TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH

STROJNÍCKA FAKULTA

Vybrané kapitoly z aplikovanej matematiky

Dušan Knežo, Gabriela Ižaríková, Marcela Lascsáková

2013

RECENZOVALI: prof. RNDr. Jozef Džurina, CSc.
doc. RNDr. Blanka Baculíková, PhD.

Predhovor

Tento učebný text je určený poslucháčom prvého ročníka inžinierskeho štúdia Strojníckej fakulty Technickej univerzity v Košiciach študijného programu Počítačová podpora strojárskej výroby a tematicky je orientovaný na predmet Aplikovaná matematika.

V učebnom texte sú uvedené podstatné teoretické poznatky potrebné ku riešeniu úloh, riešené príklady a úlohy na riešenie z približného riešenia rovníc a sústav rovníc, aproximácie a interpolácie funkcií, približného výpočtu určitých integrálov, približného riešenia diferenciálnych rovníc a základných štatistických metód.

Obsah je dostatočným základom pre štúdium a úspešné absolvovanie spomínaného predmetu.

Obom recenzentom prof. RNDr. Jozefovi Džurinovi, CSc. a doc. RNDr. Blanke Baculíkovej, PhD. ďakujeme za dôsledné posúdenie tejto učebnej pomôcky. Ich cenné pripomienky, rady a odporúčania prispeli ku zvýšeniu kvality tejto publikácie.

V Košiciach dňa 1. 11. 2013 Autori

Obsah

Kapitola 1

Približné riešenia rovníc a sústav rovníc

1.1 Približné riešenie rovníc $f(x) = 0$

V tejto kapitole sa budeme zaoberať hľadaním reálnych riešení (koreňov) rovnice

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

na konečnom intervale $I = \langle a; b \rangle$. Reálne číslo x^* nazývame riešením rovnice (1.1), ak platí $f(x^*) = 0$. U väčšiny rovníc však presné hodnoty koreňov nevieme nájsť. Numerická matematika však poskytuje aparát na nájdenie približných hodnôt koreňov. Číslo x nazývame *približnou hodnotou* alebo *aproximáciou koreňa* x^* s presnosťou ε, $\varepsilon > 0$, ak platí

$$|x^* - x| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

V niektorých prípadoch budeme rozlišovať rovnice algebraické a rovnice transcendentné. *Algebraickou rovnicou* stupňa n rozumieme rovnicu tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0, \tag{1.3}$$

t. j. rovnicu (1.1), v ktorej $f(x) \equiv P_n(x)$. Ak rovnica (1.1) nie je algebraická, hovoríme, že je *transcendentná*.

1.1.1 Separácia koreňov

Ak hľadáme riešenia rovnice (1.1), tak je potrebné určiť, koľko má rovnica koreňov a kde sa nachádzajú. *Separáciou koreňov* rovnice (1.1) rozumieme

- určenie počtu koreňov (príp. počtu koreňov istej vlastnosti) rovnice (1.1)
- určenie separačného intervalu pre každý koreň, pričom *separačným intervalom* koreňa x^* rozumieme taký interval $\langle a; b \rangle$, pre ktorý platí:
  - $f(x)$ je spojitá na $\langle a; b \rangle$,
  - $x^* \in (a; b)$,
  - okrem koreňa x^* v $\langle a; b \rangle$ neleží žiadny iný koreň.

Pri separácii s podporou počítača zväčša využívame program pre kreslenie grafu funkcie a fakt, že korene rovnice (1.1) sú x-ové súradnice priesečníkov grafu funkcie $y = f(x)$ s osou o_x. Necháme vykresliť graf funkcie $y = f(x)$ na vhodnom intervale $\langle x_d; x_h\rangle$ a určíme počet koreňov a ich separačné intervaly. Je však treba si uvedomiť, že

- $\langle x_d; x_h\rangle$ musí byť podmnožinou definičného oboru funkcie f, v opačnom prípade dôjde k predčasnému ukončeniu (pádu) programu,
- pri výpočte hodnôt funkcie f môže dôjsť vplyvom nevhodného výberu $\langle x_d; x_h\rangle$ k pretečeniu (napr. pri pokuse o výpočet hodnoty e^{89} alebo e^{-89} v type *real* v Turbo Pascale dôjde k predčasnému ukončeniu programu,
- graf kreslíme na konečnom intervale, a teda niektoré priesečníky (pri transcendentných rovniciach ich môže byť dokonca nekonečne veľa) grafu s o_x sa nezobrazia (pri algebraických rovniciach sa tomuto problému vieme vyhnúť - viď vetu 1.4).

Pri separácii koreňov rovníc môžeme využívať vety, ktoré sa týkajú počtu a polohy koreňov týchto rovníc. Uvedieme aspoň niektoré z nich.

Veta 1.1 *Nech funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$ a nech $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom má rovnica $f(x) = 0$ na intervale $(a; b)$ aspoň jeden koreň.*

Je treba si uvedomiť, že opačná veta neplatí. Napr. rovnica $\cos x - 1 = 0$ má v intervale $\langle -\pi, \pi\rangle$ koreň $x^* = 0$, ale $f(-\pi) \cdot f(\pi) = 4 > 0$.

Ak budeme testovať, či aproximácia koreňa spĺňa požadovanú presnosť, budeme často využívať nasledujúci jednoduchý dôsledok vety 1.1.

Dôsledok 1.1 *Nech funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$ a nech rovnica $f(x) = 0$ má v tomto intervale jediný koreň x^*. Nech čísla x a ε, $\varepsilon > 0$, sú také, že $\langle x - \varepsilon; x + \varepsilon\rangle \subset \langle a; b\rangle$. Ak $f(x - \varepsilon) \cdot f(x + \varepsilon) < 0$, tak x je aproximáciou koreňa x^* s presnosťou ε.*

Veta 1.2 *Algebraická rovnica nepárneho stupňa má aspoň jeden reálny koreň.*

Veta 1.3 *(Descartova veta) Počet kladných koreňov algebraickej rovnice (1.3) je rovný počtu znamienkových zmien v postupnosti koeficientov a_n, a_{n-1}, $\ldots a_1$, a_0 (nulové koeficienty neuvažujeme) alebo je o párny počet nižší.*

Vetu 1.3 môžeme využiť aj pri určovaní počtu záporných koreňov rovnice $P_n(x) = 0$. Stačí si uvedomiť, že ak x^* je kladný koreň rovnice $P_n(-x) = 0$, tak $-x^*$ je záporný koreň rovnice $P_n(x) = 0$.

Veta 1.4 *Pre každý koreň x^* algebraickej rovnice (1.3) platí*

$$|x^*| < 1 + \frac{A}{|a_n|}, \tag{1.4}$$

kde

$$A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}.$$

Z vety 1.4 vyplýva, že pri separácii koreňov rovnice (1.3) pomocou počítača stačí vykresliť graf funkcie na intervale $\langle x_d; x_h\rangle$, kde

$$x_d = -1 - \frac{A}{|a_n|} \qquad \text{a} \qquad x_h = 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

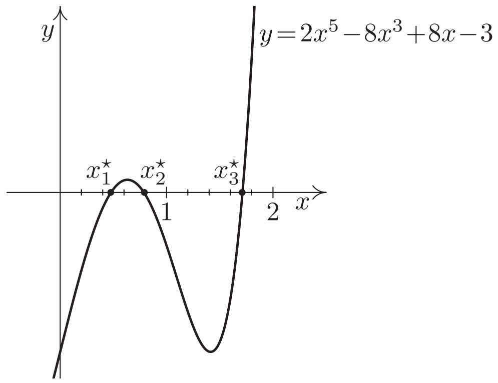
Separáciou získame len „hrubé“ hodnoty koreňov. Vypočítať aproximácie koreňov s danou prenosťou môžeme pomocou niektorej z metód popísaných v ďalšom.

Príklad 1.1. *Separujme korene rovnice* $2x^5 - 8x^3 + 8x - 3 = 0$.

Riešenie. V prostredí X(PLORE) nakreslíme graf funkcie $y = 2x^5 - 8x^3 + 8x - 3$ na intervale $\langle 0; 2\rangle$ príkazom

$$graph(2x\hat{\ }5 - 8x\hat{\ }3 + 8x - 3, x = 0 \text{ to } 2),$$

(pozri obr. 1.1).



Obr. 1.1: Obrázok k príkladu 1.1.

Graf funkcie pretína os o_x v bodoch x_1^*, x_2^*, x_3^*, a tak zadaná rovnica má práve tri korene. Pre každý koreň určíme separačný interval

$$x_1^* \in \langle 0{,}4; 0{,}6\rangle\,,\ x_2^* \in \langle 0{,}6; 1\rangle\,,\ x_3^* \in \langle 1{,}6; 1{,}8\rangle\,.$$

Príklad 1.2. *Určme interval, v ktorom sa nachádzajú všetky korene algebraickej rovnice* $2x^5 - 8x^3 + 8x - 3 = 0$.

Riešenie. Hľadaný interval určíme pomocou vzťahu (1.4), kde $A = \max\{|-8|\,, |8|\,, |-3|\} = 8$. Teda

$$\begin{aligned} x_d &= -1 - \frac{8}{|2|} = -5, \\ x_h &= 1 + \frac{8}{|2|} = 5. \end{aligned}$$

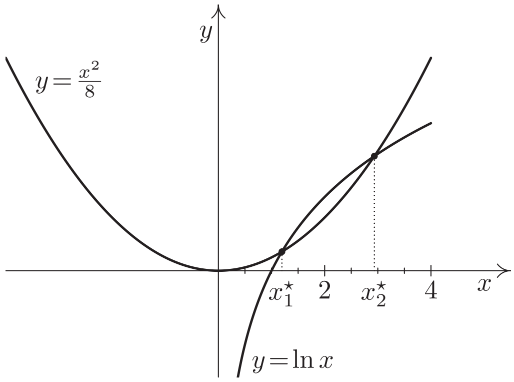
Všetky korene zadanej rovnice ležia v intervale $(-5; 5)$.

Príklad 1.3. *Grafickou metódou separujme reálne korene rovnice* $\ln x - \frac{x^2}{8} = 0$.

Riešenie. Upravíme danú rovnicu na ekvivalentný tvar $\ln x = \frac{x^2}{8}$ a nakreslíme grafy funkcií $y = \ln x$ a $y = \frac{x^2}{8}$. Z obr. 1.2 vidíme, že grafy týchto funkcií sa pretínajú v dvoch bodoch x_1^* a x_2^*.

Teda rovnica $\ln x - \frac{x^2}{8} = 0$ má dva korene

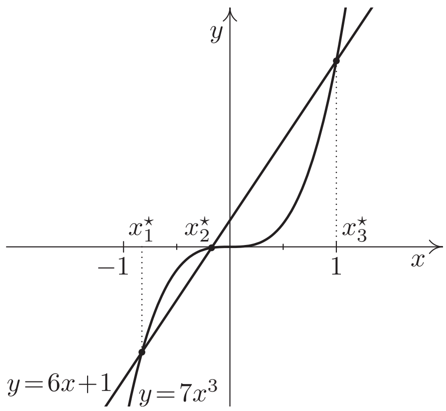
$$x_1^* \in \langle 1; 1{,}5\rangle \ \text{a} x_2^* \in \langle 2{,}5; 3{,}5\rangle\,.$$



Obr. 1.2: Obrázok k príkladu 1.3.

Príklad 1.4. *Grafickou metódou separujme reálne korene rovnice* $7x^3 - 6x - 1 = 0$.

Riešenie. Daná rovnica má zrejme reálny koreň $x = 1$. Zistíme, či rovnica má ešte ďalšie reálne korene. Upravíme rovnicu na ekvivalentný tvar $7x^3 = 6x + 1$ a nakreslíme grafy funkcií $y = 7x^3$ a $y = 6x + 1$. Z obr. 1.3 vidíme, že okrem bodu $x_3^* = 1$ sa grafy daných funkcií pretínajú aj v ďalších dvoch bodoch x_1^* a x_2^*.



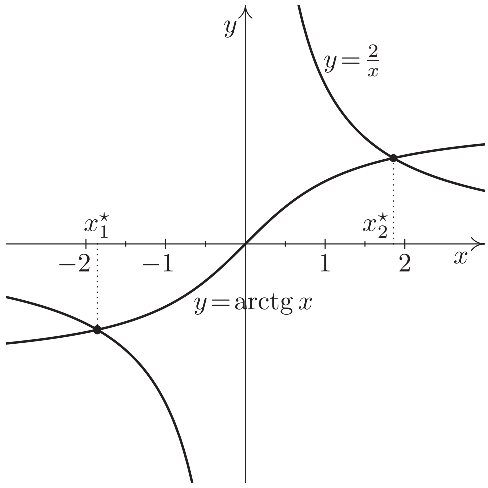
Obr. 1.3: Obrázok k príkladu 1.4.

Teda rovnica $7x^3 - 6x - 1 = 0$ má tri korene so separačnými intervalmi $x_1^* \in \langle -1; -0{,}5 \rangle$, $x_2^* \in \langle -0{,}5; 0 \rangle$, $x_3^* = 1$.

Príklad 1.5. *Grafickou metódou separujme záporný koreň rovnice* $x \cdot \operatorname{arctg} x - 2 = 0$.

Riešenie. Upravíme danú rovnicu na ekvivalentný tvar $\operatorname{arctg} x = \frac{2}{x}$ a nakreslíme grafy funkcií $y = \operatorname{arctg} x$ a $y = \frac{2}{x}$. Z obr. 1.4 vidíme, že grafy týchto funkcií sa pretínajú v dvoch bodoch x_1^* a x_2^*.

Teda rovnica $x \cdot \operatorname{arctg} x - 2 = 0$ má dva korene, pričom záporný koreň x_1^* leží v intervale $\langle -2; -1{,}5 \rangle$.



Obr. 1.4: Obrázok k príkladu 1.5.

Úlohy

V úlohách 1.1 – 1.10 separujte reálne korene rovnice.

1.1 $4x^3 - 2x^2 - 4x - 3 = 0$

1.2 $2x^4 + 4x^3 + 4x - 4 = 0$

1.3 $2x^5 - 8x^3 + 8x - 3 = 0$

1.4 $x^6 - 4x^4 + 4x^2 - 2 = 0$

1.5 $\dfrac{3}{x+1} - e^x = 0$

1.6 $\sqrt[3]{x+2} - x^2 = 0$

1.7 $e^{\frac{x}{2}} - x^2 + 2x + 1 = 0$

1.8 $\ln(x+7) - (x-1)^2 = 0$

1.9 $\log_6 x - 2x + 4 = 0$

1.10 $\operatorname{arctg}(x-1) - \dfrac{x^3}{20} = 0$

V úlohách 1.11 – 1.15 grafickou metódou separujte reálne korene rovnice.

1.11 $4 - xe^x = 0$

1.12 $e^{-2x} + 4 - x^2 = 0$

1.13 $\ln x - \dfrac{x^2}{9} = 0$

1.14 $\cos x - \dfrac{x}{2} = 0$

1.15 $\operatorname{arctg} x - x + 3 = 0$

V úlohách 1.16 – 1.20 grafickou metódou separujte daný reálny koreň rovnice.

1.16 $2x^3 + 3x^2 - 0{,}7 = 0$, najväčší záporný koreň

1.17 $e^x - 3x - 11 = 0$, záporný koreň

1.18 $2x - \ln x - 7 = 0$, najmenší koreň

1.19 $\sin x - 2x^2 + 8x - 6 = 0$, maximálny koreň

1.20 $\dfrac{x^2}{5} - \operatorname{arctg} x = 0$, najväčší koreň

1.1.2 Metóda bisekcie

Predpokladajme, že hľadáme koreň x^* rovnice (1.1). Nech separačný interval koreňa x^* je interval $\langle a; b\rangle$ a nech $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ak rozdelíme interval $\langle a; b\rangle$ na polovice, tak môžu nastať tri prípady. Koreň x^* leží (presne) v strede intervalu, koreň leží v ľavej polovici intervalu $\langle a; b\rangle$, koreň leží v pravej polovici intervalu $\langle a; b\rangle$. O tom, že tento postup môžeme v prípade potreby zopakovať a spresniť polohu koreňa x^* hovorí nasledujúca veta.

Veta 1.5 *Nech x^* je koreň rovnice $f(x) = 0$ a nech interval $\langle a; b\rangle$ je jeho separačný interval. Nech $f(a) \cdot f(b) < 0$. Hľadajme postupnosť intervalov $\{\langle a_k; b_k\rangle\}$ a postupnosť bodov $\{x_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ nasledovne.*

1. *Pre $k = 0$ položíme $a_0 = a$, $b_0 = b$.*
2. *Ak je definovaný interval $\langle a_k; b_k\rangle$, položíme*
$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2},$$
teda x_k je stred intervalu $\langle a_k; b_k\rangle$.
3. *Ak je $f(x_k) = 0$, tak ďalší interval nevytvárame, pretože x_k je presná hodnota koreňa. Ak je $f(a_k) \cdot f(x_k) < 0$, tak položíme $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$ (podľa vety 1.1 koreň leží v intervale $\langle a_k; x_k\rangle$). Ak je $f(x_k) \cdot f(b_k) < 0$, tak položíme $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$ (podľa vety 1.1 koreň leží v intervale $\langle x_k; b_k\rangle$).*

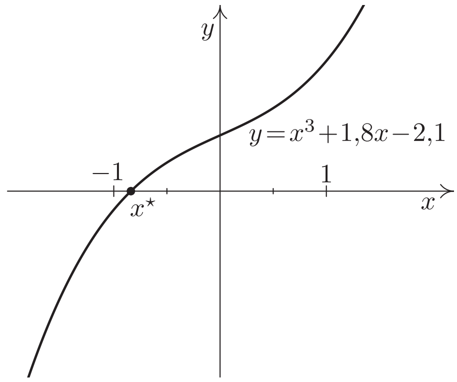
Ak je postupnosť $\{x_k\}$ konečná, tak jej posledný člen je koreň x^*. Ak je postupnosť $\{x_k\}$ nekonečná, tak má limitu a platí
$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$
Navyše pre každé $k = 0, 1, 2, \dots$ platí
$$|x^* - x_k| = \frac{b-a}{2^{k+1}}. \tag{1.5}$$

Príklad 1.6. *Bisekciou vypočítajme všetky reálne korene rovnice $x^3 + 1{,}8x + 2{,}1 = 0$ s presnosťou $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$.*

Riešenie. Na určenie polohy koreňov rovnice použijeme vzťah (1.4), kde $A = \max\{|1{,}8|, |2{,}1|\} = 2{,}1$, teda pre každý koreň x^* rovnice platí $|x^*| < 1 + \frac{2{,}1}{1} = 3{,}1$. Preto všetky reálne korene rovnice ležia v intervale $(-3{,}1; 3{,}1)$.

V programe X(PLORE) nakreslíme graf funkcie $f(x) = x^3 + 1{,}8x + 2{,}1$ príkazom
$$\mathit{graph}(x\hat{}3 + 1.8x + 2.1, x = -3.1 \text{ to } 3.1)$$
(pozri obr. 1.5.) Graf funkcie $y = f(x)$ pretína os o_x práve v jednom bode, a tak zadaná rovnica má práve jeden koreň. Separačný interval koreňa x^* je $\langle -1; -0{,}5\rangle$.

Pretože $f(-1) < 0$ a $f(-0{,}5) > 0$, je $f(-1) \cdot f(-0{,}5) < 0$, a tak položíme $a_0 = -1$, $b_0 = -0{,}5$. Vypočítame
$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = -0{,}75.$$
Keďže $f(x_0 - 0{,}005) \cdot f(x_0 + 0{,}005) = f(-0{,}755) \cdot f(-0{,}745) = 0{,}1073 > 0$, pokračujeme výpočtom ďalšej aproximácie. Pretože hodnota $f(x_0) = f(-0{,}75) = 0{,}3281$, je $f(a_0) \cdot f(x_0) < 0$, a tak položíme $a_1 = a_0 = -1$, $b_1 = x_0 = -0{,}75$. Nasledujúca aproximácia je
$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = -0{,}875.$$
Rovnako postupujeme aj v ďalších krokoch. Výsledky výpočtov sú v nasledujúcej tabuľke.



Obr. 1.5: Obrázok k príkladu 1.6.

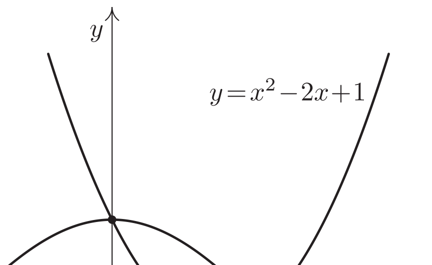
k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$	$f(x_k - \varepsilon) \cdot f(x_k + \varepsilon)$
0	-1	-0,5	-0,75	0,3281	0,1073
1	-1	-0,75	-0,875	-0,1449	0,0206
2	-0,875	-0,75	-0,8125	0,1011	0,0099
3	-0,875	-0,8125	**-0,8438**	-0,0194	-0,00001

Pretože $f(x_3 - 0{,}005) \cdot f(x_3 + 0{,}005) < 0$, podľa dôsledku 1.1 sme získali hľadaný koreň

$$x^* \doteq x_3 = -0{,}8438.$$

Príklad 1.7. *Bisekciou vypočítajme najväčší koreň rovnice* $\cos x - x^2 + 2x - 1 = 0$ *s presnosťou* $\varepsilon = 10^{-2}$.

Riešenie. Korene zadanej rovnice odseparujeme grafickou metódou. Rovnicu upravíme na ekvivalentný tvar $\cos x = x^2 - 2x + 1$ a nakreslíme grafy funkcií $y = \cos x$ a $y = x^2 - 2x + 1$. Z obr. 1.6 vidíme, že grafy týchto funkcií sa pretínajú v dvoch bodoch x_1^* a x_2^*. Ich separačné intervaly sú $x_1^* \in \langle -0{,}5; 0{,}5 \rangle$ a $x_2^* \in \langle 1; 1{,}5 \rangle$.



Obr. 1.6: Obrázok k príkladu 1.7.

Vzhľadom na zadanie príkladu výpočet vykonáme iba pre väčší koreň $x^* = x_2^*$. Keďže $f(1) \cdot f(1{,}5) = 0{,}540 \cdot (-0{,}179) < 0$, položíme $a_0 = 1$, $b_0 = 1{,}5$. Výsledky výpočtov sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$	$f(x_k - \varepsilon) \cdot f(x_k + \varepsilon)$
0	1	1,5	1,25	0,253	0,064
1	1,25	1,5	1,375	0,054	0,003
2	1,375	1,5	1,438	-0,059	0,003
3	1,375	1,438	**1,406**	-0,001	-0,0003

Pretože $f(x_3 - 0{,}01) \cdot f(x_3 + 0{,}01) < 0$, podľa dôsledku 1.1 hľadaný koreň x_2^* nadobúda približnú hodnotu

$$x_2^* \doteq x_2^{(3)} = 1{,}406.$$

Úlohy

V úlohách 1.21 – 1.40 bisekciou vypočítajte dané reálne korene rovnice s presnosťou ε.

1.21 $x^3 - x - 1 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$

1.22 $2x^3 + 3x^2 - 0{,}5 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-3}$

1.23 $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 0$, najmenší koreň, $\varepsilon = 10^{-2}$

1.24 $x^3 + 0{,}9x^2 + 1{,}1x - 7{,}8 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-3}$

1.25 $x^3 - 0{,}2x^2 - 2{,}3x - 1{,}6 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$

1.26 $x^4 - 6x - 1 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 7 \cdot 10^{-3}$

1.27 $2x^4 - 2x^3 - x^2 + 0{,}5 = 0$, najmenší kladný koreň, $\varepsilon = 10^{-2}$

1.28 $x^5 - x - 4 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.29 $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 2 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-2}$

1.30 $5{,}7x - 3^x = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.31 $4 - xe^x = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$

1.32 $e^x - 3x - 7 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.33 $e^{x^2} - 0{,}5x - 2 = 0$, najväčší koreň, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.34 $\ln x - x + 5 = 0$, najväčší koreň, $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-3}$

1.35 $\ln x - \dfrac{x^2}{8} = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-3}$

1.36 $x + \sin x - 3 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-3}$

1.37 $\sin 2x + x + 1 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-3}$

1.38 $\cos x - x^2 - 0{,}5 = 0$, záporný koreň, $\varepsilon = 9 \cdot 10^{-3}$

1.39 $\operatorname{tg} x + 6x - 2 = 0$, najmenší kladný koreň, $\varepsilon = 10^{-2}$

1.40 $\operatorname{arctg}(x + 1) + x = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$

1.1.3 Iteračná metóda

Upravme rovnicu (1.1) tak, aby sme získali ekvivalentnú rovnicu tvaru

$$x = g(x). \tag{1.6}$$

Zvoľme počiatočné priblíženie $x_0 \in \langle a; b\rangle$ a ďalšie členy postupnosti $\{x_k\}$ počítajme podľa vzťahu

$$x_{k+1} = g(x_k), \qquad k = 0, 1, \dots \tag{1.7}$$

O tom, za akých podmienok získaná postupnosť $\{x_k\}$ konverguje k riešeniu rovnice (1.6), a teda aj riešeniu rovnice (1.1), hovorí nasledujúca veta.

Veta 1.6 *Nech funkcia $g(x)$ je spojitá na intervale $\langle a; b\rangle$ a zobrazuje interval $\langle a; b\rangle$ do seba, t. j.*

$$\text{pre každé } x \in \langle a; b\rangle \text{ je } g(x) \in \langle a; b\rangle. \tag{1.8}$$

Nech existuje spojitá $g'(x)$ na $(a; b)$ a číslo q, $0 \le q < 1$, také, že

$$|g'(x)| \le q \qquad \text{pre každé } x \in (a; b). \tag{1.9}$$

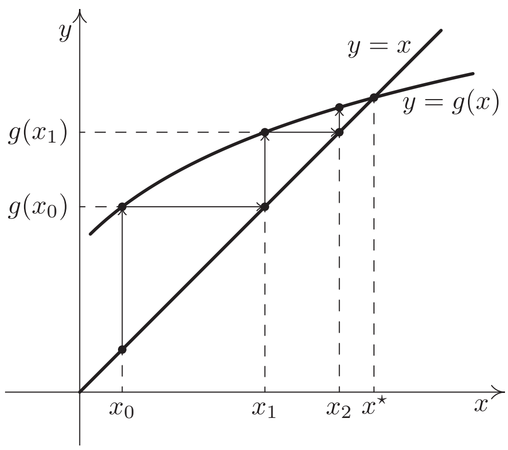
Potom pre ľubovoľnú voľbu počiatočnej aproximácie $x_0 \in \langle a; b\rangle$

1. *rovnica* (1.6) *má jediné riešenie x^* na $\langle a; b\rangle$,*
2. *postupnosť $\{x_k\}$ daná vzťahom* (1.7) *konverguje ku x^*, t. j.*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*,$$

3. *pre každé $k \ge 1$ platí*

$$|x^* - x_k| = \frac{q}{1-q}|x_k - x_{k-1}| \quad a \quad |x^* - x_k| = \frac{q^k}{1-q}|x_1 - x_0|.$$



Obr. 1.7: Iteračná metóda.

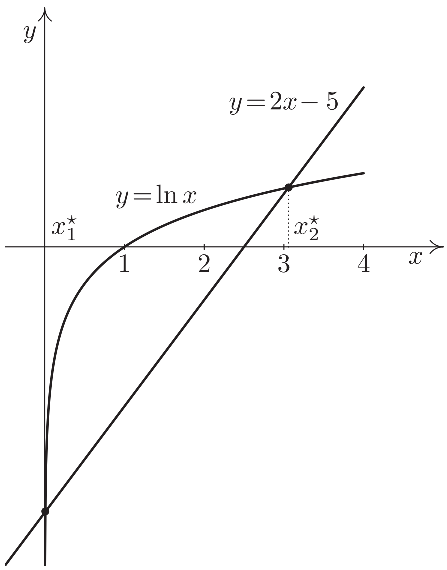
Rýchlosť konvergencie iteračnej metódy závisí na hodnote q (teda na hodnotách $|g'(x)|$). Pre $q \to 0^+$ metóda konverguje rýchlo, pre $q \to 1^-$ zasa pomaly.

Príklad 1.8. *Iteračnou metódou vypočítajme všetky reálne korene rovnice* $2x - \ln x - 5 = 0$ *s presnosťou* $\varepsilon = 10^{-4}$.

Riešenie. Korene zadanej rovnice môžeme separovať grafickou metódou. Upravíme rovnicu na ekvivalentný tvar $2x - 5 = \ln x$ a nakreslíme grafy funkcií $y = 2x - 5$, $y = \ln x$ (pozri obr. 1.8).
Na obr. 1.8 vidíme, že rovnica má dva korene x_1^* a x_2^*, kde $x_2^* \in \langle 3; 4\rangle$. Separačný interval koreňa x_1^* spresníme tabuľkou hodnôt funkcie $f(x) = 2x - \ln x - 5$.

x	0,001	0,01
$f(x)$	1,90976	-0,37483

Z tabuľky je zrejmé, že $x_1^* \in \langle 0{,}001; 0{,}01\rangle$.



Obr. 1.8: Obrázok k príkladu 1.8.

Upravíme rovnicu $2x - \ln x - 5 = 0$ na tvar $x = \frac{\ln x + 5}{2}$ a zistíme, či funkcia $g(x) = \frac{\ln x + 5}{2}$ spĺňa na separačných intervaloch predpoklady vety 1.6. Platí $g'(x) = \frac{1}{2x}$. Funkcia $g(x)$ je spojitá na intervaloch $\langle 0{,}001; 0{,}01\rangle$, $\langle 3; 4\rangle$ a spojite diferencovateľná na intervaloch $(0{,}001; 0{,}01)$, $(3; 4)$.

Pre $0{,}001 \leq x \leq 0{,}01$ je $g(x) \in \langle -0{,}95387; 1{,}19741\rangle$, a tak nie je splnený predpoklad (1.8) vety 1.6. Preto navrhovaná úprava zadanej rovnice na separačnom intervale $\langle 0{,}001; 0{,}01\rangle$ nie je vhodná. Z tohoto dôvodu upravíme zadanú rovnicu $2x - \ln x - 5 = 0$ na tvar $x = e^{2x-5}$. Funkcia $h(x) = e^{2x-5}$ je spojitá na $\langle 0{,}001; 0{,}01\rangle$ a $h'(x) = 2e^{2x-5}$ je spojitá funkcia na $(0{,}001; 0{,}01)$. Pre $0{,}001 \leq x \leq 0{,}01$ je $h(x) \in \langle 0{,}00676; 0{,}00687\rangle \subset \langle 0{,}001; 0{,}01\rangle$ a $|h'(x)| \in \langle 0{,}01351; 0{,}01374\rangle$, a tak $|h'(x)| \leq 0{,}013746 < 1$. Predpoklady vety 1.6 sú splnené, teda aproximácie koreňa x_1^* budeme počítať vzťahom

$$x_1^{(k+1)} = e^{2x_1^{(k)}-5}, \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Za začiatočnú aproximáciu koreňa x_1^* môžeme zvoliť ľubovoľnú hodnotu z intervalu $\langle 0{,}001; 0{,}01\rangle$. Zvolíme napríklad stred separačného intervalu $x_1^{(0)} = 0{,}0055$. Keďže

$$f(x_1^{(0)} - 0{,}0001) \cdot f(x_1^{(0)} + 0{,}0001) = f(0{,}0054) \cdot f(0{,}0056) = 0{,}04555 > 0,$$

pokračujeme výpočtom ďalšej aproximácie

$$x_1^{(1)} = e^{2x_1^{(0)}-5} = 0{,}00681.$$

Pretože

$$f(x_1^{(1)} - 0{,}0001) \cdot f(x_1^{(1)} + 0{,}0001) = f(0{,}00671) \cdot f(0{,}00691) = -0{,}00020 < 0,$$

výpočet ukončíme a položíme

$$x_1^* \doteq x_1^{(1)} = 0{,}00681.$$

Zaoberajme sa teraz výpočtom druhého koreňa $x_2^* \in \langle 3; 4\rangle$. Pre $3 \leq x \leq 4$ je $g(x) \in \langle 3{,}04931; 3{,}19314\rangle \subset \langle 3; 4\rangle$ a $|g'(x)| \in \left\langle \frac{1}{8}; \frac{1}{6}\right\rangle$, teda $|g'(x)| \leq \frac{1}{6} < 1$. Predpoklady vety 1.6 sú splnené, teda aproximácie koreňa x_2^* budeme počítať pomocou vzťahu

$$x_2^{(k+1)} = \frac{\ln x_2^{(k)} + 5}{2}, \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zvolíme začiatočnú aproximáciu koreňa x_2^*, napríklad $x_2^{(0)} = 3{,}5$. Potom nasledujúca aproximácia je

$$x_2^{(1)} = \frac{\ln x_2^{(0)} + 5}{2} = 3{,}12638.$$

Pretože $f(x_2^{(1)} - 0{,}0001) \cdot f(x_2^{(1)} + 0{,}0001) = f(3{,}12628) \cdot f(3{,}12648) = 0{,}01274 > 0$, pokračujeme vo výpočte ďalšej aproximácie

$$x_2^{(2)} = \frac{\ln x_2^{(1)} + 5}{2} = 3{,}06994.$$

Výsledky výpočtov sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

k	$x_2^{(k)}$	$f(x_2^{(k)} - \varepsilon) \cdot f(x_2^{(k)} + \varepsilon)$
0	3,5	0,55836
1	3,12638	0,01274
2	3,06994	0,00033
3	3,06083	0,00001
4	3,05934	0,0000002
5	**3,05910**	-0,00000002

Pretože $f(x_2^{(5)} - 0{,}0001) \cdot f(x_2^{(5)} + 0{,}0001) < 0$, podľa dôsledku 1.1 sme získali hľadaný koreň x_2^*. Platí

$$x_2^* \doteq x_2^{(5)} = 3{,}05910.$$

Príklad 1.9. *Iteračnou metódou vypočítajme všetky reálne korene rovnice* $x^3 - 5x - 5 = 0$ *s presnosťou* $\varepsilon = 10^{-4}$.

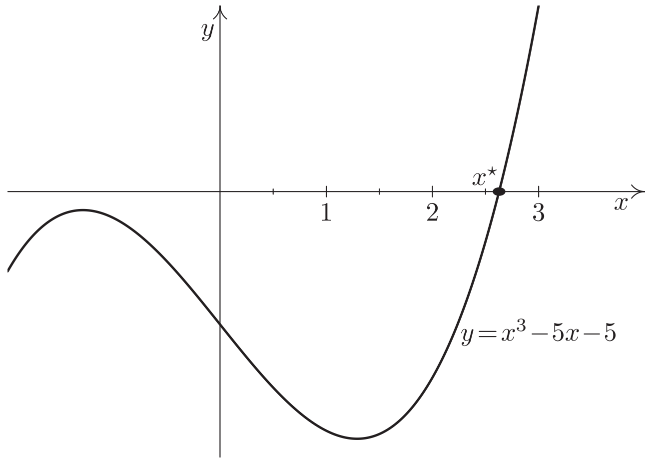
Riešenie. Všetky reálne korene algebraickej rovnice $x^3 - 5x - 5 = 0$ ležia podľa vety 1.4 v intervale

$$|x^*| < 1 + \frac{\max\{|-5|\,;|-5|\}}{|1|} = 6,$$

teda $x^* \in (-6; 6)$. V programe X(PLORE) nakreslíme graf funkcie $f(x) = x^3 - 5x - 5$ na intervale $\langle -6; 6\rangle$ príkazom

$$graph(x\verb|^|3 - 5x - 5, x = -6 \text{ to } 6)$$

(pozri obr. 1.9). Graf funkcie $f(x)$ pretína os o_x práve v jednom bode, a tak daná rovnica má jediný koreň x^*. Nech separačný interval koreňa je $x^* \in \langle 2; 3\rangle$.



Obr. 1.9: Obrázok k príkladu 1.9.

Upravíme zadanú rovnicu na tvar $x = \frac{x^3-5}{5}$. Funkcia $g(x) = \frac{x^3-5}{5}$ je spojitá na intervale $\langle 2; 3\rangle$ a jej derivácia $g'(x) = \frac{3x^2}{5}$ je spojitá na $(2; 3)$. Avšak pre $2 \le x \le 3$ je $\frac{3}{5} \le g(x) \le \frac{22}{5}$. Keďže $\left\langle \frac{3}{5}; \frac{22}{5}\right\rangle \not\subset \langle 2; 3\rangle$, predpoklad (1.8) vety 1.6 nie je splnený, a tak navrhovaná úprava rovnice nie je vhodná.

Zadanú rovnicu teda upravíme na iný tvar, a to na $x = \sqrt[3]{5x+5}$. Funkcia $h(x) = \sqrt[3]{5x+5}$ je spojitá na $\langle 2; 3\rangle$ a spojite diferencovateľná na $(2; 3)$. Pre $2 \le x \le 3$ je $h(x) \in \left\langle \sqrt[3]{15}; \sqrt[3]{20}\right\rangle \subset \langle 2; 3\rangle$ a pre funkciu $h'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x+5)^2}}$ platí, že $|h'(x)| \le \max\limits_{x\in\langle 2;3\rangle} |h'(x)| < 0{,}27403 < 1$. Predpoklady vety 1.6 sú splnené.

Zvolíme začiatočnú aproximáciu koreňa x^*, napríklad $x_0 = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$. Nasledujúce aproximácie počítame pomocou vzťahu

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{5x_k + 5}, \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Výsledky výpočtov sú zaznamenané v nasledujúcej tabuľke.

k	x_k	$f(x_k - \varepsilon) \cdot f(x_k + \varepsilon)$
0	2,5	3,51562
1	2,59625	0,23159
2	2,61983	0,01390
3	2,62555	0,00081
4	2,62693	0,00005
5	2,62726	0,0000003
6	**2,62734**	-0,000002

Pretože $f(x_6 - 0{,}0001) \cdot f(x_6 + 0{,}0001) < 0$, výpočet ukončíme a hľadaný koreň položíme

$$x^* \doteq x_6 = 2{,}62734.$$

Úlohy

V úlohách 1.41 – 1.60 iteračnou metódou vypočítajte dané reálne korene rovnice s presnosťou ε.

1.41 $x^2 - 4x - 15 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-2}$

1.42 $2x^3 - 5x - 2 = 0$, najmenší koreň, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$

1.43 $x^4 - x - 1 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.44 $x^4 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.45 $x^5 - 3x - 1 = 0$, kladný koreň, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.46 $\dfrac{1}{1+x^2} - x - 3 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.47 $x\sqrt{x+1} = 3$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.48 $e^x - 2 + x = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$

1.49 $2x^3 - e^x = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.50 $e^{2x} + x = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-2}$

1.51 $e^{-x} - 15 + x^2 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.52 $2{,}3x - 2^x = 0$, najmenší kladný koreň, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.53 $2x^3 - 3^x = 0$, najmenší koreň, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.54 $2x - \ln x - 7 = 0$, najväčší koreň, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.55 $2\ln x - \dfrac{1}{x} = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.56 $3x - \log x - 6 = 0$, najväčší koreň, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$

1.57 $x - \sin x - 0{,}75 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$

1.58 $\operatorname{tg} x + 7x - 7 = 0$, najmenší kladný koreň, $\varepsilon = 10^{-4}$

1.59 $x^2 - \operatorname{arctg} x = 0$, najväčší koreň, $\varepsilon = 10^{-4}$

1.60 $\operatorname{arctg}(2x - 3) + x - 5{,}7 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.1.4 Newtonova metóda

Hľadajme taký tvar $x = g(x)$ rovnice (1.1), aby iteračná metóda konvergovala rýchlo, teda aby $|g'(x)|$ bola v okolí koreňa x^* blízka nule. Nech $f(x)$ je dvakrát diferencovateľná a $f'(x) \neq 0$ na $\langle a; b\rangle$. Vynásobme rovnicu (1.1) funkciou $\frac{-1}{f'(x)}$ a pripočítajme k takto upravenej rovnici x. Máme

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad \text{teda} \qquad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

a

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Pretože $f(x^*) = 0$, tak

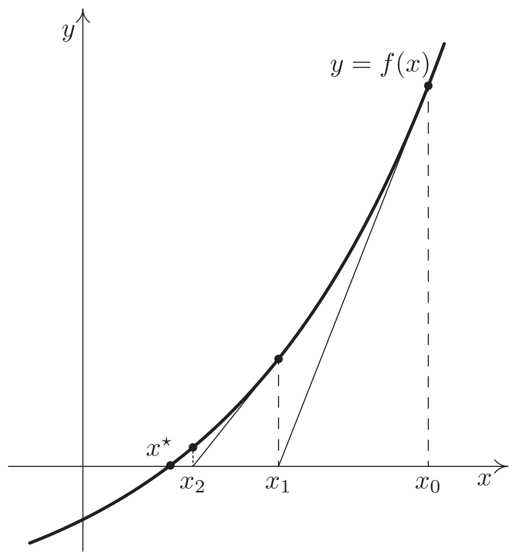
$$g'(x^*) = 1 - \frac{(f'(x^*))^2 - f(x^*)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 1 - \frac{(f'(x^*))^2}{(f'(x^*))^2} = 0.$$

A teda na okolí bodu x^* by mala byť $g'(x)$ blízka nule. Sformulujeme teraz príslušnú vetu.

Veta 1.7 *Nech x^* je koreň rovnice $f(x) = 0$ a $\langle a; b\rangle$ je jeho separačný interval. Nech $f(x)$ je dvakrát diferencovateľná a $f'(x)$, $f''(x)$ sú nenulové a nemenia znamienko na $\langle a; b\rangle$. Ak bod $x_0 \in \langle a; b\rangle$ je taký, že $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, a*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \textit{pre } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

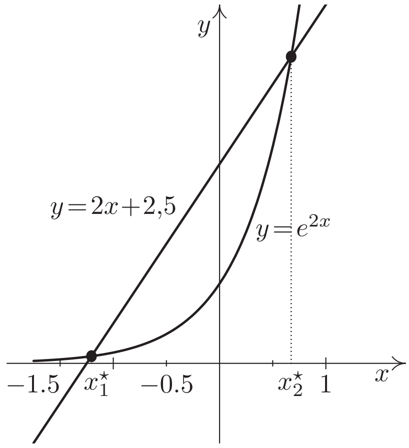
tak postupnosť $\{x_k\}$ konverguje ku x^*, t. j. $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.



Obr. 1.10: Newtonova metóda.

Príklad 1.10. *Newtonovou metódou vypočítajme kladný koreň rovnice* $e^{2x} - 2x - 2{,}5 = 0$ *s presnosťou* $\varepsilon = 10^{-3}$.

Riešenie. Zadanú rovnicu upravíme na ekvivalentný tvar $e^{2x} = 2x + 2{,}5$ a nakreslíme grafy funkcií $y = e^{2x}$ a $y = 2x + 2{,}5$. Z obr. 1.11 vidíme, že grafy týchto funkcií sa pretínajú v dvoch bodoch x_1^* a x_2^*. Nás však zaujíma iba kladný koreň zadanej rovnice $x_2^* = x^*$, ktorého separačný interval je $x^* \in \langle 0; 1\rangle$.



Obr. 1.11: Obrázok k príkladu 1.10.

Vypočítame derivácie $f'(x)$, $f''(x)$ a odhadneme ich hodnoty na intervale $\langle 0; 1\rangle$. Funkcia $f'(x) = 2e^{2x} - 2$ nespĺňa na intervale $\langle 0; 1\rangle$ podmienku $f'(x) \neq 0$, pretože $f'(0) = 0$. Preto upravíme separačný interval napríklad na tvar $\langle 0{,}2; 1\rangle$.

Odhadneme hodnoty najskôr prvej derivácie $f'(x) = 2e^{2x} - 2$. Keďže $0{,}2 \leq x \leq 1$, tak $2e^{0{,}4} - 2 \leq 2e^{2x} - 2 \leq 2e^2 - 2$, teda $f'(x) \geq 2e^{0{,}4} - 2 > 0$.

Pre $x \in \mathbb{R}$ je $f''(x) = 4e^{2x} > 0$.

Zvolíme začiatočnú aproximáciu x_0 tak, aby $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Keďže $f(1) \cdot f''(1) > 0$, položíme $x_0 = 1$ a vypočítame nasledujúce aproximácie pomocou vzťahu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \text{pre} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Teda

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{2{,}8891}{12{,}7781} = 0{,}7739.$$

Pretože $f(x_1 - 0{,}001) \cdot f(x_1 + 0{,}001) > 0$, počítame ďalšiu aproximáciu x_2

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}7739 - \frac{0{,}6534}{7{,}4023} = 0{,}6856.$$

Opäť $f(x_2 - 0{,}001) \cdot f(x_2 + 0{,}001) > 0$, a tak pokračujeme vo výpočte nasledujúcej aproximácie. Výsledky výpočtov sú uvedené v tabuľke.

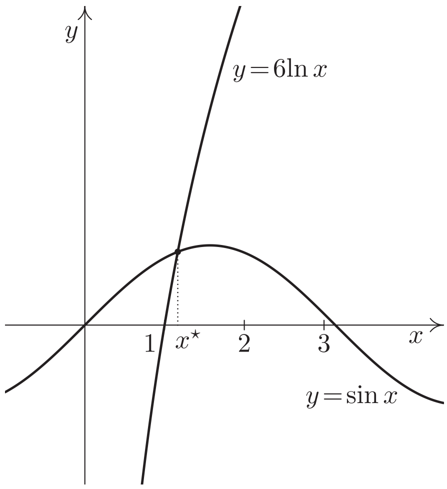
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$f(x_k - \varepsilon) \cdot f(x_k + \varepsilon)$
0	1	2,8891	12,7781	8,3466
1	0,7739	0,6534	7,4023	0,4268
2	0,6856	0,0691	5,8808	0,0047
3	**0,6739**			-0,00003

Pretože $f(x_3 - 0{,}001) \cdot f(x_3 + 0{,}001) < 0$, pre hľadaný koreň x^* platí

$$x^* \doteq x_3 = 0{,}6739.$$

Príklad 1.11. *Newtonovou metódou vypočítajme všetky korene rovnice* $\sin x - 6\ln x = 0$ *s presnosťou* $\varepsilon = 10^{-3}$.

Riešenie. Korene zadanej rovnice odseparujeme grafickou metódou. Upravíme zadanú rovnicu $\sin x - 6\ln x = 0$ na ekvivalentný tvar $\sin x = 6\ln x$ a nakreslíme grafy funkcií $y = \sin x$, $y = 6\ln x$ (pozri obr. 1.12). Grafy funkcií sa pretínajú v jednom bode, teda zadaná rovnica má práve jeden koreň $x^* \in \langle 1; 2\rangle$.



Obr. 1.12: Obrázok k príkladu 1.11.

Nech $f(x) = \sin x - 6\ln x$. Vypočítame $f'(x)$, $f''(x)$ a odhadneme ich hodnoty na intervale $\langle 1; 2\rangle$. Platí $f'(x) = \cos x - \frac{6}{x}$ a $f''(x) = -\sin x + \frac{6}{x^2}$. Pretože pre každé $x \in \mathbb{R}$ je $-1 \le \sin x \le 1$ a $-1 \le \cos x \le 1$, tak pre $1 \le x \le 2$ je $-7 \le \cos x - \frac{6}{x} \le -2$ a $\frac{1}{2} \le -\sin x + \frac{6}{x^2} \le 7$. Teda $f'(x) \le -2 < 0$ a $f''(x) \ge \frac{1}{2} > 0$ na separačnom intervale $\langle 1; 2\rangle$.

Keďže je $f''(x) > 0$ na separačnom intervale $\langle 1; 2\rangle$, zvolíme začiatočnú aproximáciu x_0 tak, aby $f(x_0) > 0$. Nech napríklad $x_0 = 1$. Hodnoty aproximácií sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$f(x_k - \varepsilon) \cdot f(x_k + \varepsilon)$
0	1	0,8415	-5,4597	0,7080
1	1,1541	0,0544	-4,7940	0,0029
2	**1,1655**			-0,00002

Pretože $f(x_2 - 0{,}001) \cdot f(x_2 + 0{,}001) < 0$, výpočet ukončíme a položíme

$$x^* \doteq x_2 = 1{,}1655.$$

Úlohy

V úlohách 1.61 – 1.80 Newtonovou metódou vypočítajte dané reálne korene rovnice s presnosťou ε.

1.61 $x^3 - 5x + 3{,}6 = 0$, najmenší koreň, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.62 $2x^3 + x^2 - 4 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-4}$

1.63 $x^4 + 3x^2 - 5 = 0$, kladný koreň, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.64 $x^4 - (x+3)^2 = 0$, záporný koreň, $\varepsilon = 10^{-2}$

1.65 $x^5 - x^3 - 8 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$

1.66 $x \cdot 2^x - 6{,}3 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-2}$

1.67 $17 - xe^x = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.68 $(x-1)^2 - \dfrac{e^x}{3} = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.69 $e^{2x} - 2x - 2{,}5 = 0$, záporný koreň, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.70 $e^{-x^2} - 2 + x^2 = 0$, najmenší koreň, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.71 $e^{-x} - \ln x = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$

1.72 $\ln x + 2x - 4 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-6}$

1.73 $2x - \log x - 7 = 0$, najväčší koreň, $\varepsilon = 10^{-2}$

1.74 $\sin x + 2x - 7{,}5 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.75 $x^2 - 4\sin x - 1 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.76 $\sin \dfrac{x}{2} + 4 - x^2 = 0$, najväčší koreň, $\varepsilon = 10^{-2}$

1.77 $\cos x - x^4 = 0$, najmenší koreň, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.78 $\cos x + x^2 - 4x + 3 = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-6}$

1.79 $\operatorname{arctg} x - x^2 + 4x - 3 = 0$, najmenší koreň, $\varepsilon = 10^{-3}$

1.80 $\operatorname{arctg}(x+2) - e^{-x} = 0$, všetky korene, $\varepsilon = 10^{-3}$

Popísali sme tri metódy pre približné riešenie jednej rovnice o jednej neznámej. Bisekcii sa vyčíta najmä jej pomalá konvergencia. Pri súčasnej vysokej výkonnosti bežne používaných počítačov však tento argument stráca váhu. Naopak, jej veľkou výhodou je jednoduchosť a malá náročnosť na overovanie podmienok konvergencie, a preto jej použitie možno jednoznačne doporučiť. Nevýhodou iteračnej a Newtonovej metódy je náročná prípravná fáza (výpočet derivácií, ich ohraničenie). Je síce pravda, že aj túto časť riešenia úlohy je možné zveriť počítaču, ale táto cesta je programátorsky veľmi náročná (pokiaľ chceme, aby boli výsledky nespochybniteľné).