmi môžeme usadiť za stôl päť hostí, z ktorých dvaja sú manželia a chcú sedieť vedľa seba?*

Riešenie. To, že z piatich hostí sú dvaja manželia, ktorí chcú sedieť vedľa seba znamená, že túto manželskú dvojicu môžeme považovať za jeden prvok. Máme teda celkovo štyri prvky, ktoré vieme usadiť

$$P(4) = 4! = 24 \text{ spôsobmi.}$$

V každom z týchto 24 rozsadení možno ešte manželskú dvojicu usadiť

$$P(2) = 2! = 2 \text{ spôsobmi.}$$

Teda celkový počet rôznych rozsadení je

$$24 \cdot 2 = 48.$$

Päť hostí, z ktorých dvaja sú manželia a chcú sedieť vedľa seba, je možné usadiť 48 spôsobmi. •

Príklad 7.9. *Koľko je 9-ciferných prirodzených čísel, ktoré majú všetký cifry navzájom rôzne a nula sa tam nenachádza?*

Riešenie. Počet cifier rôznych od nuly je 9. Počítame teda permutácie 9 prvkov bez opakovania.

$$P(9) = 9! = 362\ 880.$$

Počet 9-ciferných prirodzených čísel neobsahujúcich nulu, pričom sa cifry neopakujú, je 362 880. •

7.2.2 Permutácie s opakovaním

Permutácia n prvkov s opakovaním je každé usporiadanie $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ prvkov, kde n je počet prvkov uvažovanej množiny, v ktorej je n_1 prvkov prvého druhu, n_2 prvkov je druhého druhu, ... a n_k prvkov je k-teho druhu, pričom sa prvky môžu v n-tici ľubovoľne opakovať.

Označenie: $P'_{n_1,n_2,\ldots,n_k}(n)$

Počítame:

$$P'_{n_1,n_2,\ldots,n_k}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!}.$$

Príklad 7.10. *Koľko rôznych permutácií môžeme vytvoriť zo slova MATEMATIKA?*

Riešenie. Slovo MATEMATIKA sa skladá z desiatich písmen, z toho sa niektoré opakujú. Teda $n = 10$, $n_M = 2$, $n_A = 3$, $n_T = 2$, $n_E = 1$, $n_I = 1$, $n_K = 1$. Dosadením do vzorca dostávame

$$P'_{2,3,2,1,1,1}(10) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{3628800}{2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 151\ 200.$$

Zo slova MATEMATIKA môžeme vytvoriť 151 200 permutácií. •

Príklad 7.11. *Koľkými možnými spôsobmi môžeme do chladničky vedľa seba uložiť tri malinovky, štyri minerálky a dva džúsy?*

Riešenie. Máme prvky troch druhov, prvého druhu „malinovka“ sú 3 prvky, druhého druhu „minerálka“ 4 prvky a tretieho druhu „džús“ 2 prvky. Teda $n = 9$, $n_1 = 3$, $n_2 = 4$, $n_3 = 2$.

$$P'_{3,4,2}(9) = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4!} = 1260.$$

Dané nápoje je možné uložiť 1260 spôsobmi. •

Príklad 7.12. *Koľko rôznych, aj nezmyselných, päťpísmenových slov môžeme vytvoriť z písmen A, A, A, M, M?*

Riešenie. Máme päť písmen, z toho tri A a dve M. Teda $n = 5$, $n_M = 2$, $n_A = 3$.

$$P'_{2,3}(5) = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = 10.$$

Z daných písmen možno vytvoriť desať rôznych, aj nezmyselných, päťpísmenových slov. •

Úlohy

7.18. Koľkými spôsobmi možno vedľa seba uložiť 5 rôznych kníh?

7.19. Koľkými spôsobmi možno rozdeliť 4 účastníkov finále v behu na 100 m do 4 dráh?

7.20. Koľkými spôsobmi možno posadiť do jedného radu 8 rôznych okrasných kríkov?

7.21. Koľkými spôsobmi môže predajca vystaviť 7 rôznych áut istej značky?

7.22. Koľko trojciferných prirodzených čísel možno vytvoriť z cifier 4, 5, 6?

7.23. Z koľkých prvkov možno vytvoriť 40320 permutácií?

7.24. Ak sa zväčší počet prvkov o dva, zväčší sa počet permutácií dvanásťkrát. Aký je pôvodný počet prvkov?

7.25. Vyriešte rovnicu $P(n+1) - 4P(n) = 0$.

7.26. Upravte $P(n+2) - 2P(n)$.

7.27. Vyriešte rovnicu $P(n+2) - 3P(n+1) - 8P(n) = 0$.

7.28. Koľko rôznych, aj nezmyselných, slov sa dá vytvoriť zo slova KASKADÉR?

7.29. Koľko rôznych, aj nezmyselných, slov možno vytvoriť z písmen E, E, K, K?

7.30. Koľkými spôsobmi môžno uložiť dva rovnaké biele svetre, dva rovnaké červené svetre a jeden modrý sveter?

7.31. Koľkými spôsobmi možno navliecť na niť 5 červených, 7 bielych a 4 zelené korálky?

7.32. Koľkými spôsobmi možno uložiť 3 rovnaké učebnice matematiky a 6 rovnakých učebníc fyziky?

7.33. Koľko rôznych osempísmenových slov, aj nezmyselných, možno vytvoriť z troch písmen A, troch písmen B a dvoch písmen C?

7.34. V predajni áut je potrebné rozostaviť vedľa seba 3 Mercedesy, 2 BMV a 2 autá značky Volvo. Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť? Koľko ich je, ak autá rovnakej značky stoja vedľa seba?

7.35. Upravte $P'_{2,3}(5) - P'_{1,4}(5)$.

7.36. Vyriešte rovnicu $x^2 \cdot P'_{1,2,3}(6) - x \cdot P'_{2,3}(5) - 10 = 0$.

Výsledky

7.18.	120.	7.19.	24.	7.20.	40320.	7.21.	5040.
7.22.	6.	7.23.	8.	7.24.	2.	7.25.	3.
7.26.	$n(n+3)n!$.	7.27.	3.	7.28.	10080.	7.29.	6.
7.30.	30.	7.31.	1441440.	7.32.	84.	7.33.	560.
7.34.	$210, 6$.	7.35.	5.	7.36.	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$.		

7.3 Kombinácie, binomická veta

7.3.1 Kombinácie bez opakovania

Kombinácia k-tej triedy z n prvkov bez opakovania je každá *k-prvková* podmnožina z n prvkovej množiny, pričom sa žiaden prvok v k-tici neopakuje, $0 \leq k \leq n$.

Teda z množiny n prvkov vyberáme k prvkov, pričom nezáleží na ich poradí a prvky sa neopakujú.

Označenie: $C(k, n)$

Počítame:

$$C(k, n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!},$$

kde $\binom{n}{k}$ je kombinačné číslo. Tento zápis čítame n nad k.

Základné vlastnosti kombinačných čísel. Pre všetky prirodzené čísla n, k, $0 \leq k \leq n$, platí:

- $\binom{n}{0} = 1$,
- $\binom{n}{1} = n$,

- $\binom{n}{n} = 1,$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

Pascalov trojuholník je schéma kombinačných čísel. Z vlastností kombinačných čísel dostávame, že krajné čísla sú 1 a každé ďalšie číslo v schéme sa rovná súčtu dvoch čísel nachádzajúcich sa bezprostredne nad ním.

$$\begin{array}{lccccccc}
n=0: & \binom{0}{0} & & & & & & \\
n=1: & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
n=2: & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
n=3: & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
n=4: & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
n=5: & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
n=6: & \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Príklad 7.13. *Koľkými priamkami môžeme spojiť* 15 *bodov, ak žiadne tri body neležia na jednej priamke?*

Riešenie. Priamka je jednoznačne určená dvoma bodmi. Keďže nezáleží na poradí bodov, ktorými je priamka určená, jedná sa o kombinácie. Teda $k = 2$, $n = 15$. Dosadením do vzorca dostávame

$$C(2,15) = \binom{15}{2} = \frac{15!}{(15-2)! \cdot 2!} = \frac{15!}{13! \cdot 2!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{15 \cdot 7 \cdot 2}{2} = 105.$$

Pätnástimi bodmi, z ktorých žiadne tri body neležia na jednej priamke, možno preložiť 105 priamok.

Príklad 7.14. *Na kružnici je danných* 10 *bodov. Koľko je tetív určených týmito bodmi? Koľko je trojuholníkov s vrcholmi v týchto bodoch?*

Riešenie. Tetiva je určená 2 bodmi, teda $k = 2$, $n = 10$. Potom

$$C(2,10) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 9}{2} = 45.$$

Danými bodmi je určených 45 tetív.

Trojuholník je určený 3 bodmi, to znamená $k = 3$, $n = 10$,

$$C(3,10) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 120.$$

Danými bodmi je určených 120 trojuholníkov.

Príklad 7.15. *Určme všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí $C(2,n) = 66$.*

Riešenie. Dosadením do vzorca dostávame

$$66 = C(2,n) = \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Teda

$$\begin{aligned} n(n-1) &= 132 \\ n^2 - n - 132 &= 0 \\ (n-12)(n+11) &= 0. \end{aligned}$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice sú čísla $n_1 = 12$, $n_2 = -11$. Keďže kombinačné čísla sú definované len pre nezáporné celé čísla, riešeniu príkladu vyhovuje len číslo 12. •

7.3.2 Kombinácie s opakovaním

Kombinácia k-tej triedy z n prvkov s opakovaním je každá *k-prvková* podmnožina z n prvkovej množiny, pričom sa prvky môžu v k-tici ľubovoľne opakovať.

Teda z množiny n prvkov vyberáme k prvkov, pričom nezáleží na ich poradí a prvky sa môžu opakovať.

Označenie: $C'(k, n)$

Počítame:

$$C'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Príklad 7.16. *V predajni sú tri druhy čokolád. Koľkými spôsobmi môžeme kúpiť šesť čokolád?*

Riešenie. Máme kúpiť šesť čokolád a k dispozícii sú tri druhy, pri kúpe nezáleží na poradí, v akom ich vyberieme a je zrejmé, že jednotlivé druhy sa budú opakovať. Počet možností výberu určíme ako počet kombinácií šiestej triedy z troch prvkov. Teda $n = 3$, $k = 6$.

$$C'(6, 3) = \binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{6} = 28.$$

Je 28 spôsobov ako kúpiť šesť čokolád, ak sú k dispozícii tri rôzne druhy. •

Príklad 7.17. *V ponuke je desať druhov pohľadníc. Koľkými spôsobmi môžeme kúpiť 8 pohľadníc? Koľko možností máme na kúpu 8 rôznych pohľadníc?*

Riešenie. V prípade 8 ľubovoľných pohľadníc ide o kombinácie s opakovaním. Pre $n = 10$, $k = 8$ platí

$$C'(8, 10) = \binom{10+8-1}{8} = \binom{17}{8} = 24310.$$

Osem ľubovoľných pohľadníc je možné kúpiť 24310 spôsobmi.

Pri výbere 8 rôznych pohľadníc sa jedná o kombinácie bez opakovania, teda

$$C(8, 10) = \binom{10}{8} = 45.$$

Osem rôznych pohľadníc je možné kúpiť 45 spôsobmi. •

Príklad 7.18. *Koľko prvkov potrebujeme na vytvorenie 15 kombinácií druhej triedy s opakovaním?*

Riešenie. Použijeme vzorec na výpočet kombinácií s opakovaním.

$$C'(2, n) = \binom{n+2-1}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{(n-1)! \cdot 2!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{2(n-1)!} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Zo zadania $C'(2, n) = 15$, teda

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)n}{2} &= 15 \\ n^n + n &= 30 \\ n^2 + n - 30 &= 0 \\ (n-5)(n+6) &= 0. \end{aligned}$$

Riešením tejto kvadratickej rovnice sú čísla $n_1 = -6$ a $n_2 = 5$. Keďže počet prvkov nemôže byť záporný, riešeniu vyhovuje iba $n = 5$. •

7.3.3 Binomická veta

Binomická veta hovorí o umocňovaní dvojčlena na prirodzenú mocninu.

Nech a, b sú reálne čísla a nech n je prirodzené číslo. Potom platí

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n.$$

Je zrejmé, že

- koeficienty binomického rozvoja sú čísla v jednom riadku Pascalovho trojuholníka pre dané n,
- binomický rozvoj má $n+1$ sčítancov,
- pre k-ty člen A_k binomického rozvoja platí

$$A_k = \binom{n}{k-1} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}.$$

Príklady binomickej vety pre $n = 2, 3, 4, 5$.

$$\begin{aligned}
(a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\
(a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\
(a \pm b)^4 &= a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4 \\
(a \pm b)^5 &= a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5
\end{aligned}$$

Príklad 7.19. *Určme tretí člen binomického rozvoja výrazu* $(4x+3)^7$.

Riešenie. Pre $n = 7$, $k = 3$ platí

$$A_3 = \binom{7}{3-1} \cdot (4x)^{7-3+1} \cdot 3^{3-1} = \binom{7}{2} \cdot 4^5 \cdot x^5 \cdot 3^2 = 193536 \cdot x^5.$$

Príklad 7.20. *Zistime, ktorý člen binomického rozvoja výrazu* $(3x^4 + \frac{1}{x})^{10}$, *pre* $x \neq 0$, *obsahuje* x^5.

Riešenie. Hľadáme k, ak $n = 10$. Teda

$$\begin{aligned}
A_k &= \binom{10}{k-1} \cdot \left(3x^4\right)^{10-k+1} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} = \binom{10}{k-1} \cdot 3^{11-k} \cdot x^{4(11-k)} \cdot x^{-(k-1)} \\
&= \binom{10}{k-1} \cdot 3^{11-k} \cdot x^{44-4k-k+1} = \binom{10}{k-1} \cdot 3^{11-k} \cdot x^{45-5k} = \text{„koeficient“} \cdot x^5.
\end{aligned}$$

Porovním exponentov dostaneme rovnicu

$$\begin{aligned}
45 - 5k &= 5 \\
40 &= 5k \\
k &= 8.
\end{aligned}$$

To znamená, že ôsmy člen daného binomického rozvoja obsahuje x^5.

Príklad 7.21. *Určme x tak, aby piaty člen binomického rozvoja* $\left(\frac{2}{x} - \sqrt{x}\right)^9$ *bol rovný* 504.

Riešenie. Pre k-tý člen binomického rozvoja platí

$$A_k = \binom{n}{k-1} \cdot a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}.$$

Ak $n = 9$, $k = 5$, tak dostávame

$$A_5 = \binom{9}{5-1} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{9-5+1} \cdot \left(-\sqrt{x}\right)^{5-1} = \binom{9}{4} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{5} \cdot (-1)^4 \cdot x^{\frac{1}{2}\cdot 4} = 126 \cdot 32 \cdot x^{-5} \cdot x^2 = 4032 \cdot x^{-3}.$$

Zo zadania je $A_5 = 504$, teda

$$\begin{aligned} 504 &= 4032 \cdot x^{-3} \\ \frac{504}{4032} &= x^{-3} \\ \frac{1}{8} &= x^{-3} \\ 2^{-3} &= x^{-3} \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Úlohy

7.37. Koľko uhlopriečok je v konvexnom 10-uholníku?

7.38. V triede je 18 dievčat a 15 chlapcov. Koľko rôznych súťažných skupín možno vytvoriť, ak sa majú skladať z dvoch dievčat a troch chlapcov?

7.39. Tiket obsahuje čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Koľko je všetkých možností označenia tiketu, ak je potrebné označiť 4 čísla?

7.40. Z koľkých prvkov možno utvoriť 990 kombinácií druhej triedy bez opakovania?

7.41. Ak sa zväčší počet prvkov o 4, zväčší sa počet kombinácií druhej triedy bez opakovania vytvorených z týchto prvkov o 30. Aký je pôvodný počet prvkov?

7.42. Koľkými spôsobmi možno zo skupiny 20 dievčat a 10 chlapcov vybrať trojicu, v ktorej sú dve dievčatá a jeden chlapec?

7.43. Koľkými priamkami možno spojiť 18 bodov, keď práve tri z nich ležia na jednej priamke?

7.44. Koľko päťčlenných družstiev možno vytvoriť zo 17 športovcov?

7.45. V zasielke 10 výrobkov sú dva výrobky poškodené. Koľkými spôsobmi možno vybrať 4 výrobky tak, aby žiaden nebol chybný? Koľko je ich v prípade, ak má byť chybný práve jeden výrobok? Koľko je spôsobov výberu, ak môže byť chybný najviac jeden výrobok?

7.46. Upravte $\binom{5}{3}^2 - 4 \cdot \binom{5}{2} - 12 \cdot \binom{5}{1}$.

7.47. Obchod má v ponuke 5 druhov jogurtov. Koľkými spôsobmi môžete kúpiť 12 jogurtov?

7.48. Koľko je kombinácií tretej triedy s opakovaním z 12 prvkov?

7.49. Koľko rôznych súčinov dvoch činiteľov možno utvoriť z čísel 2 a 5?

7.50. Koľko rôznych súčinov dvoch činiteľov možno utvoriť z čísel 2, 3, 7?

7.51. Koľko rôznych súčinov troch činiteľov možno utvoriť z čísel 3 a 7?

7.52. Koľko rôznych súčinov troch činiteľov možno utvoriť z čísel 2, 3, 5, 7?

7.53. Počet kombinácií s opakovaním druhej triedy z n prvkov je o 6 väčší ako počet kombinácií bez opakovania druhej triedy z n prvkov. Aký je počet prvkov?

7.54. Z koľkých prvkov možno utvoriť 55 kombinácií druhej triedy s opakovaním?

7.55. Ak sa zväčší počet prvkov o 3, zväčší sa počet kombinácií druhej triedy s opakovaním vytvorených z týchto prvkov o 21. Aký je pôvodný počet prvkov?

7.56. Vyriešte rovnicu $C'(k+1,4) - 2 \cdot C'(k,4) = 0$.

7.57. Ktorý člen binomického rozvoja výrazu $\left(4 - \sqrt{6x}\right)^5$, $x \geq 0$, obsahuje x^2?

7.58. Ktorý člen binomického rozvoja výrazu $\left(x^3 + \frac{3}{x}\right)^8$, $x \neq 0$, neobsahuje x?

7.59. Nájdite štvrtý člen binomického rozvoja výrazu $\left(5x^3 - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{12}$.

7.60. Ktorý člen binomického rozvoja výrazu $\left(2x - \frac{1}{x^3}\right)^7$, $x \neq 0$, obsahuje x^3?

7.61. Pre aké x sa tretí člen binomického rozvoja $\left(x - \sqrt{2}\right)^7$ rovná číslu -42?

7.62. Pre ktoré čísla x platí rovnica $12C(1,x) + C(2,x+4) = 162$?

7.63. Pre ktoré čísla x platí rovnica $3C(2,x+1) - 2V(2,x) = x$?

7.64. Pre ktoré čísla x platí nerovnica $5C(3,x) < C(4,x+2)$?

7.65. Vyriešte rovnicu $\binom{x+2}{x} + \binom{x+3}{x+1} = 64$.

7.66. Vyriešte rovnicu $\binom{x+3}{x+1} - 2\binom{x+2}{x-1} + \binom{x}{x-2} = 3$.

Výsledky

7.38.	35.	7.39.	69615.	7.40.	126.	7.41.	45.
7.42.	6.	7.43.	1900.	7.44.	151.	7.45.	6188.
7.46.	70, 112, 182.	7.47.	0.	7.48.	1820.	7.49.	364.
7.50.	3.	7.51.	6.	7.52.	4.	7.53.	20.
7.54.	6.	7.55.	10.	7.56.	5.	7.57.	2.
7.58.	Piaty člen.	7.59.	Siedmy člen.	7.60.	$-440000\sqrt{2}$.	7.61.	Druhý člen.
7.62.	-1.	7.63.	8.	7.64.	5.	7.65.	$\{15, 16, 17, \cdots\}$.
7.66.	6.	7.67.	2.				

7.4 Testy

7.4.1 Test 1

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

7.1. Počet variácií bez opakovania tretej triedy z n prvkov je 5-krát väčší ako počet variácií bez opakovania druhej triedy z n prvkov. Určte n.

A) 7. **B)** 5. **C)** 10. **D)** 15.

7.2. V koľkých bodoch sa môže maximálne pretínať 9 priamok, z ktorých 4 sú navzájom rovnobežné?

A) 36. **B)** 30. **C)** 6. **D)** 10.

7.3. Koľkými spôsobmi môžeme v aleji zasadiť štyri rôzne okrasné stromy, ak máme k dispozícii päť druhov stromov?

A) 20. **B)** 30. **C)** 24. **D)** 120.

7.4. Koľko je párnych prirodzených čísel, v ktorých zápise sa vyskytujú iba cifry 2, 3, 4, 5, a to každá najviac raz?

A) 32. **B)** 24. **C)** 12. **D)** 30.

7.5. Počet všetkých možných tanečných párov z 10 chlapcov a 8 dievčat je:

A) 18. **B)** 1260. **C)** 80. **D)** 8.

Správne odpovede: A, B, D, A, C.

7.4.2 Test 2

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

7.1. Koľko prirodzených čísel väčších ako 500 možno napísať pomocou číslic $1, 2, 5, 7$ ak sa žiadna číslica neopakuje?

A) 4!. **B)** 36. **C)** 16. **D)** 64.

7.2. Koľkými spôsobmi možno vybrať štyroch žiakov z osemnástich, ak nezáleží na poradí, v akom ich vyberáme?

A) 18!. **B)** 3060. **C)** 73440. **D)** 72.

7.3. Z koľkých prvkov možno vytvoriť 600 variácií druhej triedy bez opakovania?

A) 10. **B)** 20. **C)** 25. **D)** 300.

7.4. Koľko uhlopriečok má šesťuholník?

A) 10. **B)** 9. **C)** 12. **D)** 6.

7.5. Usporiadajte čísla $V'(3,5)$, $V(3,5)$ a $C(3,5)$.

A) $V(3,5) < V'(3,5) < C(3,5)$. **B)** $C(3,5) = V(3,5) = V'(3,5)$.

C) $C(3,5) < V'(3,5) < V(3,5)$. **D)** $C(3,5) < V(3,5) < V'(3,5)$.

Správne odpovede: B, B, C, B, D.

7.4.3 Test 3

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

7.1. V koľkých bodoch sa pretne 6 priamok v rovine, ak každé dve sa pretínajú v inom bode?

A) 10. **B)** 15. **C)** 12. **D)** 24.

7.2. Riešením rovnice $(2x!)^2 + 3 \cdot x! - 7 = 0$ je množina

A) $\{0, 1\}$. **B)** $\{1\}$. **C)** $\{-\frac{7}{4}, 1\}$. **D)** $\{1!\}$.

7.3. Koľko uhlopriečok má konvexný desaťuholník?

A) 10. **B)** 35. **C)** 20. **D)** 45.

7.4. Koľko je štvorciferných prirodzených čísel, ktoré majú všetky cifry rôzne?

A) 10^4. **B)** 9000. **C)** 40. **D)** 4536.

7.5. Počet variácií bez opakovania druhej triedy z n prvkov je 210. Určte počet prvkov.

A) 10. **B)** 35. **C)** 105. **D)** 15.

Správne odpovede: B, B a D, B, D, D.

7.4.4 Test 4

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

7.1. Prostredný člen binomického rozvoja $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$ je

A) 20. **B)** -20. **C)** 6. **D)** 10.

7.2. Usporiadajte čísla $V'(2,6)$, $V(2,6)$ a $C(2,6)$.

A) $V(2,6) < V'(2,6) < C(2,6)$. **B)** $C(2,6) < V(2,6) < V'(2,6)$.

C) $C(2,6) < V'(2,6) < V(2,6)$. **D)** $C(2,6) = V(2,6) < V'(2,6)$.

7.3. Z koľkých prvkov je možné utvoriť 20-krát menej usporiadaných dvojíc ako štvoríc, ak sa žiadny prvok neopakuje?

A) 14. **B)** 7. **C)** 10. **D)** 12.

7.4. Osem priateľov si sľúbilo, že z dovolenky napíše každý každému SMS. Koľko SMS medzi sebou rozoslali?

A) 28. **B)** 56. **C)** 8!. **D)** 64.

7.5. Na ihrisku je 10 detí a 6 rodičov. Koľko rôznych dvojíc rodič-dieťa je možné vytvoriť?

A) 16. **B)** 10. **C)** 60. **D)** 6.

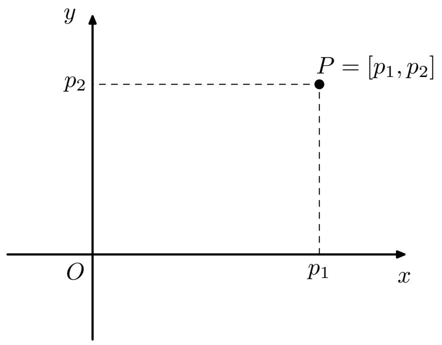
Správne odpovede: B, B, B, B, C.

8 Analytická geometria v rovine

Pravouhlá karteziánska súradnicová sústava v rovine je tvorená dvoma navzájom kolmými priamkami, ktoré nazývame *súradnicové osi* a označujeme ich x a y. Ich priesečník nazývame začiatok súradnicovej sústavy a označujeme ho O. Po zvolení kladnej orientácie priamok a zvolení jednotky dĺžky na súradnicových osiach x a y možno každému bodu P roviny jednoznačne priradiť usporiadanú dvojicu reálnych čísel

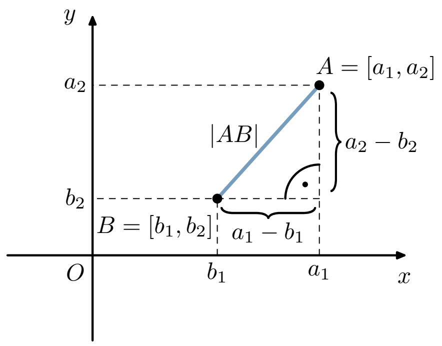
$$P = [p_1, p_2],$$

kde p_1 a p_2 sa nazývajú karteziánske súradnice bodu P. Súradnica p_1 je orientovaná vzdialenosť bodu P od súradnicovej osi y a súradnica p_2 je orientovaná vzdialenosť bodu P od súradnicovej osi x. Pozri Obr. 8.1.



Obr. 8.1: Pravouhlá karteziánska súradnicová sústava v rovine.

Pravouhlá karteziánska súradnicová sústava v rovine je teda jednoznačné zobrazenie, ktoré zobrazuje rovinu na množinu všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel.



Obr. 8.2: Vzdialenosť dvoch bodov.

Vzdialenosť dvoch bodov $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$ je daná vzťahom

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Tento vzťah sa dá jednoducho odvodiť pomocou Pytagorovej vety, pozri Obr. 8.2.

Vlastnosti vzdialenosti dvoch bodov:

- vlastnosť nezápornosti
  Pre každé dva body A, B platí $|AB| \geq 0$, pričom $|AB| = 0$ práve vtedy, keď body A a B sú totožné, t. j. $A = B$.

- vlastnosť symetrie
  Pre každé dva body A, B platí $|AB| = |BA|$, teda vzdialenosť bodu A od bodu B je taká istá ako vzdialenosť bodu B od bodu A.

- trojuholníková nerovnosť
  Pre každé tri body A, B, C platí
  $$|AB| + |BC| \geq |AC|,$$
  pričom rovnosť nastane iba vtedy, keď bod B leží na úsečke AC.

Dvoma rôznymi bodmi $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$ je jednoznačne určená *úsečka* AB. Dĺžka úsečky AB je určená vzdialenosťou jej koncových bodov. Stred úsečky AB je daný súradnicami

$$S_{AB} = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right].$$

Úsečku AB možno orientovať, teda určiť jej začiatočný bod a koncový bod. Orientovaná úsečka je jedným umiestnením vektora $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$. Poznamenajme, že dve rôzne orientované úsečky, ktoré majú rovnakú dĺžku, smer aj orientáciu, predstavujú ten istý vektor. Ide teda o dve rôzne umiestnenia toho istého vektora.

Príklad 8.1. *Vypočítajme dĺžku úsečky AB a nájdime jej stred, ak $A = [-2, 7]$, $B = [2, -4]$.*

Riešenie. Dĺžku úsečky AB vypočítame dosadením do vzorca

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + \big(7-(-4)\big)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 11^2} = \sqrt{16 + 121} = \sqrt{137}.$$

Stred úsečky AB má súradnice
$S_{AB} = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right] = \left[\frac{-2+2}{2}, \frac{7-4}{2}\right] = \left[0, \frac{3}{2}\right].$ •

8.1 Vektory

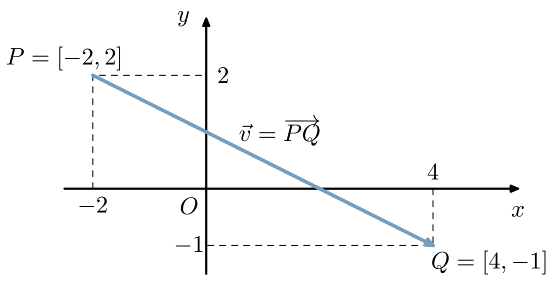
Nech vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ v rovine je určený bodmi $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$, pričom A je začiatočný bod a B je koncový bod vektora. Potom

- *súradnice* vektora $\vec{v}$ ... $\vec{v} = (v_1, v_2) = \overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$,
- *veľkosť (norma, dĺžka)* vektora $\vec{v}$ ... $|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.
  Veľkosť vektora je teda vzdialenosť jeho začiatočného a koncového bodu.

Nulový vektor, označme ho $\vec{o}$, je vektor, ktorého dĺžka je nula. Platí, že všetky jeho súradnice sú rovné nule, t. j. $\vec{o} = (0, 0)$. *Jednotkový vektor* je každý vektor, ktorého dĺžka je rovná 1. *Polohový vektor bodu* A je vektor $A - O$, kde O je počiatok súradnicovej sústavy. *Opačný vektor k vektoru* $\vec{a}$ je vektor $-\vec{a}$.

Príklad 8.2. *Nech $P = [-2, 2]$ je začiatočný a $Q = [4, -1]$ koncový bod vektora $\vec{v}$. Zakreslime daný vektor do súradnicového systému, zapíšme jeho súradnice, určme jeho veľkosť a nájdime k nemu opačný vektor.*

Riešenie. Daný vektor je znázornený na Obr. 8.3.



Obr. 8.3: Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Súradnice vektora $\vec{v}$ sú

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2) = \big(4 - (-2), -1 - 2\big) = (6, -3),$$

veľkosť vektora $\vec{v}$ je

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Vektor opačný k vektoru $\vec{v}$ je vektor $\vec{w}$, pre ktorého súradnice platí

$$\vec{w} = -\vec{v} = (-6, 3).$$

Operácie s vektormi. Nech $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sú vektory v rovine.

- Vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ *sa rovnajú* práve vtedy, keď $u_1 = v_1$ a $u_2 = v_2$.
- *Súčet vektorov* $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je vektor $\vec{u} + \vec{v}$, pričom platí

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

- *Rozdiel vektorov* $\vec{u}$ a $\vec{v}$, v danom poradí, je vektor $\vec{u} - \vec{v}$, pričom platí

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2) - (v_1, v_2) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2).$$

- *Násobok vektora* $\vec{u}$ *a reálneho čísla* k je vektor $k\vec{u}$, pričom

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2),$$

- *Skalárny súčin vektorov* $\vec{u}$ a $\vec{v}$, označujeme ho $\vec{u} \cdot \vec{v}$, je číslo (skalár), pre ktoré platí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha,$$

  kde α je uhol vektorov $\vec{u}, \vec{v}$.

  Pomocou súradníc možno pre skalárny súčin písať

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2.$$

  Priamo z definície skalárneho súčinu dostávame vzťah pre *uhol (odchýlku) vektorov* $\vec{u}$ a $\vec{v}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

  Teda skalárny súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je rovný nule, t. j. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, práve vtedy, keď aspoň jeden z vektorov $\vec{u}, \vec{v}$ je nulový alebo vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ sú kolmé. Ak platí $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, tak uhol vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$ je ostrý. V prípade, ak $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, tak ich uhol je tupý.

Príklad 8.3. *Sú dané vektory* $\vec{u} = (3, -2)$, $\vec{v} = (4, 5)$. *Vypočítajme*

a) $\vec{u} - \vec{v}$. **b)** $-5\vec{v}$. **c)** $2\vec{u} + 3\vec{v}$. **d)** $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Riešenie.

a) $\vec{u} - \vec{v} = (3, -2) - (4, 5) = (3 - 4, -2 - 5) = (-1, -7)$.

b) $-5\vec{v} = -5(4, 5) = (-20, -25)$.

c) $2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(3, -2) + 3(4, 5) = (6, -4) + (12, 15) = (6 + 12, -4 + 15) = (18, 11)$.

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2) \cdot (4, 5) = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 = 12 - 10 = 2$.

Príklad 8.4. *Vypočítajme uhol vektorov* $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (3, -1)$.

Riešenie. Pre kosínus uhla α vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{6 - 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5 \cdot 2}}$$
$$= \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Teda $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Poznámka 8.1. Ak uvažujeme vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ v priestore, tak analogicky definujeme

- *dĺžku vektora* ... $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
- *súčet vektorov* ... $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$,
- *rozdiel vektorov* ... $\vec{u} - \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$,
- *násobok vektora s číslom* ... $k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$,
- *skalárny súčin vektorov* ... $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$.

Okrem toho môžeme definovať vektorový súčin dvoch a zmiešaný súčin troch vektorov.

Vektorový súčin vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$, v danom poradí, je vektor $\vec{w}$, ktorý označujeme $\vec{u} \times \vec{v}$, pričom

1. $|\vec{w}| = |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$.
   Poznamenajme, že geometricky je dĺžka vektorového súčinu rovná veľkosti obsahu rovnobežníka vytvoreného týmito vektormi.
2. Vektor $\vec{w}$ je kolmý na oba vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$,
3. Vektor $\vec{w}$ je orientovaný tak, že vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{u} \times \vec{v}$ tvoria pravotočivú sústavu vektorov.

Pomocou súradníc možno vektorový súčin zapísať v tvare

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Zmiešaný súčin vektorov $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ je číslo $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$. Poznamenajme, že geometricky je absolútna hodnota zmiešaného súčinu rovná objemu rovnobežnostena, ktorého tri rôznobežné hrany sú určené vektormi $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Úlohy

8.1. Vypočítajte vzdialenosť bodov $A = [3, 5]$ a $B = [2, 2]$ a zapíšte súradnice stredu úsečky určenej týmito bodmi.

8.2. Sú dané body $A = [-2, 4]$ a $B = [1, 0]$. Určte súradnice stredu úsečky určenej týmito bodmi a jej dĺžku.

8.3. Sú dané body $C = [2, -3, 4]$ a $D = [0, 7, 2]$. Zapíšte súradnice stredu úsečky a vypočítajte jej dĺžku.

8.4. Určte druhý koncový bod úsečky, ak jeden jej koncový bod má súradnice $[5, 2]$ a jej stred má súradnice $[4, 7]$. Vypočítajte veľkosť danej úsečky.

8.5. Na osi x nájdite taký bod, ktorý má od bodu $A = [-7, 4]$ vzdialenosť 5.

8.6. Na osi y nájdite taký bod, ktorý má od bodu $B = [5, 7]$ vzdialenosť 13.

8.7. Nájdite súradnice vektora $\vec{v}$ a určte jeho veľkosť, ak

a) jeho začiatočný bod má súradnice $[0, 5]$ a jeho koncový bod má súradnice $[2, -2]$.

b) jeho začiatočný bod je $[-2, 4]$ a jeho koncový bod má súradnice $[3, 7]$.

c) jeho začiatočný bod je $[2, 3, 4]$ a jeho koncový bod má súradnice $[1, 2, 3]$.

d) $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} = (-3, 2)$ a $\vec{b} = (2, 3)$.

8.8. Nájdite súradnice vektora $\vec{v}$ a určte jeho veľkosť, ak

a) $\vec{v} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$, pričom $\vec{a} = (1, 6)$ a $\vec{b} = (2, -3)$.

b) vektor $\vec{v}$ je opačný k vektoru $-3\vec{a} + \vec{b}$, pričom $\vec{a} = (2, 5)$ a $\vec{b} = (1, 1)$.

c) vektor $\vec{v}$ je kolmý na vektor $3\vec{a}$, kde $\vec{a} = (-2, -5)$.

d) vektor $\vec{v}$ je kolmý na vektor $5\vec{a} + 3\vec{b}$, pričom $\vec{a} = (-3, 0)$ a $\vec{b} = (4, 2)$.

8.9. Nech $\vec{v} = (2, 5)$, $\vec{u} = (-1, 3)$. Vypočítajte

a) $\vec{v} + \vec{u}$. **b)** $\vec{u} - \vec{v}$. **c)** $-2\vec{u} + 3\vec{v}$. **d)** $|4\vec{u} - 2\vec{v}|$.

e) $|3\vec{v} + \vec{u}|$. **f)** $\vec{v} \cdot \vec{u}$. **g)** $\vec{v} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})$. **h)** $(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{v}$.

8.10. Vypočítajte uhol vektorov

a) $\vec{v} = (2, 5)$, $\vec{u} = (15, -6)$. **b)** $\vec{v} = (1, 4)$, $\vec{u} = (-2, -8)$. **c)** $\vec{v} = (2, 3)$, $\vec{u} = (4, 6)$.

d) $\vec{v} = (3, -1)$, $\vec{u} = (4, 3)$. **e)** $\vec{v} = (1, -2)$, $\vec{u} = (3, 2)$. **f)** $\vec{v} = (1, 0)$, $\vec{u} = (2, 2)$.

8.11. Určte veľkosť vnútorných uhlov v trojuholníku ABC, ak jeho vrcholy majú súradnice $A = [2, 0]$, $B = [5, 0]$, $C = [5, 3\sqrt{3}]$.

8.12. Vypočítajte veľkosť vnútorných uhlov trojuholníka ABC, ak $A = [1, 3]$, $B = [2, 8]$, $C = [-2, 5]$.

8.13. Zistite, či nasledujúce body ležia na jednej priamke.

a) $A = [3, -1]$, $B = [5, 0]$, $C = [-1, -3]$. **b)** $A = [2, 5]$, $B = [1, 1]$, $C = [0, 7]$.

c) $A = [1, 2]$, $B = [5, 6]$, $C = [0, 0]$. **d)** $A = [-1, 5]$, $B = [1, 8]$, $C = [-3, 2]$.

Výsledky

8.1. $|AB| = \sqrt{10}$, $S = [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.

8.2. $|AB| = 5$, $S = [-\frac{1}{2}, 2]$.

8.3. $|CD| = \sqrt{108}$, $S = [1, 2, 3]$.

8.4. Druhý koncový bod $[3, 12]$, dĺžka úsečky $\sqrt{104}$.

8.5. $[-10, 0]$, $[-4, 0]$.

8.6. $[0, -5]$, $[0, 19]$.

8.7. **a)** $\vec{v} = (2, -7)$, $|\vec{v}| = \sqrt{53}$. **b)** $\vec{v} = (5, 3)$, $|\vec{v}| = \sqrt{34}$. **c)** $\vec{v} = (-1, -1, -1)$, $|\vec{v}| = \sqrt{3}$.

d) $\vec{v} = (-1, 5)$, $|\vec{v}| = \sqrt{26}$.

8.8. **a)** $\vec{v} = (-2, 18)$, $|\vec{v}| = \sqrt{328}$. **b)** $\vec{v} = (5, 14)$, $|\vec{v}| = \sqrt{221}$. **c)** $\vec{v} = (15, -6)$, $|\vec{v}| = \sqrt{261}$.

d) $\vec{v} = (6, 3)$, $|\vec{v}| = \sqrt{45}$.

8.9. **a)** $(1, 8)$. **b)** $(3, 2)$. **c)** $(8, 9)$. **d)** $\sqrt{68}$. **e)** $\sqrt{349}$. **f)** 13. **g)** -19. **h)** $(26, 65)$.

8.10. **a)** $\dfrac{\pi}{2}$. **b)** π. **c)** 0. **d)** $55°\,18'\,17''$. **e)** $82°\,52'\,30''$. **f)** $\dfrac{\pi}{4}$.

8.11. $30°$, $60°$ a $90°$.

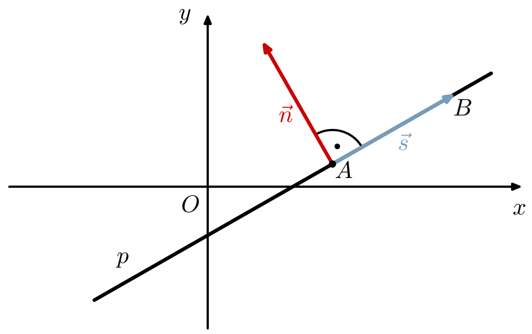
8.12. $67°\,37'$, $41°\,49'$ a $70°\,34'$.

8.13. **a)** Áno. **b)** Nie. **c)** Nie. **d)** Áno.

8.2 Priamka v rovine

Dvoma rôznymi bodmi $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ je jednoznaznačne určená priamka. Označme ju p. Okrem toho, môže byť priamka p určená jedným bodom, ktorý na nej leží (napríklad bod $A = [a_1, a_2]$) a *smerovým vektorom $\vec{s}$ priamky*, pozri Obr. 8.4,

$$\vec{s} = (s_1, s_2) = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$



Obr. 8.4: Priamka p.

Ďalším spôsobom, ako môže byť určená priamka v rovine, je pomocou jedného bodu, ktorý na nej leží a *normálového vektora priamky* $\vec{n} = (n_1, n_2)$. Normálový vektor priamky $\vec{n}$ je kolmý na priamku p, a teda je kolmý aj na smerový vektor $\vec{s}$. Platí

$$\begin{aligned} \vec{s} \cdot \vec{n} &= 0 \\ (s_1, s_2) \cdot (n_1, n_2) &= 0 \\ s_1 n_1 + s_2 n_2 &= 0. \end{aligned}$$

Priamo z tohto vzťahu dostávame, že ak sú nejaké dva vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ v rovine na seba kolmé, pričom platí $\vec{a} = (a_1, a_2)$, tak $\vec{b} = (-a_2, a_1)$ alebo $\vec{b} = (a_2, -a_1)$, prípadne iný nenulový násobok tohto vektora. Teda súradnice vektora kolmého na nejaký vektor dostaneme napríklad tak, že zameníme poradie súradníc pôvodného vektora a pri jednej súradnici (ľubovoľnej) zmeníme znamienko na opačné. Pozor, toto platí len pre vektory v rovine.

Analytické vyjadrenie priamky v rovine.
Rovnica priamky p v rovine môže byť určená viacerými spôsobmi. Označme $X = [x, y]$ ľubovoľný bod priamky, $A = [a_1, a_2]$ bod, ktorým je daná priamka. Platí.

- *Parametrické rovnice priamky* ... $\vec{s} = (s_1, s_2)$ – smerový vektor priamky, t – parameter

  $$p: \quad X = A + t\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

  Táto rovnica je ekvivalentná so sústavou rovníc, ktorú nazývame parametrické vyjadrenie priamky v rovine v súradniciach

  $$\begin{aligned} p: \quad x &= a_1 + ts_1 \\ y &= a_2 + ts_2; \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

  Ak $t \in \langle \alpha, \infty)$, tak dostaneme rovnicu polpriamky, ak $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, dostaneme rovnicu úsečky, pričom $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$.

- *Kanonická rovnica priamky* ...

  $$p: \quad \frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2}.$$

Kanonickú rovnicu priamky dostaneme z parametrických rovníc priamky, ak si z jednotlivých rovníc vyjadríme parameter t a takto upravené rovnice dáme do rovnosti. Teda pre $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$ platí

$$\left.\begin{array}{lll} x = a_1 + ts_1 & \Rightarrow & t = \dfrac{x - a_1}{s_1} \\ y = a_2 + ts_2 & \Rightarrow & t = \dfrac{y - a_2}{s_2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2}.$$

- *Všeobecná rovnica priamky* ... $\vec{n} = (a, b)$ – normálový vektor priamky

$$p: \quad ax + by + c = 0.$$

Poznamenajme, že všeobecná rovnica priamky existuje len v rovine.

- *Smernicový tvar rovnice priamky* ...

$$p: \quad y = kx + q.$$

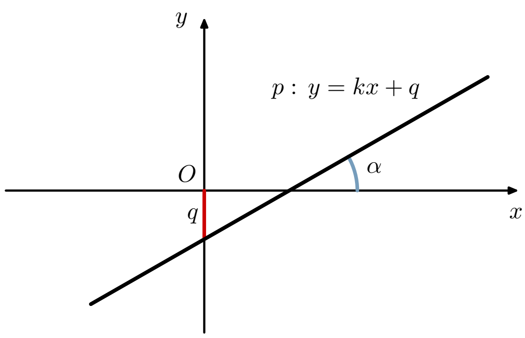
Smernicový tvar priamky vieme dostať zo všeobecného tvaru $ax + by + c = 0$ ak $b \neq 0$. Platí

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ by &= -ax - c \\ y &= \frac{-ax - c}{b} \\ y &= -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \end{aligned}$$

pričom označíme $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = q$. Teda

$$y = kx + q.$$

Číslo k sa nazýva *smernica priamky.* Platí $k = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je uhol, ktorý zviera priamka s kladnou časťou osi x. Číslo q predstavuje úsek, ktorý vytína priamka na osi y, viď Obr. 8.5.



Obr. 8.5: Geometrická interpretácia smernicového tvaru priamky $p: \ y = kx + q$.

Poznamenajme, že nie každá priamka sa dá zapísať v smernicovom tvare. Priamka, ktorá je kolmá na os x sa nedá zapísať v smernicovom tvare, keďže zviera s osou x uhol $\frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ neexistuje.

- *Úsekový tvar rovnice priamky* ...

$$p: \quad \frac{x}{r} + \frac{y}{q} = 1,$$

kde $r \neq 0$, $q \neq 0$.

Úsekový tvar rovnice priamky dostaneme zo všeobecnej rovnice priamky nasledujúcimi úpravami. Nech

$a, b, c \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ ax + by &= -c \\ \frac{ax + by}{-c} &= \frac{-c}{-c} \\ \frac{-ax}{c} + \frac{-by}{c} &= 1 \\ \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} &= 1, \end{aligned}$$

pričom označíme $-\frac{c}{a} = r$, $-\frac{c}{b} = q$. Teda

$$\frac{x}{r} + \frac{y}{q} = 1.$$

Číslo r predstavuje úsek, ktorý vytína priamka na osi x, q je úsek, ktorý vytína priamka na osi y.

Poznamenajme, že nejaký bod P leží na priamke p, práve vtedy, keď jeho súradnice vyhovujú rovnici danej priamky.

Príklad 8.5. *Napíšme parametrické rovnice priamky, ktorá prechádza bodmi $A = [2, 5]$ a $B = [5, -3]$. Napíšme tiež ďalšie tvary rovníc danej priamky.*

Riešenie. Pre zápis parametrických rovníc priamky potrebujeme poznať jeden bod ležiaci na tejto priamke (poznáme dva body, uvažujme napríklad bod A), a taktiež potrebujeme poznať smerový vektor priamky. Smerový vektor danej priamky je napríklad vektor $\vec{s} = A - B = (2-5, 5-(-3)) = (-3, 8)$. Teda parametrické rovnice sú

$$\begin{aligned} p: \quad x &= 2 - 3t \\ y &= 5 + 8t; \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Kanonickú rovnicu priamky určenej bodom $A = [2, 5]$ a smerovým vektorom $\vec{s} = (-3, 8)$ dostaneme dosadením do rovnice

$$\begin{aligned} p: \quad \frac{x - a_1}{s_1} &= \frac{y - a_2}{s_2} \\ p: \quad \frac{x - 2}{-3} &= \frac{y - 5}{8}. \end{aligned}$$

Všeobecnú rovnicu tejto priamky môžeme dostať niekoľkými spôsobmi. Ukážeme si dva.
I. spôsob. K vyjadreniu všeobecnej rovnice priamky $p: ax + by + c = 0$ potrebujeme poznať normálový vektor $\vec{n}$ priamky. Keďže $\vec{n} \perp \vec{s}$ a $\vec{s} = (-3, 8)$, normálový vektor je napríklad vektor $\vec{n} = (8, 3)$. (Súradnice normálového vektora dostaneme tak, že zameníme poradie súradníc smerového vektora a pri jednej súradnici (ľubovoľnej) zmeníme znamienko na opačné.) Potom

$$8x + 3y + c = 0.$$

Na určenie koeficientu c si stačí uvedomiť, že bod $A = [2, 5]$ leží na priamke, teda jeho súradnice musia vyhovovať rovnici danej priamky

$$\begin{aligned} A = [2, 5] \in p \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + c &= 0 \\ 31 + c &= 0 \\ c &= -31. \end{aligned}$$

Všeobecná rovnica je

$$p: \quad 8x + 3y - 31 = 0.$$

II. spôsob. Všeobecnú rovnicu priamky môžeme dostať tiež z parametrických rovníc vylúčením parametra t. Vynásobme rovnice vhodnými číslami

$$\begin{aligned} x &= 2 - 3t \quad / \cdot 8 \\ y &= 5 + 8t \quad / \cdot 3 \end{aligned}$$

teda

$$\begin{aligned} 8x &= 16 - 24t \\ 3y &= 15 + 24t. \end{aligned}$$

Spočítajme dané rovnice

$$8x + 3y = 31.$$

Po úprave dostávame všeobecnú rovnicu priamky

$$p: \quad 8x + 3y - 31 = 0.$$

Smernicový tvar rovnice priamky dostaneme vyjadrením y zo všeobecnej rovnice.

$$\begin{aligned} 8x + 3y - 31 &= 0 \quad / + 31 - 8x \\ 3y &= -8x + 31 \quad / : 3 \\ p: \quad y &= -\frac{8}{3}x + \frac{31}{3}. \end{aligned}$$

Úsekový tvar rovnice priamky dostaneme nasledujúcimi úpravami

$$\begin{aligned} 8x + 3y - 31 &= 0 \quad / + 31 \\ 8x + 3y &= 31 \quad / : 31 \\ \frac{8x}{31} + \frac{3y}{31} &= 1 \\ p: \quad \frac{x}{\frac{31}{8}} + \frac{y}{\frac{31}{3}} &= 1. \end{aligned}$$

Príklad 8.6. *Napíšme parametrické rovnice priamky q, ktorá prechádza bodom $P = [-2, 1]$ a*

a) *je kolmá na priamku $p: \ 2x + 4y - 2 = 0$.*

b) *je kolmá na priamku $p: \ x = -1 + 5t, \ y = -3t; \ t \in \mathbb{R}$.*

c) *je rovnobežná s priamkou $p: \ -x + 2y + 3 = 0$.*

d) *je rovnobežná s priamkou $p: \ x = 2 + 7t, \ y = 3; \ t \in \mathbb{R}$.*

Riešenie. Na vyjadrenie parametrických rovníc priamky potrebujeme poznať aspoň jeden bod ležiaci na priamke (ten je daný) a smerový vektor priamky.

a) Zo všeobecnej rovnice priamky p dostávame jej normálový vektor $\overrightarrow{n_p} = (2, 4) \sim (1, 2)$. Keďže priamka q má byť kolmá na priamku p, smerový vektor priamky q je totožný s normálovým vektorom priamky p. Teda $\overrightarrow{s_q} = \overrightarrow{n_p} = (1, 2)$. Odtiaľ parametrické rovnice priamky q sú

$$\begin{aligned} q: \quad x &= -2 + t \\ y &= 1 + 2t; \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Smerový vektor priamky p je $\overrightarrow{s_p} = (5, -3)$. Keďže priamka q má byť kolmá na priamku p, sú ich smerové vektory na seba kolmé, teda napríklad $\overrightarrow{s_q} = (3, 5)$. Potom parametrické rovnice priamky q sú

$$\begin{aligned} q: \quad x &= -2 + 3t \\ y &= 1 + 5t; \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) Normálový vektor priamky p je $\overrightarrow{n_p} = (-1, 2)$. Priamky p a q majú byť rovnobežné, teda normálový vektor priamky p je kolmý na smerový vektor priamky q. Preto napríklad $\overrightarrow{s_q} = (2, 1)$ a parametrické rovnice priamky q sú

$$\begin{aligned} q: \quad x &= -2 + 2t \\ y &= 1 + t; \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

d) Platí, že smerový vektor priamky p je $\vec{s_p} = (7,0)$. Pre rovnobežné priamky platí, že majú rovnaké smerové vektory, teda $\vec{s_q} = (7,0)$. Parametrické rovnice priamky q sú

$$\begin{aligned} q: \quad x &= -2 + 7t \\ y &= 1; \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

•

Metrické a polohové vlastnosti útvarov v rovine.
Uvažujme dve priamky p, q v rovine. Nech priamka p je daná bodom P a smerovým vektorom $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a nech priamka q je daná bodom Q a smerovým vektorom $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Uhol α priamok p, q je uhol ich smerových, resp. normálových vektorov

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Poznamenajme, že v čitateli zlomku vystupuje absolútna hodnota. Je to preto, lebo uhlom dvoch priamok rozumieme uhol ostrý (prípadne pravý).

Príklad 8.7. *Vypočítajme uhol priamok p a q, ak $p:\ x = 3 - t,\ y = 2 + 2t,\ t\in\mathbb{R}$ a $q:\ 3x - 2y + 9 = 0$.*

Riešenie. Zo zadania dostávame $\vec{s_p} = (-1,2)$ a $\vec{n_q} = (3,-2)$. Vyjadríme si napríklad smerový vektor priamky q. Keďže je kolmý na $\vec{n_q}$, platí napríklad $\vec{s_q} = (2,3)$.

Uhol dvoch priamok p, q je uhol ich smerových, prípadne normálových vektorov. Keďže sme vyjadrili smerové vektory priamok, uhol vektorov počítame podľa vzorca

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{s_p}\cdot\vec{s_q}|}{|\vec{s_p}|\cdot|\vec{s_q}|} = \frac{|-1\cdot 2 + 2\cdot 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|-2+6|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{5\cdot 13}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \approx 0{,}4961.$$

Odtiaľ

$$\alpha \approx 60{,}255^\circ = 60^\circ 15' 18''.$$

Poznamenajme, že príklad bolo možné riešiť aj tak, že by sme si vyjadrili normálový vektor $\vec{n_q}$ priamky q a uhol priamok p, q by sme určili ako uhol ich normálových vektorov. •

Vzdialenosť bodu $M = [m_1, m_2]$ od priamky $p:\ ax + by + c = 0$ sa vypočíta podľa vzťahu

$$|M,p| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Príklad 8.8. *Vypočítajme vzdialenosť bodu $P = [-7,29]$ od priamky p, ktorá prechádza bodmi $A = [2,5]$ a $B = [5,-3]$.*

Riešenie. Podľa Príkladu 8.5 má všeobecná rovnica priamky p tvar

$$p: \quad 8x + 3y - 31 = 0.$$

Dosadením súradníc bodu $P = [p_1, p_2]$ do vzorca pre výpočet vzdialenosti bodu od priamky dostávame

$$|P,p| = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|8\cdot(-7) + 3\cdot 29 - 31|}{\sqrt{8^2+3^2}} = \frac{-56+87-31}{\sqrt{64+9}} = \frac{0}{\sqrt{73}} = 0.$$

Keďže vzdialenosť bodu P od priamky p je 0, znamená to, že bod P leží na priamke p. •

Vzájomná poloha dvoch priamok p, q v rovine:
Uvažujme smerové vektory priamok p, q.

- Ak $\vec{s_p} \neq k\vec{s_q}$ pre všetky reálne čísla k, tak priamky p a q sú rôznobežné.

- Ak $\vec{s_p} = k\vec{s_q}$ pre nejaké reálne číslo k a priamky nemajú spoločný bod, t. j. $p \cap q = \emptyset$, tak priamky p a q sú rovnobežné.
- Ak $\vec{s_p} = k\vec{s_q}$ pre nejaké reálne číslo k a priamky majú spoločný bod, t. j. $p \cap q \neq \emptyset$, tak priamky p a q sú totožné.

Poznamenajme, že namiesto smerových vektorov môžeme uvažovať aj normálové vektory priamok p, q v rovine.

Keďže rovnicu priamky v rovine možno z algebraického hľadiska považovať za lineárnu, prípadne konštantnú rovnicu, ľahko vidno, že geometrický problém určenia vzájomnej polohy dvoch priamok v rovine sa preformuluje na algebraický problém riešenia sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych.

Príklad 8.9. *Určme vzájomnú polohu priamok p a q, ak priamka p je daná rovnicami $p:\ x = 3 - t$, $y = 2 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$ a priamky q danej rovnicou $q:\ 3x - 2y + 9 = 0$.*

Riešenie. Pre smerové vektory priamok platí $\vec{s_p} = (-1, 2)$ a $\vec{s_q} = (2, 3)$. Ľahko sa overí, že neexistuje také reálne číslo k, aby platilo $\vec{s_p} = k\vec{s_q}$. Ak by také číslo existovalo, muselo by platiť

$$-1 = 2k \quad \text{a súčasne} \quad 2 = 3k,$$

teda

$$k = -\frac{1}{2} \quad \text{a súčasne} \quad k = \frac{2}{3}.$$

Dospeli sme k sporu. Preto priamky p a q sú rôznobežné. Nájdime ich priesečník. Priesečník dvoch priamok (vo všeobecnosti ľubovoľných kriviek) je bod, ktorého súradnice vyhovujú rovniciam oboch priamok (kriviek). Súradnice priesečníka nájdeme napríklad tak, že dosadíme parametrické rovnice priamky p do všeobecnej rovnice priamky q.

$$\begin{aligned} 3 \cdot (3 - t) - 2 \cdot (2 + 2t) + 9 &= 0 \\ 9 - 3t - 4 - 4t + 9 &= 0 \\ 7t &= 14 \\ t &= 2. \end{aligned}$$

Ak dosadíme hodnotu parametra $t = 2$ do parametrických rovníc priamky p, tak dostaneme súradnice priesečníka P

$$P = [3 - 1 \cdot 2, 2 + 2 \cdot 2] = [3 - 2, 2 + 4] = [1, 6].$$

•

Úlohy

8.14. Zistite, ktoré z nasledujúcich bodov ležia na priamke p, a ktoré na priamke q, ak $p:\ x = 1 + t$, $y = 3 + t$, $t \in \mathbb{R}$, $q:\ x - 2y + 6 = 0$ a

a) $A = [0, 2]$. **b)** $B = [2, 4]$. **c)** $C = [0, 3]$. **d)** $D = [1, 5]$.

8.15. Napíšte parametrické rovnice a všeobecnú rovnicu priamky, ktorá

a) prechádza bodom $T = [2, 5]$ a je rovnobežná s vektorom $\vec{a} = (1, 0)$.

b) prechádza bodom $K = [-1, -1]$ a je rovnobežná s vektorom $\vec{s} = (2, 3)$.

c) prechádza bodmi $A = [2, 5]$, $B = [1, 0]$.

d) prechádza bodom $B = [0, -3]$ a počiatkom súradnicového systému.

8.16. Napíšte parametrické rovnice a všeobecnú rovnicu priamky, ktorá

a) prechádza bodom $Z = [0, 6]$ a je rovnobežná s priamkou $p:\ x = 2 - t$, $y = 1 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$.

b) prechádza bodom $A = [1, -1]$ a je rovnobežná s priamkou $q:\ 4x - 7y + 2 = 0$.

c) prechádza bodom $C = [2, 3]$ a je kolmá na priamku $p:\ x = 12 + t$, $y = 3 + t$, $t \in \mathbb{R}$.

d) prechádza bodom $A = [2, 3]$ a je kolmá na priamku $s:\ 2x + 2y - 4 = 0$.

8.17. Napíšte rovnice priamok, na ktorých ležia vrcholy trojuholníka ABC, ak $A = [5, 2]$, $B = [4, 3]$ a $C = [7, -5]$.

8.18. Vypočítajte uhol priamok p a q ak

a) $p:\ x = 12 + t,\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R},\ q:\ x = -3 + 2s,\ y = 1 + s,\ s \in \mathbb{R}$.

b) $p:\ x = 2,\ y = t,\ t \in \mathbb{R},\ q:\ x = 13 + s,\ y = 7 - 3s,\ s \in \mathbb{R}$.

c) $p:\ 3x + 7y - 4 = 0,\ q:\ 2x - y + 13 = 0$.

d) $p:\ x + y - 5 = 0,\ q:\ 2x - 3 = 0$.

8.19. Vypočítajte uhol priamok p a q ak

a) $p:\ x + 3y - 7 = 0,\ q:\ x = 2 + t,\ y = 1 - t,\ t \in \mathbb{R}$.

b) $p:\ y - 4 = 0,\ q:\ x = 1 - 2t,\ y = 1 + 2t,\ t \in \mathbb{R}$.

c) priamka p prechádza bodmi $A = [1, 2]$, $B = [3, 7]$, priamka q je kolmá na priamku $s:\ x = 2 + t$, $y = 1 - t$, $t \in \mathbb{R}$ a prechádza počiatkom súradnicového systému.

d) priamky p a q sú priamky, na ktorých ležia uhlopriečky štvoruholníka $ABCD$, kde $A = [1, 2]$, $B = [1, 7]$, $C = [8, 7]$ a $D = [6, 2]$.

8.20. Vypočítajte vzdialenosť bodu A od priamky p

a) $A = [3, 5]$, $p:\ x = 12 + t,\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R}$.

b) $A = [1, 0]$, $p:\ x = 3 + 2t,\ y = 1 + t,\ t \in \mathbb{R}$.

c) $A = [-1, 2]$, $p:\ 2x - y + 13 = 0$.

d) $A = [1, 3]$, $p:\ 2x + y - 5 = 0$.

e) $A = [-2, 3]$, $p:\ 5x - y + 3 = 0$.

8.21. Vypočítajte dĺžky výšok v trojuholníku ABC, ak jeho vrcholy sú $A = [2, 3]$, $B = [1, 7]$ a $C = [5, -3]$.

8.22. Určte vzájomnú polohu priamok p a q, ak

a) $p:\ x = 12 + t,\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R},\ q:\ x = -3 + 2s,\ y = 1 + s,\ s \in \mathbb{R}$.

b) $p:\ x = 3 + t,\ y = 3 - 2t,\ t \in \mathbb{R},\ q:\ x = -3 + 2s,\ y = 1 - 4s,\ s \in \mathbb{R}$.

c) $p:\ x = 8 + t,\ y = 1 + 3t,\ t \in \mathbb{R},\ q:\ x = 9 + 2s,\ y = 4 + 6s,\ s \in \mathbb{R}$.

d) $p:\ 3x + 7y - 4 = 0,\ q:\ 2x - y + 13 = 0$.

8.23. Určte vzájomnú polohu priamok p a q ak

a) $p:\ x + y - 5 = 0,\ q:\ 2x + 2y + 3 = 0$.

b) $p:\ 3x - y - 5 = 0,\ q:\ -6x + 2y + 10 = 0$.

c) $p:\ x + 3y - 7 = 0,\ q:\ x = 2 + t,\ y = 1 - t,\ t \in \mathbb{R}$.

d) $p:\ x + y - 4 = 0,\ q:\ x = 1 - 2t,\ y = 1 + 2t,\ t \in \mathbb{R}$.

Výsledky

8.14. **a)** Bod A leží len na priamke q. **b)** Bod B leží na oboch priamkách. **c)** Bod C leží len na priamke q. **d)** Bod D neleží ani na jednej priamke.

8.15. **a)** $x = 2 + t,\ y = 5,\ t \in \mathbb{R};\ y - 5 = 0$. **b)** $x = -1 + 2t,\ y = -1 + 3t,\ t \in \mathbb{R};\ 3x - 2y + 1 = 0$.

c) $x = 2 - t,\ y = 5 - 5t,\ t \in \mathbb{R};\ 5x - y - 5 = 0$. **d)** $x = 0,\ y = -3 + 3t,\ t \in \mathbb{R};\ x = 0$.

8.16. **a)** $x = -t,\ y = 6 + 3t,\ t \in \mathbb{R};\ 3x + y - 6 = 0$. **b)** $x = 1 + 7t,\ y = -1 + 4t,\ t \in \mathbb{R};\ 4x - 7y - 11 = 0$.

c) $x = 2 + t,\ y = 3 - t,\ t \in \mathbb{R};\ x + y - 5 = 0$. **d)** $x = 2 + t,\ y = 3 + t,\ t \in \mathbb{R};\ x - y + 1 = 0$.

8.17. $8x + 3y - 41 = 0$, $7x + 2y - 39 = 0$, $x + y - 7 = 0$.

8.18. **a)** $71^\circ\, 34'$. **b)** $18^\circ\, 26'$. **c)** $86^\circ\, 38'$. **d)** $\dfrac{\pi}{4}$.

8.19. **a)** $26^\circ\, 34'$. **b)** $\dfrac{\pi}{4}$. **c)** $23^\circ\, 12'$. **d)** $80^\circ\, 32'$.

8.20. **a)** $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. **b)** 0. **c)** $\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$. **d)** 0. **e)** $\dfrac{5\sqrt{26}}{13}$.

8.21. $|v_a| = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$, $|v_b| = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $|v_c| = \dfrac{6}{\sqrt{17}}$.

8.22. **a)** Rôznobežné, priesečník $\left[\dfrac{25}{3}, \dfrac{20}{3}\right]$. **b)** Rovnobežné. **c)** Totožné. **d)** Rôznobežné, priesečník $\left[-\dfrac{87}{17}, \dfrac{47}{17}\right]$.

8.23. **a)** Rovnobežné. **b)** Totožné. **c)** Rôznobežné, priesečník $[1, 2]$. **d)** Rovnobežné.

8.3 Kužeľosečky

Kužeľosečka je rovinná krivka, ktorá vznikne rezom rotačnej kužeľovej plochy s rovinou. Ak rovina neprechádza vrcholom rotačnej plochy, tak rezom vznikne kružnica, elipsa, parabola alebo hyperbola. Hovoríme o regulárnych kužeľosečkách. Ak rovina prechádza vrcholom rotačnej plochy, tak rezom vznikne bod, priamka alebo dvojica priamok. Takéto kužeľosečky nazývame singulárne.

Všeobecná rovnica kužeľosečky má tvar

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

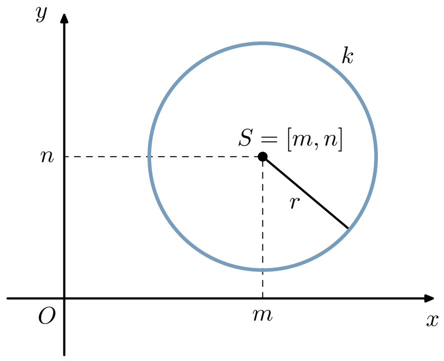
kde A, B, C, D, E, F sú reálne čísla, pričom aspoň jedno z čísel A, B, C je rôzne od nuly.

Kružnica so stredom $S = [m, n]$ a polomerom $r > 0$ je množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od bodu S vzdialenosť r. Bod S nazývame stred kružnice, r nazývame polomer kružnice. Na Obr. 8.6 je znázornená kružnica so stredom $S = [m, n]$ a polomerom $r > 0$.
Stredová rovnica kružnice so stredom $S = [0, 0]$ je

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Stredová rovnica kružnice so stredom $S = [m, n]$ je

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$



Obr. 8.6: Kružnica so stredom $S = [m, n]$ a polomerom $r > 0$.

Príklad 8.10. *Napíšme rovnicu kružnice so stredom $S = [3,5]$, ktorá sa dotýka priamky p, $p: 3x - 2y + 4 = 0$.*

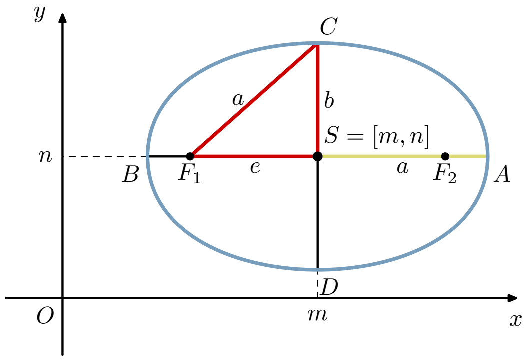
Riešenie. Keďže priamka p sa má dotýkať hľadanej kružnice, je priamka p jej dotyčnicou a vzdialenosť stredu kružnice od dotyčnice je polomer hľadanej kružnice. Platí teda

$$r = |S,p| = \frac{|3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 4|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{|9 - 10 + 4|}{\sqrt{9+4}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Teda stredová rovnica kružnice je

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = \frac{9}{13}.$$

Elipsa je množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od dvoch pevne zvolených bodov F_1, F_2 konštantný súčet vzdialenosti rovný $2a$. Body F_1, F_2 sa nazývajú ohniská elipsy, a je dĺžka hlavnej polosi.



Obr. 8.7: Elipsa so stredom $S = [m,n]$ a hlavnou polosou rovnobežnou s osou x.

Na Obr. 8.7 je znázornená elipsa. Elipsa je symetrická podľa dvoch osí symetrie. Os, na ktorej ležia ohniská F_1, F_2 sa nazýva hlavná os, vedľajšia os je na ňu kolmá a prechádza stredom S elipsy. Body A, B nazývame hlavné vrcholy elipsy, body C, D nazývame vedľajšie vrcholy. Vzdialenosť hlavného vrchola od stredu elipsy je rovná dĺžke hlavnej polosi a a vzdialenosť vedľajšieho vrchola od stredu elipsy je rovná dĺžke vedľajšej polosi b, teda $|AB| = 2a$, $|CD| = 2b$, $a \geq b \geq 0$. Vzdialenosť ohniska od stredu elipsy sa nazýva lineárna excentricita (výstrednosť), označuje sa e, teda $|F_1F_2| = 2e$. Platí $e = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Stredová rovnica elipsy so stredom $S = [0,0]$ a hlavnou osou totožnou s osou x je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Stredová rovnica elipsy so stredom $S = [0,0]$ a hlavnou osou totožnou s osou y je

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Stredová rovnica elipsy so stredom $S = [m,n]$ a hlavnou osou rovnobežnou s osou x je

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Stredová rovnica elipsy so stredom $S = [m,n]$ a hlavnou osou rovnobežnou s osou y je

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1.$$

Príklad 8.11. *Napíšme stredovú rovnicu elipsy, ktorej ohniská majú súradnice $E = [3,5]$ a $F = [27,5]$ a hlavná polos má dĺžku 13.*

Riešenie. Keďže ohniská majú rovnakú y-ovú súradnicu, bude hlavná os elipsy rovnobežná s osou x.

Ďalej platí

$$2e = |EF| = |F - E| = |(f_1 - e_1, f_2 - e_2)| = |(27-3, 5-5)| = |(24,0)| = \sqrt{24^2 + 0^2} = \sqrt{24^2} = 24,$$

odtiaľ dostávame, že excentricita elipsy je $e = 12$.

Stred elipsy je stred úsečky, ktorej koncové body sú ohniská elipsy, teda

$$S = \left[\frac{e_1 + f_1}{2}, \frac{e_2 + f_2}{2}\right] = \left[\frac{3 + 27}{2}, \frac{5 + 5}{2}\right] = [15, 5].$$

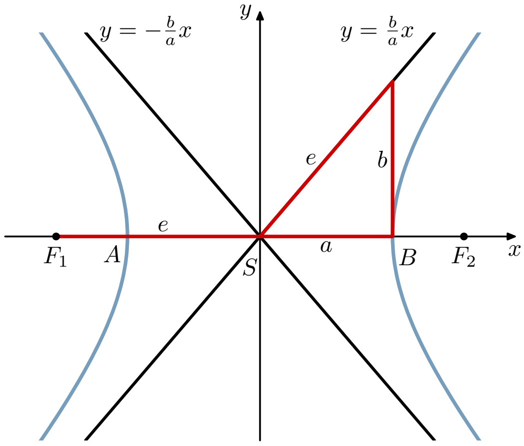
Dĺžku vedľajšej polosi b elipsy určíme zo vzťahu $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Odtiaľ $e^2 = a^2 - b^2$, teda

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5.$$

Stredová rovnica hľadanej elipsy je

$$\frac{(x - 15)^2}{169} + \frac{(y - 5)^2}{25} = 1.$$

Hyperbola je množina všetkých bodov roviny, ktoré majú od dvoch pevne zvolených bodov F_1, F_2 konštantný rozdiel vzdialenosti (uvažovaný v absolútnej hodnote) rovný $2a$. Body F_1, F_2 sa nazývajú ohniská hyperboly, a je dĺžka hlavnej polosi.



Obr. 8.8: Hyperbola so stredom $S = [0, 0]$ a hlavnou polosou totožnou s osou x.

Na Obr. 8.8 je znázornená hyperbola. Hyperbola je tiež symetrická podľa dvoch osí symetrie. Hlavná os je os, na ktorej ležia ohniská F_1, F_2, vedľajšia je na ňu kolmá a prechádza stredom S hyperboly. Body A, B sa nazývajú vrcholy hyperboly. Vzdialenosť vrchola od stredu hyperboly je rovná dĺžke hlavnej polosi a a vzdialenosť ohniska od stredu hyperboly sa nazýva lineárna excentricita (výstrednosť), označuje sa e, teda $|AB| = 2a$, $|F_1F_2| = 2e$. Zavádza sa dĺžka vedľajšej polosi b, platí $b = \sqrt{e^2 - a^2}$.

Stredová rovnica hyperboly so stredom $S = [0, 0]$ a hlavnou osou totožnou s osou x je

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Stredová rovnica hyperboly so stredom $S = [0, 0]$ a hlavnou osou totožnou s osou y je

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Stredová rovnica hyperboly so stredom $S = [m, n]$ a hlavnou osou rovnobežnou s osou x je

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

Stredová rovnica hyperboly so stredom $S = [m, n]$ a hlavnou osou rovnobežnou s osou y je

$$-\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1.$$

Asymptoty hyperboly sú priamky, ktoré prechádzajú stredom hyperboly a dotýkajú sa hyperboly v nekonečne. Ak sú osi hyperboly totožné so súradnicovými osami, tak rovnice asymptot sú

$$y = \frac{b}{a} \cdot x, \quad y = -\frac{b}{a} \cdot x.$$

Poznamenajme, že ak sú osi hyperboly rovnobežné so súradnicovými osami, tak asymptoty majú smernice $\pm\frac{b}{a}$.

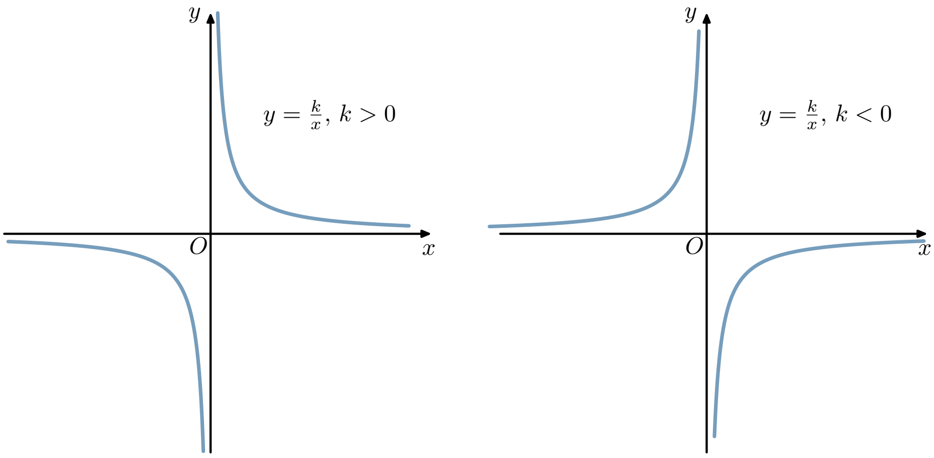
Ak $a = b$, tak hyperbolu nazývame *rovnoosá*. Asymptoty rovnoosej hyperboly sú na seba kolmé. Rovnoosá hyperbola je grafom nepriamej úmernosti. V prípade, ak sú asymptoty totožné so súradnicovými osami, tak rovnica rovnoosej hyperboly je

$$y = \frac{k}{x}.$$

Ak sú asymptoty rovnobežné so súradnicovými osami, teda stred hyperboly $S = [m, n]$ je posunutý, tak rovnica rovnoosej hyperboly je

$$y - n = \frac{k}{x - m}.$$

Na Obr. 8.9 sú znázornené rovnoosé hyperboly.



Obr. 8.9: Rovnoosé hyperboly.

Príklad 8.12. *Nájdime súradnice stredu hyperboly*

$$5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y - 36 = 0.$$

Určme dĺžky hlavnej a vedľajšej polosi a napíšme rovnice jej asymptot.

Riešenie. Všeobecnú rovnicu kužeľosečky potrebujeme upraviť na stredový tvar. Budeme používať dopĺňanie na úplný štvorec, teda vzorce $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$.

$$\begin{gathered}
5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y - 36 = 0 \\
5x^2 - 20x - 4y^2 - 24y - 36 = 0 \\
5(x^2 - 4x) - 4(y^2 + 6y) - 36 = 0 \\
5(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2) - 4(y^2 + 2 \cdot 3y + 3^2 - 3^2) - 36 = 0 \\
5\big[(x^2 - 2 \cdot 2x + 4) - 4\big] - 4\big[(y^2 + 2 \cdot 3y + 9) - 9\big] - 36 = 0 \\
5\big[(x - 2)^2 - 4\big] - 4\big[(y + 3)^2 - 9\big] - 36 = 0 \\
5(x - 2)^2 - 20 - 4(y + 3)^2 + 36 - 36 = 0 \\
5(x - 2)^2 - 4(y + 3)^2 = 20 \quad / : 20 \\
\frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{(y + 3)^2}{5} = 1.
\end{gathered}$$

Dostali sme stredovú rovnicu hyperboly so stredom $S = [2, -3]$, dĺžky jej polosí sú $a = 2$, $b = \sqrt{5}$. Smernicový tvar asymptot je

$$y = kx + q,$$

pričom asymptoty majú smernice $k = \pm\frac{b}{a} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Keďže asymptoty prechádzajú stredom hyperboly, tak koeficient q vypočítame tak, že dosadíme súradnice stredu $S = [2, -3]$ hyperboly do rovníc asymptot

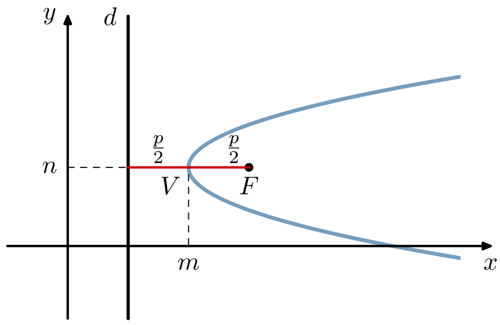
$$-3 = \frac{\sqrt{5}}{2}2 + q_1 \quad \Rightarrow \quad q_1 = -3 - \sqrt{5}$$

a

$$-3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}2 + q_2 \quad \Rightarrow \quad q_2 = -3 + \sqrt{5}.$$

Rovnice asymptot hyperboly sú $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x - 3 - \sqrt{5}$, $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x - 3 + \sqrt{5}$.

Parabola je množina všetkých bodov roviny, ktorých vzdialenosť od pevne zvolenej priamky d je rovnaká ako ich vzdialenosť od pevne zvoleného bodu F, ktorý na danej priamke neleží. Priamku d nazývame riadiaca priamka a bod F ohnisko paraboly. Na Obr. 8.10 je znázornená parabola. Parabola má jednu os symetrie. Je to priamka kolmá na riadiacu priamku prechádzajúca cez ohnisko. Prienik tejto osi a paraboly je vrchol paraboly V. Z definície paraboly dostávame, že $|d, V| = |VF| = \frac{p}{2}$, kde číslo p, $p > 0$, nazývame parameter paraboly.



Obr. 8.10: Parabola s vrcholom $V = [m, n]$ a osou rovnobežnou s osou x, $p > 0$.

Vrcholová rovnica paraboly s vrcholom $V = [0, 0]$ a osou totožnou s osou x, $p > 0$, je

$$y^2 = \pm 2px.$$

Vrcholová rovnica paraboly s vrcholom $V = [0, 0]$ a osou totožnou s osou y, $p > 0$, je

$$x^2 = \pm 2py.$$

Vrcholová rovnica paraboly s vrcholom $V = [m, n]$ a osou rovnobežnou s osou x, $p > 0$, je

$$(y - n)^2 = \pm 2p(x - m).$$

Vrcholová rovnica paraboly s vrcholom $V = [m, n]$ a osou rovnobežnou s osou y, $p > 0$, je

$$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n).$$

Na Obr. 8.11 sú znázornené paraboly s vrcholom $V = [0, 0]$ a osou totožnou s osou x, respektíve osou y.

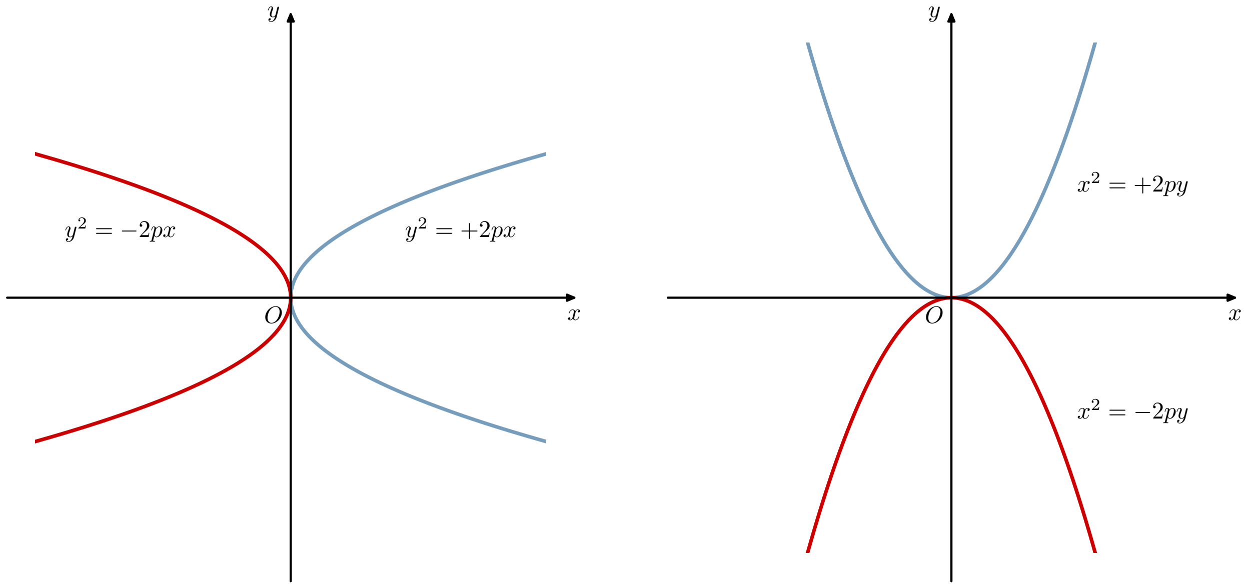
Príklad 8.13. *Napíšme rovnicu paraboly, ktorej vrchol leží na osi y, jeho vzdialenosť od osi x je 5, os paraboly je rovnobežná s osou x a parabola prechádza bodom $A = [3, 8]$.*

Riešenie. Keďže všetky body na osi y majú x-ovú súradnicu rovnú nule, pre vrchol paraboly $V = [v_1, v_2]$, ktorý leží na osi y, dostávame $v_1 = 0$. Keďže vrchol je vzdialený od osi x o 5 jednotiek, tak $v_2 = 5$ alebo $v_2 = -5$. Teda vrchol paraboly je buď $V_1 = [0, 5]$ alebo $V_2 = [0, -5]$. Vzhľadom k tomu, že os paraboly je rovnobežná s osou x, príslušné vrcholové rovnice sú

$$(y - 5)^2 = k_1 x,$$

pre parabolu s vrcholom $V_1 = [0, 5]$ alebo

$$(y + 5)^2 = k_2 x,$$



Obr. 8.11: Rôzne orientované paraboly.

pre parabolu s vrcholom $V_1 = [0, -5]$.

Koeficienty k_1, k_2 dopočítame dosadením súradníc bodu $A = [3, 8]$ do daných rovníc, pretože parabola má prechádzať bodom A.
Pre $(y - 5)^2 = k_1 x$ dostávame

$$(8-5)^2 = 3k_1 \quad \Rightarrow \quad 9 = 3k_1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 3.$$

Pre $(y + 5)^2 = k_2 x$ platí

$$(8+5)^2 = 3k_2 \quad \Rightarrow \quad 169 = 3k_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{169}{3}.$$

Riešeniu príkladu vyhovujú dve paraboly s vrcholovými rovnicami

$$(y-5)^2 = 3x \quad \text{a} \quad (y+5)^2 = \frac{169}{3}x.$$

Úlohy

8.24. Napíšte rovnicu kružnice, ak

a) jej stred je $S = [-3, 1]$ a má polomer $r = 7$.

b) jej stred je $S = [2, -1]$ a má polomer $r = -4$.

c) súradnice jej stredu sú $S = [1, 0]$ a jej polomer je $r = \sqrt{3}$.

d) prechádza bodmi $A = [1, 2]$, $B = [-4, -3]$ a $C = [4, 1]$.

8.25. Napíšte rovnicu kružnice, ak

a) jej priemer je úsečka AB, kde $A = [6, 5]$ a $B = [14, -3]$.

b) jej polomer je úsečka CD, kde $C = [1, 2]$ a $D = [3, -5]$.

c) jej priemer je úsečka, ktorej koncové body sú stredy kružníc $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 24$ a $x^2 + (y - 11)^2 = 12$.

d) dotýka sa priamky $p:\ 3x - 7y + 4 = 0$ a jej stred má súradnice $S = [-4, 2]$.

8.26. Napíšte rovnicu kružnice, ak

a) jej stredom je priesečník priamok p a q, $p: x + 2y - 7 = 0$, $q: 2x - 3y - 14 = 0$ a jej polomer je $r = \sqrt{12}$.

b) jej stredom je priesečník priamok p a q, $p: x = 2+3t,\ y = 4-t;\ t \in \mathbb{R}$, $q: x = 5-s,\ y = 4-3s;\ s \in \mathbb{R}$ a dotýka sa priamky $r: x + 3y - 7 = 0$.

c) dotýka sa súradnicových osí a vzdialenosť jej stredu od počiatku súradnicového systému je $5\sqrt{2}$.

8.27. Napíšte rovnicu elipsy, ak

a) jej stred je $S = [-2, 5]$ a dĺžky polosí sú $a = 7$, $b = 3$ a hlavná os je rovnobežná s osou x.

b) jej stred je $S = [-5, 2]$ a dĺžky polosí sú $a = 8$, $b = 5$ a hlavná os je rovnobežná s osou y.

c) jej stred je $S = [0, 1]$ a dĺžky polosí sú $a = \sqrt{30}$, $b = \sqrt{14}$.

d) jej stred je $S = [1, -1]$, dĺžka hlavnej polosi je $a = 13$ a jej excentricita je $e = 2$.

8.28. Napíšte rovnicu elipsy, ak

a) $S = [5, 4]$, $a = 5$, $e = \sqrt{2}$ a hlavná os je rovnobežná s osou y.

b) $S = [-3, -1]$, $b = 12$, $e = 1$ a hlavná os je rovnobežná s osou x.

c) $S = [-3, -1]$, $b = 15$ a $e = \sqrt{4}$.

d) dotýka sa súradnicových osí a vzdialenosť jej stredu od osi x je 7 a od osi y je 5.

8.29. Napíšte rovnicu elipsy, ak

a) jej stredom je priesečník priamok p a q, $p: x - 3y + 2 = 0$, $q: 2x - 7y + 4 = 0$, $a = 5$, $b = 4$ a hlavná os je rovnobežná s osou y.

b) súradnice jej ohnísk sú $E = [-5, 2]$, $F = [13, 2]$ a $a = 21$.

c) súradnice jej ohnísk sú $E = [4, 5]$, $F = [4, 25]$ a $b = 3$.

d) súradnice jej stredu sú $[2, 5]$, jeden vrchol má súradnice $[2, 15]$ a jedno ohnisko je bod $[-3, 5]$.

8.30. Napíšte rovnicu hyperboly a rovnice jej asymptot, ak

a) jej stred je $S = [1, 6]$ a dĺžky polosí sú $a = 5$, $b = 1$ a hlavná os je rovnobežná s osou x.

b) jej stred je $S = [0, 3]$ a dĺžky polosí sú $a = 4$, $b = 6$ a hlavná os je rovnobežná s osou y.

c) jej stred je $S = [2, 3]$ a dĺžky polosí sú $a = \sqrt{7}$, $b = \sqrt{8}$.

d) jej stred je $S = [4, 1]$, dĺžka hlavnej polosi je $a = 4$ a jej excentricita je $e = 13$.

8.31. Napíšte rovnicu hyperboly a rovnice jej asymptot, ak

a) $S = [1, 1]$, $a = \sqrt{5}$, $e = \sqrt{13}$ a hlavná os je rovnobežná s osou x.

b) $S = [2, 1]$, $b = 4$, $e = 16$ a hlavná os je rovnobežná s osou y.

c) $S = [2, 1]$, $b = 5$ a $e = \sqrt{83}$.

d) jej vrcholy majú súradnice $[1, -3]$, $[1, 15]$ a $e = 10$.

8.32. Napíšte rovnicu hyperboly a rovnice jej asymptot, ak

a) jej stredom je priesečník priamok p a q, $p: x - 3y + 2 = 0$, $q: 2x - 7y + 4 = 0$, $a = 3$, $b = 7$ a hlavná os je rovnobežná s osou x.

b) súradnice jej ohnísk sú $E = [-4, 3]$, $F = [14, 3]$ a $2a = 4$.

c) súradnice jej ohnísk sú $E = [1, 3]$, $F = [1, 13]$ a $b = 3$.

d) súradnice jej stredu sú $[4, 3]$, jeden vrchol má súradnice $[6, 3]$ a jedným ohniskom je bod $[-2, 3]$.

8.33. Napíšte rovnicu paraboly, ak

a) jej vrchol je $V = [1, -3]$, jej parameter je $p = 3$ a má os rovnobežnú s osou x.

b) jej vrchol má súradnice $V = [2, 23]$, má parameter $p = 6$ a jej os je rovnobežná s osou y.

c) jej vrchol je $V = [1, -3]$ a ohnisko je $E = [1, 3]$.

d) jej vrchol je $V = [2, 5]$ a ohnisko je $E = [2, 0]$.

8.34. Napíšte rovnicu paraboly, ak

a) jej vrchol má súradnice $V = [4, 6]$ a ohnisko je $E = [-1, 6]$.

b) jej vrchol má súradnice $V = [5, 1]$ a ohnisko je $E = [8, 1]$.

c) jej vrchol má súradnice $V = [12, 5]$ a riadiaca priamka je $d: \ x = 4$.

d) jej vrchol má súradnice $V = [-7, 6]$ a rovnica riadiacej priamky je $d: \ x = 1$.

8.35. Napíšte rovnicu paraboly, ak

a) $V = [3, 4]$ a riadiaca priamka má rovnicu $d: \ y = 1$.

b) $V = [-1, 3]$ a riadiaca priamka má rovnicu $d: \ y = 7$.

c) $V = [3, 5]$, jej os je rovnobežná s osou y a prechádza bodom $A = [5, 8]$.

d) $V = [-1, 2]$, jej os je rovnobežná s osou x a prechádza bodom $A = [-6, -4]$.

8.36. Nakreslite nasledujúce kužeľosečky.

a) $x^2 + y^2 = 9$. **b)** $(x-5)^2 + y^2 = 14$. **c)** $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 12$.

d) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. **e)** $\dfrac{(x-1)^2}{7} + \dfrac{y^2}{25} = 1$. **f)** $\dfrac{(x+1)^2}{2} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$.

8.37. Nakreslite nasledujúce kužeľosečky.

a) $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{16} = 1$. **b)** $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y+3)^2}{25} = 1$. **c)** $y = \dfrac{-2}{x+1} + 3$.

d) $y^2 = 3x$. **e)** $y^2 = -x$. **f)** $(x+2)^2 = 4(y-11)$.

8.38. Zistite, aké kužeľosečky popisujú nasledujúce rovnice a nakreslite ich.

a) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$. **b)** $x^2 + y^2 - 6x = 0$. **c)** $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 22 = 0$.

d) $x^2 + 3y^2 - 9 = 0$. **e)** $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$. **f)** $2x^2 + y^2 + 12x + 2y + 11 = 0$.

8.39. Zistite, aké kužeľosečky popisujú nasledujúce rovnice a nakreslite ich.

a) $x^2 - 5y^2 + 15 = 0$. **b)** $4x^2 - 9y^2 - 32x - 18y + 17 = 0$. **c)** $5x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$.

d) $xy - x - 2y + 1 = 0$. **e)** $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0$. **f)** $y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$.

Výsledky

8.24. **a)** $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 49$. **b)** Neexistuje taká kružnica. **c)** $(x-1)^2 + y^2 = 3$.

d) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

8.25. **a)** $(x-10)^2 + (y-1)^2 = 32$. **b)** $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 53$, $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 53$.

c) $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{13}{2}\right)^2 = \dfrac{45}{2}$. **d)** $(x+4)^2 + (y-2)^2 = \dfrac{242}{29}$.

8.26. **a)** $(x-7)^2 + y^2 = 12$. **b)** $\left(x - \dfrac{47}{10}\right)^2 + \left(y - \dfrac{31}{10}\right)^2 = \dfrac{49}{10}$. **c)** $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$,

$(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$, $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$, $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$.

8.27. **a)** $\frac{(x+2)^2}{49}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$. **b)** $\frac{(x+5)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{64}=1$. **c)** $\frac{x^2}{30}+\frac{(y-1)^2}{14}=1,\ \frac{x^2}{14}+\frac{(y-1)^2}{30}=1$.

d) $\frac{(x-1)^2}{169}+\frac{(y+1)^2}{165}=1,\ \frac{(x-1)^2}{165}+\frac{(y+1)^2}{169}=1$.

8.28. **a)** $\frac{(x-5)^2}{23}+\frac{(y-4)^2}{25}=1$. **b)** $\frac{(x+3)^2}{145}+\frac{(y+1)^2}{144}=1$ **c)** $\frac{(x+3)^2}{229}+\frac{(y+1)^2}{225}=1$, $\frac{(x+3)^2}{225}+\frac{(y+1)^2}{229}=1$. **d)** $\frac{(x+5)^2}{25}+\frac{(y+7)^2}{49}=1,\ \frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y+7)^2}{49}=1,\ \frac{(x+5)^2}{25}+\frac{(y-7)^2}{49}=1$, $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-7)^2}{49}=1$.

8.29. **a)** $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. **b)** $\frac{(x-4)^2}{441}+\frac{(y-2)^2}{360}=1$. **c)** $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-15)^2}{109}=1$.

d) $\frac{(x-2)^2}{125}+\frac{(y-5)^2}{100}=1$.

8.30. **a)** $\frac{(x-1)^2}{25}-(y-6)^2=1,\ y-6=\pm\frac{1}{5}(x-1)$. **b)** $-\frac{x^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{16}=1,\ y-3=\pm\frac{3}{2}x$.

c) $\frac{(x-2)^2}{7}-\frac{(y-3)^2}{8}=1,\ -\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y-3)^2}{7}=1,\ y-3=\pm\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}(x-2)$.

d) $\frac{(x-4)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{153}=1,\ -\frac{(x-4)^2}{153}+\frac{(y-1)^2}{16}=1,\ y-1=\pm\frac{\sqrt{153}}{4}(x-4)$.

8.31. **a)** $\frac{(x-1)^2}{5}-\frac{(y-1)^2}{8}=1,\ y-1=\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(x-1)$. **b)** $-\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{240}=1$, $y-1=\pm\frac{1}{\sqrt{15}}(x-2)$. **c)** $\frac{(x-2)^2}{58}-\frac{(y-1)^2}{25}=1,\ -\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{58}=1,\ y-1=\pm\frac{5}{\sqrt{58}}(x-2)$.

d) $-\frac{(x-1)^2}{19}+\frac{(y-6)^2}{81}=1,\ y-6=\pm\frac{9}{\sqrt{19}}(x-1)$.

8.32. **a)** $\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{y^2}{49}=1,\ y=\pm\frac{7}{3}(x+2)$. **b)** $\frac{(x-5)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{77}=1,\quad y-3=\pm\frac{\sqrt{77}}{2}(x-5)$.

c) $-\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-8)^2}{16}=1,\ y-8=\pm\frac{4}{3}(x-1)$. **d)** $\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{32}=1,\ y-3=\pm 2\sqrt{2}(x-4)$.

8.33. **a)** $(y+3)^2=\pm 6(x-1)$. **b)** $(x-2)^2=\pm 12(y-23)$. **c)** $(x-1)^2=24(y+3)$.

d) $(x-2)^2=-20(y-5)$.

8.34. **a)** $(y-6)^2=-20(x-4)$. **b)** $(y-1)^2=12(x-5)$. **c)** $(y-5)^2=32(x-12)$.

d) $(y-6)^2=-32(x+7)$.

8.35. **a)** $(x-3)^2=12(y-4)$. **b)** $(x+1)^2=-16(y-3)$. **c)** $(x-3)^2=\frac{4}{3}(y-5)$.

d) $(y-2)^2=-\frac{36}{5}(x+1)$.

8.36. **a)** Kružnica so stredom $S=[0,0]$ a polomerom $r=3$.

b) Kružnica so stredom $S=[5,0]$ a polomerom $r=\sqrt{14}$.

c) Kružnica so stredom $S=[-1,-1]$ a polomerom $r=2\sqrt{3}$.

d) Elipsa so stredom $S=[0,0]$, polosami $a=4$, $b=3$, hlavná os totožná s osou x.

e) Elipsa so stredom $S = [1, 0]$, polosami $a = 5$, $b = \sqrt{7}$, hlavná os rovnobežná s osou y.

f) Elipsa so stredom $S = [-1, 2]$, polosami $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, hlavná os rovnobežná s osou y.

8.37. **a)** Hyperbola so stredom $S = [0, 0]$, polosami $a = 4$, $b = 4$, hlavná os totožná s osou y.

b) Hyperbola so stredom $S = [1, -3]$, polosami $a = 3$, $b = 5$, hlavná os rovnobežná s osou x.

c) Rovnoosá hyperbola so stredom $S = [-1, 3]$, nachádzajúca sa v posunutom II. a IV. kvadrante.

d) Parabola s vrcholom $V = [0, 0]$, $p = \dfrac{3}{2}$, os totožná s osou x, ohnisko napravo od vrchola.

e) Parabola s vrcholom $V = [0, 0]$, $p = -\dfrac{1}{2}$, os totožná s osou x, ohnisko naľavo od vrchola.

f) Parabola s vrcholom $V = [-2, 11]$, $p = 2$, os rovnobežná s osou y, ohnisko nad vrcholom.

8.38. **a)** Kružnica $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$. **b)** Kružnica $(x - 3)^2 + y^2 = 9$.

c) Kružnica $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 24$. **d)** Elipsa $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. **e)** Elipsa $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$.

f) Elipsa $\dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{8} = 1$.

8.39. **a)** Hyperbola $\dfrac{y^2}{3} - \dfrac{x^2}{15} = 1$. **b)** Hyperbola $-\dfrac{(y+1)^2}{\frac{38}{9}} + \dfrac{(x-4)^2}{\frac{38}{4}} = 1$. **c)** Elipsa $x^2 + \dfrac{(y-2)^2}{5} = 1$.

d) Rovnoosá hyperbola $y = \dfrac{1}{x-2} + 1$. **e)** Parabola $(x + 3)^2 = 4(y - 2)$.

f) Parabola $(y - 1)^2 = -2(x + 1)$.

8.4 Testy

8.4.1 Test 1

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

8.1. Priamka p je určená dvoma bodmi $[2,-3]$ a $[5,7]$. Zistite, ktorý z nasledujúcich bodov leží na priamke p.

A) $[3,1]$. **B)** $[1,-3]$. **C)** $[-1,-13]$. **D)** $[1,13]$.

8.2. Úsečka MN je určená bodom $M=[1,5]$ a stredom $S=[5,7]$. Určte veľkosť úsečky MN.

A) $6\sqrt{5}$. **B)** $4\sqrt{5}$. **C)** $\sqrt{5}$. **D)** 80.

8.3. Výška v_c trojuholníka ABC, kde $A=[5,0]$, $B=[0,5]$ a $C=[0,0]$, leží na priamke s rovnicou

A) $x+y=0$. **B)** $x-y=0$. **C)** $x+y+5=0$. **D)** $5x+y=0$.

8.4. Stred S a polomer r kružnice $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ je

A) $S=[1,2]$, $r=9$. **B)** $S=[-1,-2]$, $r=3$. **C)** $S=[2,1]$, $r=4$. **D)** $S=[1,-2]$, $r=3$.

8.5. Rozhodnite, analytickým vyjadrením akej kužeľosečky je rovnica $16x^2+25y^2+96x-50y+569=0$.

A) Kružnice. **B)** Elipsy.

C) Paraboly. **D)** Daná rovnica nie je rovnicou kužeľosečky.

Správne odpovede: C, B, B, D, D.

8.4.2 Test 2

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1. Všeobecná rovnica priamky určenej bodmi $[1,3]$ a $[-2,4]$ je

   A) $x - 3y - 10 = 0.$ **B)** $x + 3y - 10 = 0.$ **C)** $3x - y = 0.$ **D)** $-3x + y - 10 = 0.$

2. Kružnica so stredom $S = [-1,-3]$ a polomerom $r = 1$ je daná rovnicou

   A) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 9 = 0.$ **B)** $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0.$

   C) $x^2 + y^2 + x + 3y - 9 = 0.$ **D)** $x^2 - y^2 + 2x + 6y + 9 = 0.$

3. Všeobecná rovnica osi úsečky s krajnými bodmi $[2,-6]$, $[-2,4]$ je

   A) $x - 5y - 10 = 0.$ **B)** $4x + 10y - 10 = 0.$ **C)** $2x - 5y - 5 = 0.$ **D)** $-4x + 10y + 10 = 0.$

4. Priesečník priamok daných rovnicami $5x - y - 10 = 0$ a $8x + 4y - 16 = 0$ má súradnice

   A) $[1,2].$ **B)** $[0,-2].$ **C)** $[2,0].$ **D)** $[-2,0].$

5. Veľkosť výšky v_c v trojuholníku ABC, kde $A = [0,0]$, $B = [7,0]$ a $C = [4,5]$, je

   A) 4. **B)** 5. **C)** 3. **D)** 7.

Správne odpovede: B, A, C a D, C, B.

8.4.3 Test 3

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1. Rozhodnite, analytickým vyjadrením akej kužeľosečky je rovnica $x^2 + y^2 + 9x - 10y + 30 = 0$.

   A) Kružnice. **B)** Elipsy.

   C) Paraboly. **D)** Daná rovnica nie je rovnicou kužeľosečky.

2. Parametrické rovnice priamky, ktorá je určená bodmi $[7, 4]$ a $[1, -3]$ sú

   A) $x = 1 + 6t, y = -3 + 7t,\ t \in \mathbb{R}$. **B)** $x = 1 + 7t, y = -3 + 6t,\ t \in \mathbb{R}$.

   C) $x = 7 - 6t, y = 4 - 7t,\ t \in \mathbb{R}$. **D)** $x = 1 + t, y = -3 + 7t,\ t \in \mathbb{R}$.

3. Kružnica so stredom $S = [1, 4]$ a polomerom $r = 5$ je daná rovnicou

   A) $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 42 = 0$. **B)** $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$.

   C) $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$. **D)** $x^2 - y^2 + 2x + 4y + 8 = 0$.

4. Stred úsečky s krajnými bodmi $[7, -4]$ a $[3, 2]$ má súradnice

   A) $[2, -3]$. **B)** $[-2, 5]$. **C)** $[5, -2]$. **D)** $[5, -1]$.

5. Úsečka AB je určená bodmi $A = [-1, 4]$ a $B = [5, 7]$. Nájdite veľkosť úsečky AB.

   A) $3\sqrt{5}$. **B)** $\sqrt{45}$. **C)** $\sqrt{15}$. **D)** 9.

Správne odpovede: A, A a C, B, D, A a B.

8.4.4 Test 4

V nasledujúcich úlohách zvoľte správnu odpoveď, resp. správne odpovede.

1. Stred S a polomer r kružnice $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0$ je

   A) $S = [-6, 10]$, $r = 7$. **B)** $S = [3, -5]$, $r = 7$.

   C) $S = [-5, 3]$, $r = 7$. **D)** $S = [6, -10]$, $r = 5$.

2. Rozhodnite, analytickým vyjadrením akej kužeľosečky je rovnica $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$.

   A) Kružnice. **B)** Elipsy.

   C) Hyperboly. **D)** Daná rovnica nie je rovnicou kužeľosečky.

3. Priesečník priamok daných rovnicami $x - 2y + 5 = 0$ a $3x - 2y + 3 = 0$ je bod

   A) $[1, 3]$. **B)** $[3, 1]$. **C)** $[-1, -3]$. **D)** $[-1, 3]$.

4. Priamka p je určená bodmi $[5, 1]$ a $[2, 7]$. Priamka, ktorá je kolmá na priamku p a prechádza bodom $[-1, 3]$ má rovnicu

   A) $-3x + 6y - 21 = 0$. **B)** $-x + 3y = 0$. **C)** $x + 2y - 5 = 0$. **D)** $x - 2y + 7 = 0$.

5. Obsah trojuholníka ohraničeného súradnicovými osami a priamkou danou všeobecnou rovnicou $5x + 4y - 20 = 0$ je

   A) 20. **B)** 10. **C)** 5. **D)** 4.

Správne odpovede: B, C, A, A a D, B.

Použitá literatúra

[1] M. Bača, J. Buša, A. Feňovčíková, Z. Kimáková, D. Olekšáková, Š. Schrötter, *Zbierka riešených a neriešených úloh z matematiky pre uchádzačov o štúdium na TU v Košiciach*, Technická univerzita v Košiciach, 2011.

[2] Ľ. Bálint, J. Bobek, M. Križalkovičová, J. Lukátšová: *Zbierka úloh z matematiky na prijímacie skúšky na stredné školy*, SPN Bratislava, 1984.

[3] I. Bušek, P. Bero, E. Calda, B. Riečan, J. Smida: *Zbierka úloh zmatematiky*, SPN Bratislava, 1991.

[4] O. Hudec, Z. Kimáková, E. Švidroňová: *Príklady z matematiky pre uchádzačov o štúdium na TU v Košiciach*, C-PRESS Košice, 1997.

[5] O. Odvárko, M. Božek, M. Ryšánková, J. Smida: *Matematika pre 2. ročník gymnázia*, SPN Bratislava, 1985.

[6] F. Peller, V. Šáner, J. Eliáš: *Matematika (Požiadavky pre štúdium na EU)*, EU v Bratislave, 1994.

[7] B. Riečan, P. Bero, J. Smida, J. Šedivý: *Matematika pre 4. ročník gymnázia*, SPN Bratislava, 1987.

[8] J. Smida, J. Šedivý, J. Lukátšová, J. Vocelka: *Matematika pre 1. ročník gymnázia*, SPN Bratislava, 1990.

[9] J. Šedivý, V. Bocko, L. Boček, B. Mannová, J. Müllerová, J. Polák, B. Riečan: *Matematika pre 3. ročník gymnázia*, SPN Bratislava, 1986.

[10] F. Vejsada, F. Talafous: *Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ*, SPN Bratislava, 1972.

[11] Z. Vošický: *Matematika v kocke pre stredné školy*, ART AREA, 2001.