



Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť/
Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

PODPORNÝ KURZ ZO ZÁKLADOV VYSOKOŠKOLSKEJ MATEMATIKY

Strojnícka fakulta

Miriám Andrejiová
Zuzana Kimáková



Táto publikácia vznikla za finančnej podpory z **Európskeho sociálneho fondu** v rámci Operačného programu **VZDELÁVANIE**.

Prioritná os 1 Reforma vzdelávania a odbornej prípravy

Opatrenie 1.2 Vysoké školy a výskum a vývoj ako motory rozvoja vedomostnej spoločnosti.

Názov projektu: Balík inovatívnych prvkov pre reformu vzdelávania na TUKE

Autori: Miriam Andrejiová

Zuzana Kimáková

ISBN 978-80-553-1124-1

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

Za odbornú a obsahovú stránku zodpovedajú autori.



Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť/
Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

PODPORNÝ KURZ ZO ZÁKLADOV VYSOKOŠKOLSKÉJ MATEMATIKY

Strojnícka fakulta

Miriám Andrejiová
Zuzana Kimáková



Európska únia
Európsky sociálny fond



Agentúra
Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu SR
pre štrukturálne fondy EÚ



Predhovor

Matematický základ je nevyhnutnou podmienkou pre zvládnutie moderných technických disciplín. Na vysokú školu prichádzajú študenti, ktorých vedomosti z matematiky sú rozdielne. Súvisí to jednak s typom strednej školy, ktorú ukončili, jednak aj s rozsahom hodín výučby matematiky na jednotlivých školách. Túto zbierku sme pripravili s cieľom uľahčiť študentom zvládnutie matematiky v prvom ročníku štúdia na Technickej univerzite v Košiciach.

Zbierka je rozdelená do štyroch kapitol. V každej kapitole je teoretická časť, riešené príklady a úlohy na precvičenie. Veríme, že množstvo riešených príkladov bude dostatočnou motiváciou na samostatné počítanie. Matematike je treba jednak rozumieť a jednak mať zručnosti v počítaní, ktoré sa dajú získať len a len precvičovaním. Samozrejme, že nemôžeme žiadať, aby každý bol matematikom resp., aby všetci mali radi matematiku. Avšak matematika by nemala byť strašiakom, pretože aj keď to mnohí neradi pripúšťajú, pomáha chápať veci okolo nás. Učí logicky myslieť, presne sa vyjadrovať a zdôvodňovať tvrdenia.

Čitateľovi by sme tiež radi dali do pozornosti publikáciu *Prípravný kurz zo stredoškolskej matematiky*, A. Feňovčíková, G. Ižariková, TUKE, Košice 2012. Zbierka obsahuje množstvo riešených príkladov a neriešených úloh zo stredoškolskej matematiky. Môže poslúžiť na zopakovanie, prípadne na doplnenie chýbajúcich poznatkov potrebných na úspešné zvládnutie matematiky na vysokej škole.

Chceli by sme poďakovať RNDr. Andree Feňovčíkovej, PhD. a Mgr. Marcelu Lascsákovej, PhD. za starostlivé prečítanie textu a za pripomienky, ktoré prispeli k zvýšeniu kvality tejto zbierky.

Veľa chuti do učenia a mnoho úspechov pri riešení úloh.

Košice, jún 2012

autori

Obsah

1	Funkcia jednej reálnej premennej	5
2	Diferenciálny počet funkcie jednej reálnej premennej	27
3	Neurčitý integrál	51
4	Základy algebry	73

1 Funkcia jednej reálnej premennej

1.1 Pojem funkcie, elementárne funkcie

Nech M, P sú podmnožiny množiny reálnych čísel $\mathbb{R}$. Predpis (pravidlo), podľa ktorého každému prvku $x \in M$ je priradený práve jeden prvok $y \in P$ nazývame *funkciou jednej reálnej premennej*. Funkciu označíme f a zapíšeme v tvare $y = f(x)$. Množinu M nazývame *definičným oborom* funkcie $f(x)$ a označujeme ju znakom D_f . Množinu $P = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in D_f\}$ nazývame *oborom hodnôt* funkcie $f(x)$ a označujeme ju H_f .

Uvedieme predpisy niektorých elementárnych funkcií:

Funkcia	Tvar funkcie
Konštantná funkcia	$y = k, k \in \mathbb{R}$
Lineárna funkcia	$y = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$
Kvadratická funkcia	$y = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
Nepriama úmernosť	$y = \frac{k}{x}, k \neq 0$
Mocninová funkcia	$y = x^r, r \in \mathbb{R}$
Logaritmická funkcia	$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
Exponenciálna funkcia	$y = a^x, a > 0, a \neq 1$
Goniometrické funkcie	$y = \sin x, y = \cos x$ $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{cotg} x$
Cyklometrické funkcie	$y = \arcsin x, y = \arccos x$ $y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arccotg} x$

1.2 Definičný obor funkcie

Na určenie definičného oboru funkcie je potrebné vedieť, že

- menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule,
- výraz pod párnou odmocninou musí byť nezáporný,
- logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argument,
- ak $a > 1$, tak $\log_a x > 0 \Leftrightarrow x > 1$,
- ak $0 < a < 1$, tak $\log_a x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$,
- funkcie $y = \arcsin x, y = \arccos x$ sú definované pre $x \in (-1, 1)$.

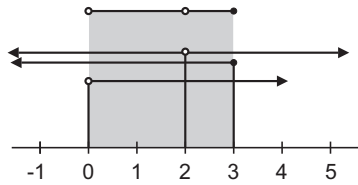
Príklad 1.1. Zistíme definičný obor funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x-2} - \log_5 x$.

Riešenie

Definičný obor funkcie určíme z podmienok, že pod párnou odmocninou musí byť výraz nezáporný, menovateľ zlomku má byť rôzny od nuly a logaritmus je definovaný pre kladný výraz, t. j.

$$\begin{aligned} 3-x &\geq 0 \quad \wedge \quad x-2 \neq 0 \quad \wedge \quad x > 0 \\ -x &\geq -3 \quad \wedge \quad x \neq 2 \\ x &\leq 3. \end{aligned}$$

Všetky tri podmienky musia platiť súčasne, preto určíme prienik jednotlivých výsledkov:



Obr. 1.1: Definičný obor funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x-2} - \log_5 x$.

Definičný obor funkcie je $D_f = (0, 2) \cup (2, 3)$.

Príklad 1.2. Zistíme definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x+2}}$.

Riešenie

Pod párnou odmocninou je výraz nezáporný a menovateľ zlomku sa nesmie rovnať nule. Riešime teda sústavu nerovnic

$$\frac{2x+1}{x+2} \geq 0 \quad \wedge \quad x+2 \neq 0.$$

Sústavu môžeme riešiť pomocou nulových bodov. Čitateľ zlomku je rovný nule pre $x = -\frac{1}{2}$, menovateľ nadobúda nulovú hodnotu pre $x = -2$. Tieto dva body rozdelia množinu reálnych čísel na tri intervaly: $(-\infty, -2)$, $(-2, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \infty)$. Dosadením ľubovoľných čísel (okrem krajných bodov) z daných intervalov zistíme, kedy výraz $V(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ nadobúda kladné a kedy záporné hodnoty. Dostaneme

$$(-\infty, -2): x = -3 \Rightarrow V(-3) = \frac{2 \cdot (-3) + 1}{-3 + 2} = \frac{-5}{-1} = 5 > 0,$$

$$(-2, -\frac{1}{2}): x = -1 \Rightarrow V(-1) = \frac{2 \cdot (-1) + 1}{-1 + 2} = \frac{-1}{1} = -1 < 0,$$

$$(-\frac{1}{2}, \infty): x = 0 \Rightarrow V(0) = \frac{2 \cdot 0 + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Výsledky môžeme zapísať do tabuľky:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, \infty)$
$\frac{2x+1}{x+2}$	+	$\times$	-	0	+

Keďže hľadáme tie reálne čísla x , pre ktoré je výraz $V(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ nezáporný, do výsledku okrem intervalov, kedy je v tabuľke znamienko plus, zahrnieme aj nulový bod čitateľa. Teda definičný obor funkcie je

$$D_f = (-\infty, -2) \cup \left\langle -\frac{1}{2}, \infty \right\rangle.$$

Príklad 1.3. Zistíme definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 21} + \ln(2x - 3) + \frac{1}{x - 8}$.

Riešenie

Zapišeme nerovnice vyplývajúce z podmienok, že pod párnou odmocninou musí byť výraz nezáporný, logaritmus je definovaný pre kladný výraz a menovateľ zlomku má byť rôzny od nuly, t.j.

$$x^2 - 4x - 21 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x - 3 > 0 \quad \wedge \quad x - 8 \neq 0.$$

Nerovnicu $x^2 - 4x - 21 \geq 0$ vyriešime pomocou nulových bodov. Výraz $x^2 - 4x - 21 = (x + 3)(x - 7)$ nadobúda nulovú hodnotu pre $x_1 = -3$, $x_2 = 7$. Tieto dva body rozdelia množinu reálnych čísel na tri intervaly, ktoré zapíšeme do tabuľky a podobne ako v predchádzajúcej úlohe určíme znamienko výrazu v jednotlivých intervaloch:

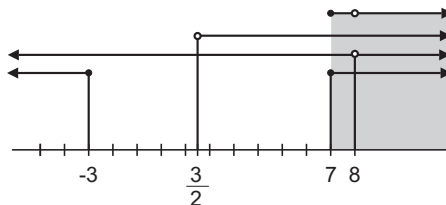
x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 7)$	7	$(7, \infty)$
$(x + 3)(x - 7)$	+	0	-	0	+

Nerovnici $x^2 - 4x - 21 \geq 0$ vyhovujú tie reálne čísla x , ktoré patria do intervalu $(-\infty, -3) \cup \langle 7, \infty)$.

Riešením ďalších dvoch nerovníc dostávame

$$x > \frac{3}{2} \quad \wedge \quad x \neq 8.$$

Všetky tri podmienky musia platiť súčasne, preto určíme prienik jednotlivých výsledkov:



Obr. 1.2: Definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 21} + \ln(2x - 3) + \frac{1}{x-8}$.

Definičný obor funkcie je $D_f = \langle 7, 8 \rangle \cup (8, \infty)$.

Príklad 1.4. Zistíme definičný obor funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{4x - x^2}}{\ln(2x - 5)}$.

Riešenie

Do definičného oboru funkcie patria tie reálne čísla x , ktoré spĺňajú nasledujúce podmienky:

$$4x - x^2 \geq 0 \quad \wedge \quad 2x - 5 > 0 \quad \wedge \quad \ln(2x - 5) \neq 0.$$

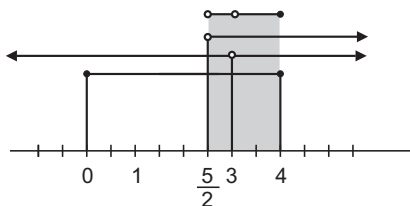
Nerovnicu $4x - x^2 \geq 0$ opäť riešime pomocou nulových bodov. Výraz $V(x) = 4x - x^2 = x(4 - x)$ nadobúda nulovú hodnotu pre $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Znamienka výrazu $V(x)$ v jednotlivých intervaloch zapíšeme do tabuľky:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 4)$	4	$(4, \infty)$
$x(4 - x)$	-	0	+	0	-

Z tabuľky je zrejmé, že nerovnica $4x - x^2 \geq 0$ je splnená pre $x \in \langle 0, 4 \rangle$. Z ďalších nerovníc vyplýva

$$2x - 5 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{5}{2},$$

$$\ln(2x - 5) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 5 \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 3.$$



Obr. 1.3: Definičný obor funkcie $f(x) = \frac{\sqrt{4x - x^2}}{\ln(2x - 5)}$.

Definičný obor funkcie je $D_f = (\frac{5}{2}, 3) \cup (3, 4)$.

Príklad 1.5. Zistíme definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{\log_{0,1}(1 - 3x)}$.

Riešenie

Výraz pod párnou odmocninou má byť nezáporný a logaritmická funkcia je definovaná len pre kladný argu-

ment. Preto riešime nasledujúcu sústavu nerovníc:

$$\begin{aligned}\log_{0,1}(1-3x) &\geq 0 && \wedge && 1-3x > 0 \\ \log_{0,1}(1-3x) &\geq \log_{0,1} 1 && \wedge && -3x > -1 \\ 1-3x &\leq 1 && \wedge && x < \frac{1}{3} \\ -3x &\leq 0 \\ x &\geq 0.\end{aligned}$$

Definičný obor funkcie určíme ako prienik dvoch intervalov: $\langle 0, \infty \rangle \cap (-\infty, \frac{1}{3})$. Teda $D_f = \langle 0, \frac{1}{3} \rangle$.

Príklad 1.6. Zistíme definičný obor funkcie $f(x) = \arccos \frac{3x+2}{4}$.

Riešenie

Vieme, že funkcia $y = \arccos x$ je definovaná pre $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Preto musí platiť

$$\begin{aligned}-1 &\leq \frac{3x+2}{4} \leq 1 && / \cdot 4 \\ -4 &\leq 3x+2 \leq 4 && / -2 \\ -6 &\leq 3x \leq 2 && / :3 \\ -2 &\leq x \leq \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Definičný obor funkcie je $D_f = \langle -2, \frac{2}{3} \rangle$.

Úlohy

1.1. Určte definičný obor funkcie.

a) $f(x) = 3x + 5$

c) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 8x - 12}}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \frac{1}{x^2 - 1}$

i) $f(x) = \ln(8 - 6x) + \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$

k) $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$

m) $f(x) = \log \ln x$

o) $f(x) = \ln \left(\frac{6 + 3x}{4x + 1} \right)$

q) $f(x) = \sqrt{\log_{0,4}(2x + 7)}$

s) $f(x) = \arccos \frac{5 - 2x}{3}$

u) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$

b) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$

d) $f(x) = \sqrt{x + 2} + \frac{1}{\sqrt{2 - 4x}}$

f) $f(x) = \frac{x}{|3x - 11|} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

h) $f(x) = 3^{\sqrt{x^2 - x}}$

j) $f(x) = \log_3(-x^2 + 5x + 14)$

l) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\ln(2x - 7)}$

n) $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{3 - x}}$

p) $f(x) = \sqrt{\log_2(4 - x)}$

r) $f(x) = \arcsin \frac{4x + 1}{2}$

t) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{16 - 4^x}$

v) $f(x) = 10^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}}$

Výsledky

- 1.1. a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ d) $\langle -2, \frac{1}{2} \rangle$ e) $(2, 6)$ f) $\mathbb{R} - \{0, \frac{11}{3}\}$ g) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
h) $(-\infty, 0) \cup \langle 1, \infty \rangle$ i) $(1, \frac{4}{3})$ j) $(-2, 7)$ k) $(0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, \infty)$ l) $(\frac{7}{2}, 4) \cup (4, \infty)$
m) $(1, \infty)$ n) $\langle -1, 3 \rangle$ o) $(-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{4}, \infty)$ p) $(-\infty, 3)$ q) $(-\frac{7}{2}, -3)$ r) $\langle -\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \rangle$
s) $\langle 1, 4 \rangle$ t) $\langle 0, 2 \rangle \cup (2, \infty)$ u) $\mathbb{R} - \{0\}$ v) $(0, 1) \cup (1, \infty)$
-

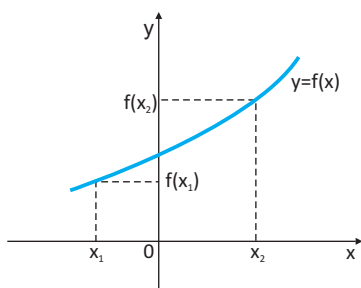
1.3 Vlastnosti funkcie jednej reálnej premennej

MONOTÓNNOŠŤ FUNKCIE

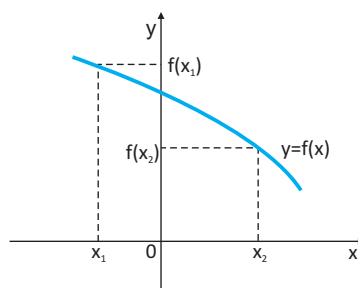
Funkcia $f(x)$ sa nazýva *rastúca* (*klesajúca*) *na množine* M_1 , $M_1 \subset D_f$, ak pre každé dve čísla $x_1, x_2 \in M_1$ také, že $x_1 < x_2$ platí

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Ak $M_1 = D_f$ hovoríme, že funkcia $f(x)$ je *rastúca* (*klesajúca*).



Obr. 1.4: Rastúca funkcia.

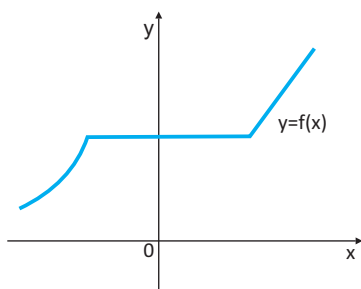


Obr. 1.5: Klesajúca funkcia.

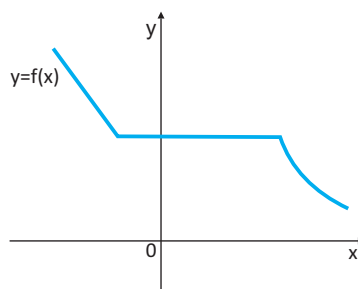
Funkcia $f(x)$ sa nazýva *neklesajúca* (*nerastúca*) *na množine* M_1 , $M_1 \subset D_f$, ak pre ľubovoľné dve čísla $x_1, x_2 \in M_1$ také, že $x_1 < x_2$ platí

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Ak $M_1 = D_f$ hovoríme, že funkcia $f(x)$ je *neklesajúca* (*nerastúca*).



Obr. 1.6: Neklesajúca funkcia.



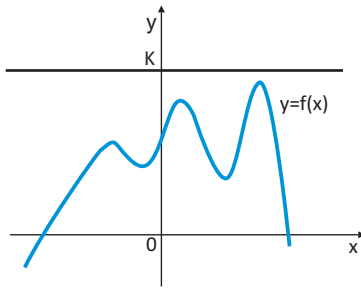
Obr. 1.7: Nerastúca funkcia.

Funkcie, ktoré sú neklesajúce alebo nerastúce nazývame *monotónne*. Funkcie, ktoré sú rastúce alebo klesajúce nazývame *rydžomonotónne*.

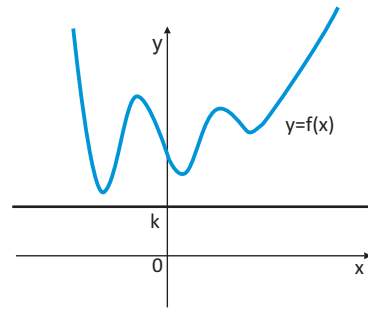
OHRANIČENOSŤ FUNKCIE

Funkcia $f(x)$ sa nazýva *zhora* (*zdola*) *ohraničená* na množine M_1 , $M_1 \subset D_f$ práve vtedy, keď existuje také reálne číslo K (resp. k), že pre každé $x \in M_1$ platí $f(x) \leq K$ ($f(x) \geq k$).

Funkcia je *ohraničená* na množine M_1 , ak je zhora i zdola ohraničená na množine M_1 .



Obr. 1.8: Funkcia ohraničená zhora.



Obr. 1.9: Funkcia ohraničená zdola.

PÁRNOSTĚ, NEPÁRNOST FUNKCIE

Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je *párna*, ak

1. pre $\forall x \in D_f$ je $(-x) \in D_f$,
2. pre $\forall x \in D_f$ je $f(-x) = f(x)$.

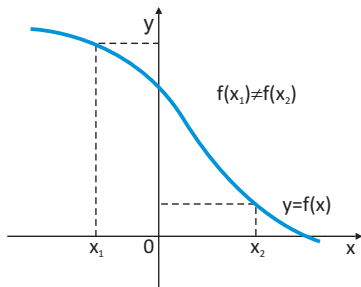
Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je *nepárna*, ak

1. pre $\forall x \in D_f$ je $(-x) \in D_f$,
2. pre $\forall x \in D_f$ je $f(-x) = -f(x)$.

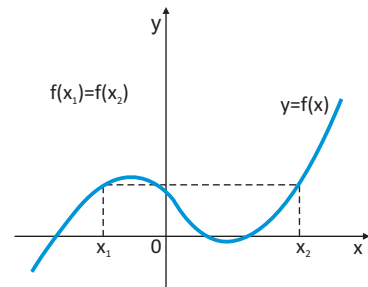
Graf párnej funkcie je súmerný podľa osi y , graf nepárnej funkcie je súmerný podľa počiatku súradnicového systému.

PROSTÁ FUNKCIA

Funkcia $f(x)$ sa nazýva *prostá*, ak pre každé $x_1, x_2 \in D_f$ také, že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.



Obr. 1.10: Prostá funkcia.

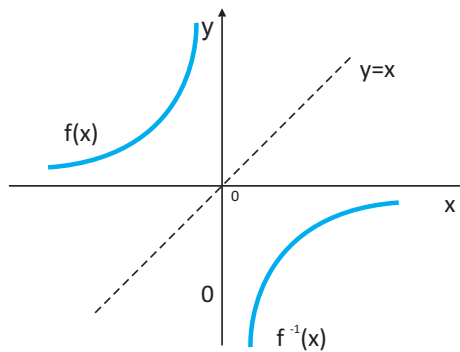


Obr. 1.11: Funkcia, ktorá nie je prostá.

INVERZNÁ FUNKCIA

Nech $f(x)$ je prostá funkcia definovaná na množine D_f s oborom hodnôt H_f . Funkciu definovanú na H_f tak, že každému $y \in H_f$ priradí ten prvok $x \in D_f$, pre ktorý platí $y = f(x)$, nazývame *inverznou funkciou* k funkcii $f(x)$. Inverznú funkciu k funkcii $f(x)$ budeme označovať $f^{-1}(x)$. Pre funkciu $f(x)$ a k nej inverznú funkciu $f^{-1}(x)$ platí:

- grafy funkcií $f(x)$ a $f^{-1}(x)$ sú osovo súmerné podľa priamky $y = x$,
- $D_f = H_{f^{-1}}$, $H_f = D_{f^{-1}}$,
- $\forall x \in D_f : f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in H_f : f(f^{-1}(x)) = x$.



Obr. 1.12: Inverzná funkcia.

Postup určenia predpisu inverznej funkcie k funkcii $y = f(x)$:

1. Zistíme, či je funkcia $y = f(x)$ prostá. Ak nie je (teda neexistuje k nej inverzná funkcia), snažíme sa určiť také intervaly definičného oboru, na ktorých je funkcia prostá. Inverznú funkciu potom hľadáme k funkcii $y = f(x)$ na príslušnom intervale.
2. V rovnici $y = f(x)$ navzájom zameníme premenné x a y , t.j. dostaneme $x = f(y)$.
3. Z rovnice $x = f(y)$ vyjadríme y pomocou x .

PERIODICKÁ FUNKCIA

Funkciu $f(x)$ nazývame *periodickou*, ak existuje kladné reálne číslo p také, že platí:

1. pre $\forall x \in D_f$ je aj $(x + p) \in D_f$ a $(x - p) \in D_f$,
2. pre $\forall x \in D_f$ platí: $f(x + p) = f(x)$, $f(x - p) = f(x)$.

Najmenšie kladné reálne číslo p daných vlastností nazývame základnou periódou funkcie $f(x)$ a označujeme ho T .

Príklad 1.7. *Vyšetrite párnosť, resp. nepárnosť funkcie $f(x)$.*

a) $f(x) = -x^5 + x$ b) $f(x) = \frac{x}{3x+5}$ c) $f(x) = x^2 \cos x$ d) $f(x) = x - \frac{2}{x}$

Riešenie

a) Funkcia $f(x) = -x^5 + x$ je definovaná na množine $\mathbb{R}$, t.j. pre $\forall x \in D_f$ je aj $(-x) \in D_f$.

$$\text{Vypočítame } f(-x) = -(-x)^5 + (-x) = x^5 - x \begin{cases} \neq -x^5 + x = f(x) \Rightarrow \text{funkcia nie je párna,} \\ = -(-x^5 + x) = -f(x) \Rightarrow \text{funkcia je nepárna.} \end{cases}$$

Funkcia $f(x)$ nie je párna a nie je ani nepárna.

b) Funkcia $f(x) = \frac{x}{3x+5}$ je definovaná na množine $D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{5}{3}\}$.

Pretože nie je splnená podmienka, že pre $\forall x \in D_f$ je aj $(-x) \in D_f$, funkcia $f(x)$ nie je párna a nie je ani nepárna.

c) Funkcia $f(x) = x^2 \cos x$ je definovaná pre všetky reálne čísla x , t.j. pre $\forall x \in D_f$ je aj $(-x) \in D_f$. Vypočítame $f(-x) = (-x)^2 \cos(-x) = x^2 \cos x = f(x) \Rightarrow$ funkcia je párna.

d) Definičný obor funkcie $f(x) = x - \frac{2}{x}$ je $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, teda pre $\forall x \in D_f$ je aj $(-x) \in D_f$. Vypočítame $f(-x) = -x - \frac{2}{-x} = -x + \frac{2}{x} = -\left(x - \frac{2}{x}\right) = -f(x) \Rightarrow$ funkcia je nepárna.

Príklad 1.8. *Nájdime inverznú funkciu k funkcii $f(x)$.*

a) $f(x) = -3x + 2$ b) $f(x) = \frac{2x-5}{x}$ c) $f(x) = \log(3x+4)$

Riešenie

- a) Definičný obor funkcie $f(x) : y = -3x + 2$ je $D_f = \mathbb{R}$, obor hodnôt $H_f = \mathbb{R}$.

Funkcia je na celom definičnom obore klesajúca, teda je prostá a existuje k nej inverzná funkcia. Zameníme premenné x a y a vyjadríme y :

$$\begin{aligned}x &= -3y + 2 & / -2 \\x - 2 &= -3y & / : (-3) \\-\frac{x-2}{3} &= y \\f^{-1}(x) : y &= \frac{2-x}{3}.\end{aligned}$$

Inverznou funkciou k funkcii $f(x) = 3x + 2$ je funkcia $f^{-1}(x) : y = \frac{2-x}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

- b) Funkcia $f(x) : y = \frac{2x-5}{x}$ je definovaná na množine $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ a obor hodnôt $H_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

Funkcia je rastúca na intervaloch $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, teda je prostá a existuje k nej inverzná funkcia. Zameníme premenné x a y a vyjadríme y :

$$\begin{aligned}x &= \frac{2y-5}{y} & / \cdot y \\xy &= 2y-5 & / -2y \\xy - 2y &= -5 \\y(x-2) &= -5 & / \cdot \frac{1}{x-2} \\y &= -\frac{5}{x-2} \\f^{-1}(x) : y &= \frac{5}{2-x}.\end{aligned}$$

Inverznou funkciou k funkcii $f(x) = \frac{2x-5}{x}$ je funkcia $f^{-1}(x) : y = \frac{5}{2-x}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

- c) Definičný obor funkcie $f(x) : y = \log(3x+4)$ je $D_f = (-\frac{4}{3}, \infty)$. Funkcia je na celom definičnom obore prostá a teda existuje k nej inverzná funkcia. Zameníme premenné x a y a vyjadríme y :

$$\begin{aligned}x &= \log(3y+4) \\10^x &= 3y+4 & / -4 \\10^x - 4 &= 3y & / : 3 \\f^{-1}(x) : y &= \frac{10^x - 4}{3}.\end{aligned}$$

Inverznou funkciou k funkcii $f(x) = \log(3x+4)$ je funkcia $f^{-1}(x) : y = \frac{10^x - 4}{3}$, $x \in \mathbb{R}$.

Úlohy

1.2. Vyšetrite párnosť, resp. nepárnosť funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = -3x^2 + 1$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \frac{3x+1}{1-x}$

d) $f(x) = \ln(4-x^2)$

e) $f(x) = \frac{e^x}{3} + 1$

f) $f(x) = x + \sin x$

g) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

h) $f(x) = xe^{x^2}$

i) $f(x) = |x|$

j) $f(x) = 3x^{-3}$

1.3. Zistite, či sú dané funkcie prosté.

a) $f(x) = 4 - x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = x^2, x \leq 0$

d) $f(x) = x^2 + 4x - 5$

e) $f(x) = \frac{3}{x}$

f) $f(x) = 2\sqrt{x}$

g) $f(x) = e^{2x} - 1$

h) $f(x) = |\ln x|$

1.4. Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{x}{3} + 5$

b) $f(x) = 2 - \frac{1}{x+4}$

c) $f(x) = 4x^3 - 1$

d) $f(x) = \frac{e^x}{3} + 1$

e) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

f) $f(x) = \sqrt{3x+1} - 2$

g) $f(x) = 3x^{-3}$

h) $f(x) = \frac{4^x + 1}{4^x}$

i) $f(x) = 2 + \ln(7+2x)$

j) $f(x) = 1 + 2 \arcsin \frac{1+2x}{3}$

Výsledky

1.2. a) párna b) nepárna c) ani párna, ani nepárna d) párna e) ani párna, ani nepárna
f) nepárna g) ani párna, ani nepárna h) nepárna i) párna j) nepárna

1.3. a) áno b) nie c) áno d) nie e) áno f) áno g) áno h) nie

1.4. a) $f^{-1}(x) : y = 3x - 15$ b) $f^{-1}(x) : y = -4 - \frac{1}{x-2}$ c) $f^{-1}(x) : y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{4}}$
d) $f^{-1}(x) : y = \ln(3x-3)$ e) $f^{-1}(x) : y = \frac{3+x}{x-2}$ f) $f^{-1}(x) : y = \frac{x^2+4x+3}{3}$
g) $f^{-1}(x) : y = \sqrt[3]{\frac{3}{x}}$ h) $f^{-1}(x) : y = -\log_4(x-1)$ i) $f^{-1}(x) : y = \frac{e^{x-2}-7}{2}$
j) $f^{-1}(x) : y = \frac{3 \sin\left(\frac{x-1}{2}\right) - 1}{2}$

1.4 Limita funkcie

Pojem limita funkcie

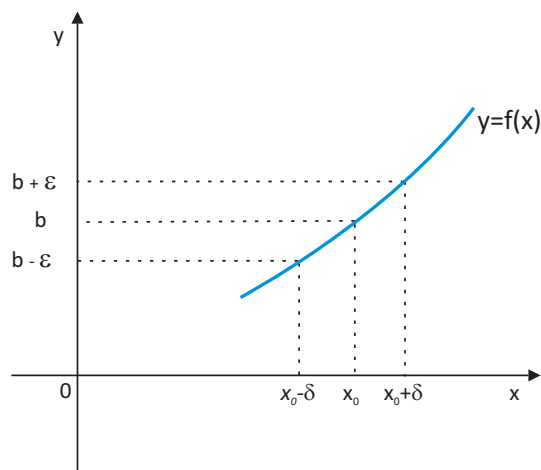
Nech funkcia $f(x)$ je definovaná pre všetky $x \neq x_0$ z okolia $O(x_0)$ bodu x_0 . Hovoríme, že číslo b je *limitou funkcie* $f(x)$ v bode x_0 , ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé x , $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $|f(x) - b| < \varepsilon$.

V tomto prípade hovoríme o *vlastnej limite vo vlastnom bode* a zapisujeme

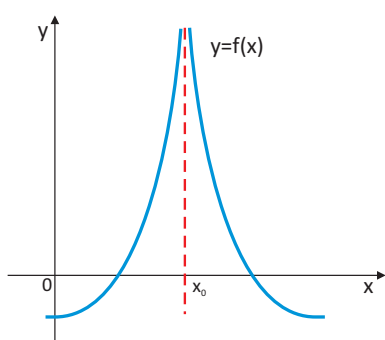
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

Rozlišujeme tieto typy limit:

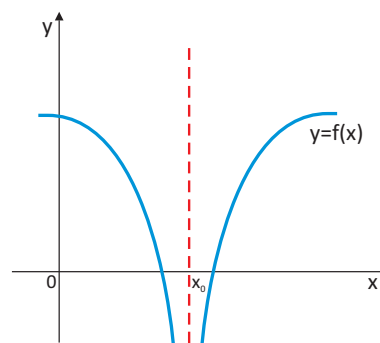
- vlastná limita vo vlastnom bode,
- nevlastná limita vo vlastnom bode,
- vlastná limita v nevlastnom bode,
- nevlastná limita v nevlastnom bode.



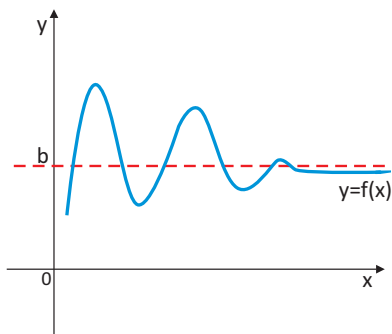
Obr. 1.13: Vlastná limita vo vlastnom bode.



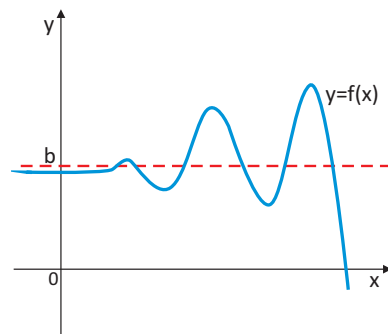
Obr. 1.14: Nevlastná limita vo vlastnom bode.



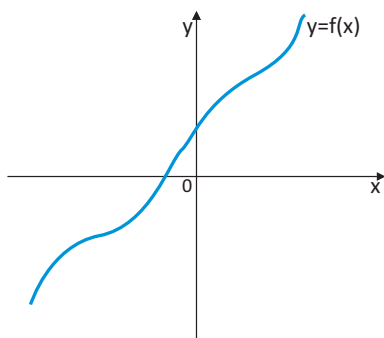
Obr. 1.15: Nevlastná limita vo vlastnom bode.



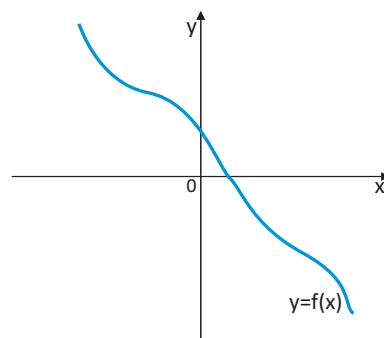
Obr. 1.16: Vlastná limita v nevlastnom bode.



Obr. 1.17: Vlastná limita v nevlastnom bode.



Obr. 1.18: Nevlastná limita v nevlastnom bode.



Obr. 1.19: Nevlastná limita v nevlastnom bode.

Pri počítaní limit môžeme použiť nasledujúcu pomôcku:

$\infty + \infty \rightarrow \infty$	$a \cdot \infty \rightarrow \infty, \text{ ak } a > 0$	$\frac{\infty}{a} \rightarrow -\infty, \text{ ak } a < 0$
$-\infty - \infty \rightarrow -\infty$	$a \cdot \infty \rightarrow -\infty, \text{ ak } a < 0$	$\frac{-\infty}{a} \rightarrow -\infty, \text{ ak } a > 0$
$\infty \cdot \infty \rightarrow \infty$	$a \cdot (-\infty) \rightarrow -\infty, \text{ ak } a > 0$	$\frac{-\infty}{a} \rightarrow \infty, \text{ ak } a < 0$
$(-\infty) \cdot (-\infty) \rightarrow \infty$	$a \cdot (-\infty) \rightarrow \infty, \text{ ak } a < 0$	$a^\infty \rightarrow \infty, \text{ ak } a > 1$
$\infty \cdot (-\infty) \rightarrow -\infty$	$\frac{a}{\infty} \rightarrow 0$	$a^\infty \rightarrow 0, \text{ ak } 0 < a < 1$
$a + \infty \rightarrow \infty$	$\frac{a}{-\infty} \rightarrow 0$	$a^{-\infty} \rightarrow 0, \text{ ak } a > 1$
$a - \infty \rightarrow -\infty$	$\frac{\infty}{a} \rightarrow \infty, \text{ ak } a > 0$	$a^{-\infty} \rightarrow \infty, \text{ ak } 0 < a < 1$

Postup pri počítaní limit:

1. Určíme typ neurčitosti limity.
2. Odstránime neurčitosť.
3. Dosadením vypočítame limitu.

Poznáme tieto typy neurčitosti:

$$\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{0}{\infty}, \frac{\infty}{0}, 0 \cdot \infty, 0^\infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0.$$

Limity typu $\frac{\infty}{\infty}$

V špeciálnych prípadoch, napríklad ak ide o limitu podielu dvoch polynómov $\frac{P_s(x)}{P_k(x)}$ premennej x , vydelíme čitateľ aj menovateľ výrazom x^k , kde k je najväčší mocniteľ menovateľa.

Výsledky takýchto limit vieme nájsť aj bez počítania. Platí:

- ak je najväčší mocniteľ menovateľa a čitateľa rovnaký, výsledok je podiel koeficientov pri členoch s najväčším mocniteľom,
- ak je najväčší mocniteľ menovateľa väčší ako najväčší mocniteľ čitateľa, výsledok je 0,
- ak je najväčší mocniteľ menovateľa menší ako najväčší mocniteľ čitateľa, výsledok je ∞ , ak majú koeficienty pri nich rovnaké znamienko a $-\infty$, ak majú koeficienty opačné znamienka.

Limity typu $\infty - \infty$

Spravidla použijeme jednu z nasledujúcich možností:

- výraz rozšírime vhodnou jednotkou a prevedieme na neurčitosť typu $\frac{\infty}{\infty}$; v tomto prípade využijeme vzorce $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$,
- výraz upravíme na výraz so spoločným menovateľom,
- využijeme vlastnosti logaritmickej funkcie.

Limity typu 1^∞

V speciálních případech použijeme vzorec

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

kde e je Eulerovo číslo ($e = 2,71828\dots$).

Příklad 1.9. V následujících úlohách vypočítajte limitu funkcie.

- | | |
|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (6x + 11)$ | b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{x^3 + 2x + 1}}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$ | d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{8x^4 + 5x - 4}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 4x - 1} + 5x}{1 - 4x}$ | f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 11}{2 - x^2 + \sqrt{x}}$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}\right)$ | h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 6x + 5} - \sqrt{x^2 + 1}\right)$ |
| i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\sqrt{x^2 - 5} - x\right)$ | j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x - 1}\right)^{\frac{x}{3}}$ |
| k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 3}{4x - 5}\right)^{x-1}$ | l) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{\frac{x^2 + 4}{1 - x^2}}$ |

Riešenie

- a) Pretože platí $6 \cdot \infty \rightarrow \infty$, tak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (6x + 11) = \{\infty + 11\} = \infty.$$

- b) Po dosadení do limity za $x \rightarrow \infty$ dostávame $\infty^3 \rightarrow \infty$, $2 \cdot \infty \rightarrow \infty$, $\infty + 1 \rightarrow \infty$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{x^3 + 2x + 1}} = \left\{ \frac{4}{\infty} \right\} = 0.$$

- c) Z pomocnej tabuľky vyplýva

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = \{2^{-\infty}\} = 0.$$

- d) Ide o typ neurčitosti $\frac{\infty}{\infty}$. Čitateľ aj menovateľ zlomku vydelíme výrazom x^k , kde k je najväčší mocniteľ menovateľa. V našom prípade čitateľ i menovateľ vydelíme výrazom x^4 . Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{8x^4 + 5x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{8x^4}{x^4} + \frac{5x}{x^4} - \frac{4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{8 + \frac{5}{x^3} - \frac{4}{x^4}} = \left\{ \frac{\frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{8 + \frac{5}{\infty} - \frac{4}{\infty}} \right\} = \frac{0 + 0}{8 + 0 - 0} = 0.$$

Poznamenajme, že výsledok vieme nájsť aj bez počítania. Keďže najväčší mocniteľ menovateľa ($k = 4$) je väčší ako najväčší mocniteľ čitateľa ($s = 2$), limita je rovná 0.

- e) Ide o typ neurčitosti $\frac{\infty}{\infty}$. Čitateľ i menovateľ vydelíme najväčšou mocninou menovateľa, teda výrazom x^1 . Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 4x - 1} + 5x}{1 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2 + 4x - 1}{x^2}} + \frac{5x}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{4x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} + 5}{\frac{1}{x} - 4} =$$

$$= \left\{ \frac{\sqrt{9 + \frac{4}{\infty} - \frac{1}{\infty} + 5}}{\frac{1}{\infty} - 4} \right\} = \frac{\sqrt{9 + 0 - 0 + 5}}{0 - 4} = -2.$$

Bez počítania dostaneme výsledok porovnaním mocniteľov v čitateli a v menovateli. Najväčší mocniteľ menovateľa a najväčší mocniteľ čitateľa sú rovnaké ($k = s = 1$). Limita je rovná podielu koeficientov pri členoch s najväčším mocniteľom, t. j. $\frac{\sqrt{9+5}}{-4} = -2$.

f) Ide o typ neurčitosti $\frac{\infty}{\infty}$. Čitateľ i menovateľ vydělíme najväčšou mocninou menovateľa x^2 . Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 11}{2 - 3x^2 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2} + \frac{11}{x^2}}{\frac{2}{x^2} - 3 + \frac{\sqrt{x}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{11}{x^2}}{\frac{2}{x^2} - 3 + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \left\{ \frac{\infty + 0}{0 - 3 + 0} \right\} = -\infty.$$

Výsledok spamäti dostaneme porovnaním mocniteľov čitateľa a menovateľa zlomku. Keďže najväčší mocniteľ menovateľa ($k = 2$) je menší ako najväčší mocniteľ čitateľa ($s = 3$) a koeficienty pri nich sú opačným znamienkom, limita je rovná $-\infty$.

g) Ide o typ neurčitosti $\infty - \infty$. Výraz upravíme na výraz so spoločným menovateľom. Dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - \frac{x^4 + x + 1}{x^2 - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x^2 - 1) - (x^4 + x + 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2 - x^4 - x - 1}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = -1, \end{aligned}$$

pričom pri výpočte limity typu $\frac{\infty}{\infty}$ sme využili poznatok, že najväčší mocniteľ čitateľa a najväčší mocniteľ menovateľa sú rovnaké ($s = k = 2$).

h) Ide o typ neurčitosti $\infty - \infty$, pretože $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+4} = \infty$ a rovnako aj $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} = \infty$. V tomto prípade limitu funkcie počítame tak, že funkciu vynásobíme vhodnou jednotkou a dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+1}) \cdot \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4 - (x+1)}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1}} = \left\{ \frac{3}{\infty} \right\} = 0. \end{aligned}$$

i) Ide o typ neurčitosti $\infty - \infty$. Limitu funkcie počítame tak, že funkciu vynásobíme vhodnou jednotkou. Dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 6x + 5} - \sqrt{x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 6x + 5} - \sqrt{x^2 + 1}) \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 5 - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x + 4}{\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{x^2 + 1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \frac{-6}{1+1} = -3. \end{aligned}$$

Výsledok sme získali porovnaním najväčších mocniteľov. Najväčší mocniteľ čitateľa a najväčší mocniteľ menovateľa sú rovnaké ($s = k = 1$).

j) Ide o typ neurčitosti 1^∞ , pretože $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{2x-1} = 1$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3} = \infty$. Funkciu upravíme tak, aby sme využili vzorec $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$. Teda

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{\frac{x}{3}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+3}{2x-1} - 1 \right)^{\frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+3-2x+1}{2x-1} \right)^{\frac{x}{3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x-1} \right)^{\frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-1}{4}} \right)^{\frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x-1}{4}} \right)^{\frac{2x-1}{4}} \right]^{\frac{4}{2x-1} \cdot \frac{x}{3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{4x}{6x-3}} = e^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

k) Keďže $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+3}{4x-5} = \frac{6}{4} > 1$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1) = \infty$, platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+3}{4x-5} \right)^{x-1} = \left\{ \left(\frac{6}{4} \right)^{\infty} \right\} = \infty$$

1) Pretože platí $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{\frac{x^2+4}{1-x^2}} = 3^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4}{1-x^2}}$, najprv vypočítame $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4}{1-x^2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = -1$.

Potom

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{\frac{x^2+4}{1-x^2}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Limity typu $\frac{0}{0}$

Využijeme niektorú z nasledujúcich možností:

- ak je v čitateli aj menovateli funkcie polynóm premennej x , vydelíme čitateľ aj menovateľ polynómom $(x - x_0)$, kde x_0 je číslo, v ktorom limitu počítame,
- ak funkcia obsahuje odmocniny, vynásobíme ju vhodnou jednotkou a využijeme vzorce $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$,
- využijeme vzorce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Príklad 1.10. V nasledujúcich úlohách vypočítajte limitu funkcie.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2(x+1)^2}{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{3}{1+x^3} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1} - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Riešenie

- a) Ak dosadíme za x hodnotu 1, dostaneme typ neurčitosti $\frac{0}{0}$. Čitateľ i menovateľ upravíme na súčin koreňových činiteľov a vykrátením zlomkov odstránime neurčitosť. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}.$$

- b) Ak dosadíme za x hodnotu -1 , dostaneme typ neurčitosti $\frac{0}{0}$. Keďže hodnota menovateľa pre $x = -1$ je nula, číslo -1 je koreňom polynómu v menovateli. Môžeme ho teda rozložiť na súčin koreňových činiteľov obsahujúci výraz $(x+1)$. Ďalší činiteľ získame delením polynómov. Platí

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 5x^2 + 4x + 1) : (x+1) = 2x^2 + 3x + 1. \\ \underline{-2x^3 - 2x^2} \\ 3x^2 + 4x + 1 \\ \underline{-3x^2 - 3x} \\ x + 1 \\ \underline{-x - 1} \\ 0 \end{array}$$

Po úprave dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2(x+1)^2}{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2(x+1)^2}{(x+1)(2x^2 + 3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2(x+1)}{2x^2 + 3x + 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}.$$

Keďže opäť dostaneme typ neurčitosti $\frac{0}{0}$, je zrejmé, že číslo -1 je znova koreňom polynómu ako v čitateli, tak v menovateli a postup s delením polynómov pre menovateľ zopakujeme. Platí

$$\begin{aligned} (2x^2 + 3x + 1) : (x + 1) &= 2x + 1. \\ \frac{-2x^2 - 2x}{x + 1} & \\ \frac{-x - 1}{0} & \end{aligned}$$

Teda

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2(x+1)}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2}{2x+1} = -4.$$

- c) Ide o typ neurčitosti $\infty - \infty$. Výraz $1 + x^3$ rozložíme podľa vzorca $a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$ na tvar $1 + x^3 = (1+x) \cdot (1-x+x^2)$ a potom zlomky upravíme na výraz so spoločným menovateľom. Platí

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{3}{1+x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 \cdot (1-x+x^2) - 3}{(1+x) \cdot (1-x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{(1+x) \cdot (1-x+x^2)}.$$

Po dosadení za $x = -1$ dostaneme typ neurčitosti $\frac{0}{0}$. Podobne ako v predchádzajúcich úlohách výraz $x^2 - x - 2$ upravíme na súčin $(x-2) \cdot (x+1)$. Dostávame

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{(1+x) \cdot (1-x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-2) \cdot (x+1)}{(1+x) \cdot (1-x+x^2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{1-x+x^2} = \frac{-3}{3} = -1.$$

- d) Ide o typ neurčitosti $\frac{0}{0}$. Využijeme vzorec $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Zlomok $\frac{\sin 5x}{x}$ upravíme a dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{5}{5} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.$$

- e) Ide o typ neurčitosti $\frac{0}{0}$. Aby sme odstránili odmocniny, zlomok $\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1}-1}$ vynásobíme vhodnou jednotkou a potom využijeme vzorec $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \cdot (\sqrt{x+1}+1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3(\sqrt{x+1}+1) = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

- f) Ide o typ neurčitosti $\frac{0}{0}$. Funkciu vynásobíme vhodnou jednotkou a využijeme vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = (1)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Úlohy

1.5. Vypočítajte limity funkcie.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (7 + 5x^4)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (4 - x) \cdot \sqrt{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} - 6 \right)^2$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} 7^{2x+1}$$

$$\text{h)} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(2 + x^2)$$

1.6. Vypočítajte limity funkcie.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 3x}{1 + 7x}$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 6x + 8}{2 - x^3}$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 8x^2}}{3x}$$

$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2x + 5}}{3x^2 - 6x + 4}$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 11}{6x^4 + 5x + 8}$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 7}{6x + 1}$$

$$\text{f)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^4 + 3} + x^2 + 2}{2x^2 + 7x - 1}$$

$$\text{h)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 + 1} + 2 \cdot \sqrt[3]{x^7 - 1}}{\sqrt[5]{x^2 + 4} - \sqrt{x^3}}$$

1.7. Vypočítajte limity funkcie.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x + 2} - x\right)$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x})$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 + 4})$$

$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4}{2x^2 + 1} - \frac{x^2}{x - 1}\right)$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\text{f)} \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 6x - 3})$$

$$\text{h)} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x)$$

1.8. Vypočítajte limity funkcie.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x + 3}\right)^{2x+1}$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - x}{3 - x}\right)^{7x-3}$$

$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 2}{3x - 7}\right)^{x+6}$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x - 4}\right)^{3x}$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 2}{4x + 5}\right)^{\frac{x}{3}}$$

$$\text{f)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 1}{6x + 5}\right)^{x-1}$$

$$\text{h)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{5x + 2}\right)^{\frac{x}{3}}$$

1.9. Vypočítajte limity funkcie.

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 4x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$$

$$\text{e)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{1 - \sqrt{4 - x}}$$

$$\text{g)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} x}{5x}$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + 5x} - 2}{x}$$

$$\text{f)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \sqrt{2 + x}}{2 - \sqrt{3 - x}}$$

$$\text{h)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{\sin 2x}$$

Výsledky

1.5. a) ∞ b) $-\infty$ c) 0 d) 36 e) 0 f) 0 g) 1 h) ∞

1.6. a) $\frac{3}{7}$ b) 0 c) $-\infty$ d) 0 e) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ f) 2 g) 0 h) $-\infty$

1.7. a) -2 b) ∞ c) 0 d) 0 e) $\frac{3}{2}$ f) $-\frac{3}{2}$ g) $\frac{1}{2}$ h) ∞

- 1.8. a) $e^{\frac{1}{5}}$ b) e^6 c) e^{-4} d) $e^{-\frac{7}{12}}$ e) e^7 f) $e^{-\frac{2}{3}}$ g) ∞ h) 0
- 1.9. a) $\frac{1}{4}$ b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{5}{4}$ e) -12 f) -2 g) $\frac{2}{5}$ h) $\frac{1}{8}$
-

1.5 Jednostranné limity

Okrem pojmu limita funkcie v bode x_0 definujeme pojmy limita zľava a limita sprava v bode x_0 . Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na istom ľavom okolí bodu x_0 . Hovoríme, že číslo b je *limitou zľava* funkcie $f(x)$ v bode x_0 , ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé x , $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $|f(x) - b| < \varepsilon$. Zapisujeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = b.$$

Analogicky môžeme definovať *limitu sprava* v bode x_0 , ktorú zapisujeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = b.$$

Funkcia $f(x)$ má v bode x_0 limitu b práve vtedy, keď existujú jednostranné limity funkcie $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ a tie sa rovnajú. Teda platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = b.$$

Poznámka. Z uvedeného vyplýva, že ak niektorá z jednostranných limit neexistuje alebo obidve existujú, ale sú rôzne, tak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ neexistuje.

Príklad 1.11. *Vypočítajme jednostranné limity.*

- a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{5}{x+3}$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{5}{x+3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^2}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

Riešenie

- a) Limita funkcie v menovateli je $\lim_{x \rightarrow -3^-} (x+3) = 0$, pričom pre každé x z ľavého okolia bodu -3 je $x+3 < 0$. Využijeme, že $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{5}{x+3} = \left\{ \frac{5}{0^-} \right\} = -\infty.$$

Pri výpočte $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{5}{x+3}$ postupujeme analogicky: $\lim_{x \rightarrow -3^+} (x+3) = 0$, pričom pre každé x z pravého okolia bodu -3 je $x+3 > 0$. Keďže $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, platí

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{5}{x+3} = \left\{ \frac{5}{0^+} \right\} = \infty.$$

Pretože jednostranné limity sú rôzne, tak $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5}{x+3}$ neexistuje.

- b) Limita funkcie v menovateli je $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$, pričom pre každé x z ľavého okolia bodu 0 je $x^2 > 0$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x^2} = \left\{ \frac{1}{0^+} \right\} = \infty.$$

Pri výpočte $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^2}$ postupujeme analogicky: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$, pričom pre každé x z pravého okolia bodu 0 je $x^2 > 0$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^2} = \left\{ \frac{1}{0^+} \right\} = \infty.$$

Pretože jednostranné limity sú rovnaké, existuje limita v bode $x = 0$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^2} = \infty.$$

c) Limita funkcie v menovateli je $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0$, pričom pre každé x z ľavého okolia bodu 1 je $\ln x < 0$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x} = \left\{ \frac{1}{0^-} \right\} = -\infty.$$

Analogicky: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = 0$, pričom pre každé x z pravého okolia bodu 1 je $\ln x > 0$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = \left\{ \frac{1}{0^+} \right\} = \infty.$$

Pretože jednostranné limity sú rôzne, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x}$ neexistuje.

d) Pre každé x z ľavého okolia bodu 0 je $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \{e^{-\infty}\} = 0.$$

Pre každé x z pravého okolia bodu 0 je $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \{e^{\infty}\} = \infty.$$

Pretože jednostranné limity sú rôzne, $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ neexistuje.

Úlohy

1.10. Vypočítajte jednostranné limity funkcie.

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{3x+1}{x+5}, \quad \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{3x+1}{x+5}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2-4}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2-4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\ln x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x-1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -1^-} 2^{\frac{1}{x+1}}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} 2^{\frac{1}{x+1}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Výsledky

1.10. a) $-\infty, \infty$ b) $\infty, -\infty$ c) $-\infty, \infty$ d) neexistuje, 0 e) $-\infty, \infty$ f) 0, ∞
g) 0, π h) 1, 1

1.6 Spojitosť funkcie

Nech funkcia $f(x)$ je definovaná na istom okolí $O(x_0)$ bodu x_0 . Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je *spojitá* v bode x_0 , ak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Z toho vyplýva, že funkcia $f(x)$ je spjitá v bode x_0 , ak

- funkcia $f(x)$ je v bode x_0 definovaná,
- funkcia $f(x)$ má v bode x_0 vlastnú limitu, t.j. jednostranné limity sa rovnajú,
- limita funkcie $f(x)$ sa rovná hodnote funkcie v bode x_0 , t.j. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Funkcia $f(x)$ sa nazýva zľava spjitá v bode x_0 , ak $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Funkcia $f(x)$ sa nazýva sprava spjitá v bode x_0 , ak $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$. Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je *spjitá na množine* M , ak je spjitá v každom bode množiny M .

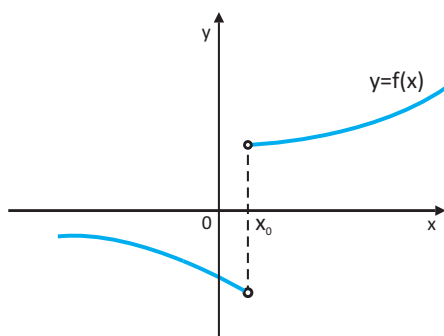
Bod nespojitosti

Body, v ktorých funkcia $f(x)$ nie je spjitá nazývame *bodmi nespojitosti*. Bod x_0 môže byť bodom nespojitosti funkcie $f(x)$, keď

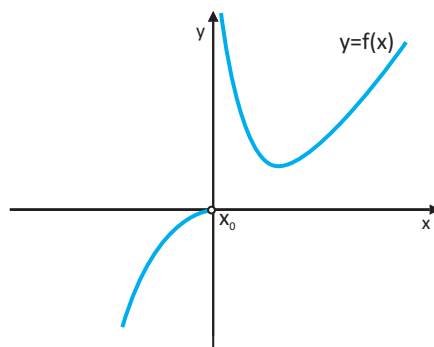
- funkcia $f(x)$ v bode x_0 nie je definovaná, ale je definovaná na nejakom okolí bodu x_0 ,
- funkcia $f(x)$ nemá v bode x_0 limitu, t.j. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$,
- funkcia $f(x)$ má v bode x_0 limitu, ale $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Body nespojitosti funkcie $f(x)$, v ktorých má funkcia vlastnú limitu zľava i vlastnú limitu sprava, nazývame *bodmi nespojitosti 1. druhu*.

Body, v ktorých aspoň jedna jednostranná limita neexistuje alebo je nevlastná (rovná sa $-\infty$, resp. ∞), nazývame *bodmi nespojitosti 2. druhu*.



Obr. 1.20: Bod nespojitosti 1. druhu.



Obr. 1.21: Bod nespojitosti 2. druhu.

Poznámka. Symbolom BN budeme označovať bod nespojistosti funkcie.

Príklad 1.12. Nájdime body nespojitosti funkcie $f(x)$, vypočítajme jednostranné limity v nich a určíme druh nespojitosti.

a) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$

c) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+1}$

d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

e) $f(x) = \log_2 x$

f) $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x-1}$

Riešenie

- a) Funkcia $f(x) = \frac{3x}{x+1}$ je definovaná na množine $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$. Bodom nespojitosti je bod $x = -1$. Vypočítame jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x}{x+1} = \left\{ \frac{-3}{0^-} \right\} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x}{x+1} = \left\{ \frac{-3}{0^+} \right\} = -\infty.$$

Pretože v bode $x = -1$ je splnená podmienka existencie aspoň jednej nevlastnej jednostrannej limity (jednostranné limity sú rovné ∞ , resp. $-\infty$), bod $x = -1$ je bodom nespojitosti 2. druhu.

- b) Funkcia $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$ je definovaná na množine $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Body $x = -2$ a $x = 2$ sú bodmi nespojitosti. Vypočítame jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{4-x^2} = \left\{ \frac{1}{0^-} \right\} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{4-x^2} = \left\{ \frac{1}{0^+} \right\} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{4-x^2} = \left\{ \frac{1}{0^+} \right\} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{4-x^2} = \left\{ \frac{1}{0^-} \right\} = -\infty.$$

Z výsledkov vyplýva, že body $x = -2$ a $x = 2$ sú bodmi nespojitosti 2. druhu.

- c) Funkcia $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+1}$ je definovaná na množine $D_f = \mathbb{R}$. Funkcia je spojitá na celom definičnom obore a nemá body nespojitosti.

- d) Funkcia $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ je definovaná na množine $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Bodom nespojitosti je bod $x = 0$. Vypočítame jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}} = \left\{ e^{\frac{1}{0^+}} \right\} = \{e^\infty\} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}} = \left\{ e^{\frac{1}{0^-}} \right\} = \{e^{-\infty}\} = 0.$$

Bod $x = 0$ je bod nespojitosti 2. druhu.

- e) Funkcia $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x-1}$ je definovaná na množine $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$. Bodom nespojitosti je bod $x = 1$. Vypočítame jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x-1} = \left\{ \operatorname{arccotg} \frac{1}{0^-} \right\} = \{\operatorname{arccotg}(-\infty)\} = \pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x-1} = \left\{ \operatorname{arccotg} \frac{1}{0^+} \right\} = \{\operatorname{arccotg}(\infty)\} = 0.$$

Pretože obidve jednostranné limity sú vlastné, bod $x = 1$ je bodom nespojitosti 1. druhu.

Úlohy

1.11. Nájdite body nespojitosti funkcií a určte druh nespojitosti.

a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$

b) $f(x) = \frac{3x+4}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{5x}{16-x^2}$

d) $f(x) = 5^x + 2$

e) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

f) $f(x) = \ln(9 - x^2)$

g) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

h) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

Výsledky

- 1.11. **a)** $D_f = \mathbb{R}$, nemá body nespojitosti **b)** $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$, BN: $x = -2$, nespojitost 2. druhu
c) $D_f = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$, BN: $x = -4$, $x = 4$, nespojitost 2. druhu **d)** $D_f = \mathbb{R}$, nemá body nespojitosti
e) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, BN: $x = 0$, nespojitost 2. druhu **f)** $D_f = (-3, 3)$, BN: $x = 3$, $x = -3$, nespojitost 2. druhu **g)** $D_f = (0, 1) \cup (1, \infty)$, BN: $x = 0$, nespojitost 1. druhu, BN: $x = 1$, nespojitost 2. druhu **h)** $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, BN: $x = 0$, nespojitost 1. druhu
-

1.7 Asymptoty

Priamku, ktorá má rovnicu $x = x_0$, nazývame *asymptotou bez smernice ku grafu funkcie $f(x)$* , ak funkcia $f(x)$ má v bode x_0 aspoň jednu jednostrannú limitu nevlastnú. Asymptota bez smernice je priamka kolmá na os x prechádzajúca bodom $[x_0, 0]$.

Priamka $y = kx + q$ sa nazýva *asymptotou so smernicou ku grafu funkcie $f(x)$* pre $x \rightarrow \infty$ práve vtedy, keď

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx),$$

pričom uvedené limity sú vlastné (konečné).

Priamka $y = kx + q$ sa nazýva *asymptotou so smernicou ku grafu funkcie $f(x)$* pre $x \rightarrow -\infty$ práve vtedy, keď

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx),$$

pričom uvedené limity sú vlastné (konečné).

Ak aspoň jedna z týchto limit je nevlastná alebo neexistuje, tak asymptota so smernicou ku grafu funkcie $f(x)$ neexistuje.

Príklad 1.13. Nájdime rovnice asymptot (ak existujú) ku grafu funkcie $f(x) = \frac{3x^2}{2x-8}$.

Riešenie

Funkcia $f(x) = \frac{3x^2}{2x-8}$ je definovaná na množine $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$. Bodom nespojitosti je bod $x = 4$. Vypočítame jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3x^2}{2x-8} = \left\{ \frac{48}{0^-} \right\} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x^2}{2x-8} = \left\{ \frac{48}{0^+} \right\} = \infty.$$

Asymptotou bez smernice ku grafu funkcie $f(x) = \frac{3x^2}{2x-8}$ je priamka $x = 4$.

Na výpočet asymptoty so smernicou $y = kx + q$ vypočítame limity

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{3x^2}{2x-8}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x(2x-8)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{2x-8} = \frac{3}{2},$$
$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2}{2x-8} - \frac{3}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 3x(x-4)}{2x-8} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12x}{2x-8} = 6.$$

Asymptotou so smernicou ku grafu funkcie $f(x) = \frac{3x^2}{2x-8}$ je priamka $y = \frac{3}{2}x + 6$.

Príklad 1.14. Nájdime rovnice asymptot (ak existujú) ku grafu funkcie $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x$.

Riešenie

Asymptota bez smernice:

Funkcia $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x$ je definovaná a spojitá na množine $D_f = \mathbb{R}$, preto asymptoty bez smernice ku grafu funkcie $f(x)$ neexistujú.

Asymptota so smernicou:

$$y = kx + q,$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2 \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x} \right) = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2 \operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \operatorname{arctg} x = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi,$$

pričom sme využili, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x} = 0$.

Podobne vypočítame asymptotu so smernicou ku grafu funkcie aj pre $x \rightarrow -\infty$

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2 \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x} \right) = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2 \operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \operatorname{arctg} x = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -\pi,$$

pričom $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x} = 0$.

Priamka $y = x + \pi$ je asymptotou so smernicou ku grafu funkcie $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x$ pre $x \rightarrow \infty$, priamka $y = x - \pi$ je asymptotou so smernicou ku grafu funkcie $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x$ pre $x \rightarrow -\infty$.

Poznámka. Symbolom *ABS* budeme označovať asymptotu bez smernice a symbolom *ASS* budeme označovať asymptotu so smernicou ku grafu funkcie $f(x)$.

Úlohy

1.12. Nájdite rovnice asymptot (ak existujú) ku grafu funkcie.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$

d) $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$

f) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

g) $f(x) = \frac{1}{2}x - \ln x$

h) $f(x) = xe^{x^2}$

Výsledky

- 1.12. a) nemá asymptoty b) ABS: $x = 1$, ASS: $y = 0$ c) ABS: $x = 0$, ASS: $y = \frac{1}{3}x$
d) ABS: $x = -2$, ASS: $y = 3$ e) ABS: $x = -1$, ASS: $y = x + 1$
f) ABS: $x = -1, x = 1$, ASS: $y = 0$ g) ABS: $x = 0$, ASS nemá h) nemá asymptoty
-

2 Diferenciálny počet funkcie jednej reálnej premennej

2.1 Derivácia funkcie

Pri výpočte *derivácie funkcie* $f(x)$ vychádzame obyčajne zo základných vzorcov pre derivovanie elementárnych funkcií, z pravidiel derivovania a zo vzorca pre derivovanie zloženej funkcie.

Základné vzorce a pravidlá derivovania

1. $[c]' = 0$, kde c je konštanta;
2. $[x]' = 1$;
3. $[x^a]' = ax^{a-1}$, kde a je reálne číslo;
4. $[e^x]' = e^x$;
5. $[a^x]' = a^x \cdot \ln a$;
6. $[\ln x]' = \frac{1}{x}$;
7. $[\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$;
8. $[\sin x]' = \cos x$;
9. $[\cos x]' = -\sin x$;
10. $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
11. $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
12. $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$;
13. $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$;
14. $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$;
15. $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$;
16. $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$;
17. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;
18. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
19. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ pre $g(x) \neq 0$;
20. $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Príklad 2.1. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = x^3 - x + \frac{4}{7}$.

Riešenie

$$f'(x) = \left(x^3 - x + \frac{4}{7}\right)' = (x^3)' - (x)' + \left(\frac{4}{7}\right)' = 3 \cdot x^{3-1} - 1 + 0 = 3x^2 - 1.$$

Príklad 2.2. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \frac{9}{7}x^7 - \frac{5}{6}\sqrt{x^3} + \frac{11}{x^3}$.

Riešenie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{9}{7}x^7 - \frac{5}{6}\sqrt{x^3} + \frac{11}{x^3} \right)' = \left(\frac{9}{7}x^7 - \frac{5}{6}x^{\frac{3}{2}} + 11x^{-3} \right)' = \left(\frac{9}{7}x^7 \right)' - \left(\frac{5}{6}x^{\frac{3}{2}} \right)' + (11x^{-3})' = \\ &= \frac{9}{7} \cdot (x^7)' - \frac{5}{6} \cdot (x^{\frac{3}{2}})' + 11 \cdot (x^{-3})' = \frac{9}{7} \cdot 7 \cdot x^{7-1} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} + 11 \cdot (-3) \cdot x^{-3-1} = \\ &= 9x^6 - \frac{5}{4}x^{\frac{1}{2}} - 33x^{-4} = 9x^6 - \frac{5}{4}\sqrt{x} - \frac{33}{x^4}. \end{aligned}$$

Príklad 2.3. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{x} + 2}{x}$.

Riešenie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 - \sqrt{x} + 2}{x} \right)' = \left(\frac{x^2}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{2}{x} \right)' = \left(x - x^{\frac{1}{2}-1} + 2x^{-1} \right)' = \\ &= \left(x - x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-1} \right)' = (x)' - (x^{-\frac{1}{2}})' + (2x^{-1})' = 1 - \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} + 2 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-2} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

Príklad 2.4. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \operatorname{tg} x - 4e^x$.

Riešenie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}\cos x + \operatorname{tg} x - 4e^x \right)' = \left(\frac{1}{2}\cos x \right)' + (\operatorname{tg} x)' - (4e^x)' = \frac{1}{2} \cdot (\cos x)' + \frac{1}{\cos^2 x} - 4 \cdot (e^x)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-\sin x) + \frac{1}{\cos^2 x} - 4e^x = -\frac{\sin x}{2} + \frac{1}{\cos^2 x} - 4e^x. \end{aligned}$$

Príklad 2.5. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = 3^x \cdot \sin x$.

Riešenie

$$f'(x) = (3^x \cdot \sin x)' = (3^x)' \cdot \sin x + 3^x \cdot (\sin x)' = 3^x \ln 3 \cdot \sin x + 3^x \cdot \cos x = 3^x (\ln 3 \cdot \sin x + \cos x).$$

Príklad 2.6. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \sqrt{x} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$.

Riešenie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\sqrt{x} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]' = (\sqrt{x})' \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{x} \cdot \left[\left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]' = (x^{\frac{1}{2}})' \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{x} - 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot (x^{\frac{1}{2}-1}) \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + x^{\frac{1}{2}-1} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{2} + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{x}} \cdot (2 \ln x + 3). \end{aligned}$$

Príklad 2.7. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 - x}$.

Riešenie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 + 3x}{2 - x} \right)' = \frac{(x^2 + 3x)' \cdot (2 - x) - (x^2 + 3x) \cdot (2 - x)'}{(2 - x)^2} = \\ &= \frac{(2x + 3) \cdot (2 - x) - (x^2 + 3x) \cdot (0 - 1)}{(2 - x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + 6 - 3x + x^2 + 3x}{(2 - x)^2} = \frac{6 + 4x - x^2}{(2 - x)^2}. \end{aligned}$$

Príklad 2.8. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \frac{5^x + 10}{\arcsin x}$.

Riešenie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{5^x + 10}{\arcsin x} \right)' = \frac{(5^x + 10)' \cdot \arcsin x - (5^x + 10) \cdot (\arcsin x)'}{(\arcsin x)^2} = \\ &= \frac{(5^x \ln 5 + 0) \cdot \arcsin x - (5^x + 10) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2} = \frac{5^x \ln 5 \cdot \arcsin x - (5^x + 10) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2}. \end{aligned}$$

Príklad 2.9. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \sqrt{x^2 + \operatorname{tg} 2x}$.

Riešenie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\sqrt{x^2 + \operatorname{tg} 2x} \right]' = \left[(x^2 + \operatorname{tg} 2x)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + \operatorname{tg} 2x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2 + \operatorname{tg} 2x)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + \operatorname{tg} 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[2x + \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot (2x)' \right] = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \operatorname{tg} 2x}} \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \operatorname{tg} 2x}} \cdot 2 \cdot \left(x + \frac{1}{\cos^2 2x} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \operatorname{tg} 2x}} \cdot \left(x + \frac{1}{\cos^2 2x} \right). \end{aligned}$$

Príklad 2.10. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = 10^{1-\sin^2 x}$.

Riešenie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(10^{1-\sin^2 x} \right)' = 10^{1-\sin^2 x} \cdot \ln 10 \cdot (1 - \sin^2 x)' = 10^{1-\sin^2 x} \cdot \ln 10 \cdot [0 - 2 \cdot \sin x \cdot (\sin x)'] = \\ &= 10^{1-\sin^2 x} \cdot \ln 10 \cdot (-2 \cdot \sin x \cdot \cos x) = -\sin 2x \cdot 10^{1-\sin^2 x} \cdot \ln 10. \end{aligned}$$

Príklad 2.11. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = \ln \log_2 x$.

Riešenie

$$f'(x) = (\ln \log_2 x)' = \frac{1}{\log_2 x} \cdot (\log_2 x)' = \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{x \ln 2}.$$

Príklad 2.12. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x) = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$.

Riešenie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x \arccos x - \sqrt{1-x^2} \right)' = (x \arccos x)' - \left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \right]' = (x)' \cdot \arccos x + x \cdot (\arccos x)' - \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x^2)' = 1 \cdot \arccos x + x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \\ &= \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x. \end{aligned}$$

Príklad 2.13. Vypočítajte hodnotu derivácie funkcie $f(x) = 2^{\frac{x}{x-2}}$ v bode $x = 3$.

Riešenie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2^{\frac{x}{x-2}} \right)' = 2^{\frac{x}{x-2}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{x-2} \right)' = 2^{\frac{x}{x-2}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{(x)' \cdot (x-2) - x \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} = \\ &= 2^{\frac{x}{x-2}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1 \cdot (x-2) - x \cdot 1}{(x-2)^2} = -2^{\frac{x}{x-2}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{2}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Deriváciu v danom bode získame dosadením $x = 3$ do derivácie funkcie $f'(x)$. Preto

$$f'(3) = -2^{\frac{3}{3-2}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{2}{(3-2)^2} = -2^3 \ln 2 \cdot 2 = -16 \ln 2.$$

Úlohy

2.1. Vypočítajte deriváciu danej funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{x^3}{2} + x^2 - x + 6$

b) $f(x) = 7 - \sqrt{x^5} + \frac{4}{\sqrt[5]{x^2}}$

c) $f(x) = \frac{2x^3 - x + 4\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = 2 \cotg x - x\sqrt{x} + 2 \cdot 10^x$

e) $f(x) = \frac{3}{x^7} + 2 \arcsin x - \frac{1}{6} \log x$

f) $f(x) = \left(\frac{1}{2x} - 1\right) \cdot \tg x$

g) $f(x) = e^x \cdot (\sin x - 2 \cos x)$

h) $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 3e^x\right) \cdot (\arctg x + \sqrt[3]{x})$

i) $f(x) = \frac{4x^5 - 6}{2 - x}$

j) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - x}{3x^3 + 2 \sin x}$

k) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{e^x \cdot x}$

l) $f(x) = \left(\frac{x^5}{5} + 9\right)^{-\frac{1}{4}}$

m) $f(x) = \frac{1}{5} \tg 5x$

n) $f(x) = \ln \left(\frac{2x+1}{3-x}\right)$

o) $f(x) = \arcsin \frac{x}{3}$

p) $f(x) = \ln^4(3x-2)$

q) $f(x) = x \cdot \arctg \sqrt{x}$

r) $f(x) = \sqrt{2x+1} \cdot \sin 2x$

s) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}$

t) $f(x) = \log_2(\cos x) + x \cdot 2^{-x}$

u) $f(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \left(\frac{2x}{x+1}\right)$

v) $f(x) = e^{\sin(3x+1)}$

x) $f(x) = 10^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}}$

y) $f(x) = \frac{x^2 + \sin 3x}{x \ln x + 3}$

2.2. Vypočítajte hodnotu derivácie funkcie $f(x)$ v danom bode x_0 .

a) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^2, \quad x_0 = 1$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}, \quad x_0 = 2$

c) $f(x) = (e^{2x} - 3) \cdot x^2, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \ln \left(\frac{2}{x-3}\right), \quad x_0 = 5$

e) $f(x) = \tg^3 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

f) $f(x) = 2^{x \cos x}, \quad x_0 = 0$

2.3. Vypočítajte deriváciu zložených funkcií a zjednodušte ju.

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

b) $f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3}$

c) $f(x) = \arctg \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

d) $f(x) = \ln \tg \frac{x}{2} + \cos x$

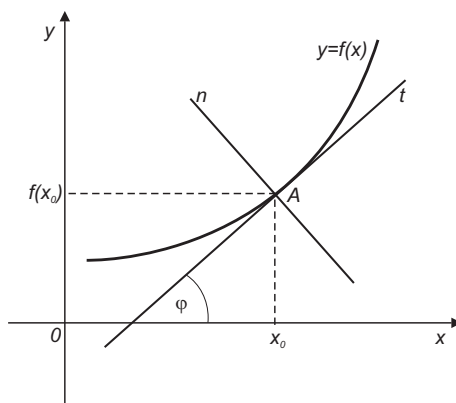
Výsledky

- 2.1. a) $f'(x) = \frac{3x^2}{2} + 2x - 1$ b) $f'(x) = -\frac{5}{2} \sqrt{x^3} - \frac{8}{5 \sqrt[5]{x^7}}$ c) $f'(x) = 5\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt[6]{x^7}}$
d) $f'(x) = -\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{3}{2} \sqrt{x} + 2 \cdot 10^x \ln 10$ e) $f'(x) = -\frac{21}{x^8} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{6x \ln 10}$
f) $f'(x) = -\frac{1}{2x^2} \cdot \tg x + \left(\frac{1}{2x} - 1\right) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ g) $f'(x) = e^x \cdot (3 \sin x - \cos x)$
h) $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - 3e^x\right) \cdot (\arctg x + \sqrt[3]{x}) + \left(\frac{1}{x} - 3e^x\right) \cdot \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)$ i) $f'(x) = \frac{40x^4 - 16x^5 - 6}{(2-x)^2}$
j) $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \cdot (3x^3 + 2 \sin x) - (\sqrt{x} - x) \cdot (9x^2 + 2 \cos x)}{(3x^3 + 2 \sin x)^2}$ k) $f'(x) = \frac{x^2 - x^3 + x + 1}{e^x \cdot x^2}$
l) $f'(x) = -\frac{x^4}{4 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{x^5}{5} + 9\right)^5}}$ m) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 5x}$ n) $f'(x) = \frac{7}{5x - 2x^2 + 3}$ o) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$
p) $f'(x) = \frac{12 \ln^3(3x-2)}{3x-2}$ q) $f'(x) = \arctg \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$

- r)** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \cdot \sin 2x + 2\sqrt{2x+1} \cdot \cos 2x$ **s)** $f'(x) = \frac{-2 \sin 2x \cdot \sin x - 2 \cos 2x \cdot \cos x}{(\sin x)^3}$
t) $f'(x) = -\frac{\lg x}{\ln 2} + 2^{-x} (1 - x \ln 2)$ **u)** $f'(x) = \frac{1}{5x^2 + 2x + 1}$
v) $f'(x) = 3e^{\sin(3x+1)} \cos(3x+1)$ **x)** $f'(x) = 10^{\frac{\sqrt{x}}{\ln x}} \cdot \ln 10 \cdot \frac{\ln x - 2}{2\sqrt{x} \cdot (\ln x)^2}$
y) $f'(x) = \frac{(2x+3 \cos 3x) \cdot (x \ln x + 3) - (x^2 + \sin 3x) \cdot (\ln x + 1)}{(x \ln x + 3)^2}$
- 2.2. **a)** $f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, f'(1) = 2$ **b)** $f'(x) = \frac{2(1-x)}{(x+2)^3}, f'(2) = -\frac{1}{32}$
c) $f'(x) = 2x^2 e^{2x} + 2x(e^{2x} - 3), f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}(e - 2)$ **d)** $f'(x) = -\frac{1}{x-3}, f'(5) = -\frac{1}{2}$
e) $f'(x) = \frac{3 \sin^2 x}{\cos^4 x}, f'(\frac{\pi}{4}) = 6$ **f)** $f'(x) = 2^{\cos x} \ln 2 (\cos x - x \sin x), f'(0) = \ln 2$
- 2.3. **a)** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ **b)** $f'(x) = \sqrt{9-x^2}$ **c)** $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **d)** $f'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$
-

2.2 Geometrický význam derivácie

Hodnota derivácie funkcie $f(x)$ v bode x_0 je *smernica dotyčnice* k_t ku grafu funkcie $y = f(x)$ v dotykovom bode $A = [x_0, f(x_0)]$, t.j. $f'(x_0) = k_t = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je uhol, ktorý zvierajú dotyčnica s kladnou časťou osi x .



Obr. 2.1: Dotyčnica a normála ku grafu funkcie $f(x)$ v bode A .

Rovnica dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v bode dotyku $A = [x_0, f(x_0)]$ má tvar

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Priamka kolmá na dotyčnicu ku grafu funkcie $f(x)$ a pretínajúca dotyčnicu v dotykovom bode A sa nazýva *normála ku grafu funkcie $f(x)$ v bode A* .

Ak $f'(x_0) \neq 0$, tak pre smernicu normály platí $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Rovnica normály ku grafu funkcie $f(x)$ v bode A má tvar

$$n : y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Príklad 2.14. Nájdime rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ v bode dotyku $A = [-1, ?]$.

Riešenie

Vypočítame y -ovú súradnicu dotykového bodu A dosadením čísla -1 za x do predpisu funkcie: $f(-1) = (-1)^4 + (-1)^2 - 1 = 1$. Bod dotyku má súradnice $A = [-1, 1]$. Funkciu zderivujeme

$$f'(x) = (x^4 + x^2 - 1)' = 4x^3 + 2x.$$

Smernicou dotyčnice je hodnota derivácie funkcie v dotykovom bode, t.j.

$$k_t = f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1) = -4 - 2 = -6.$$

Vypočítané hodnoty dosadíme do rovnice dotyčnice $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Dostaneme

$$t : y - 1 = -6(x + 1), \quad \text{po úprave} \quad t : 6x + y + 5 = 0.$$

Rovnica normály má tvar $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. Po dosadení získame

$$n : y - 1 = \frac{1}{6}(x + 1), \quad \text{po úprave} \quad n : x - 6y + 7 = 0.$$

Príklad 2.15. Nájdime rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = e^x \cdot \ln x$ v bode dotyku $A = [1, ?]$.

Riešenie

Najprv vypočítame y -ovú súradnicu dotykového bodu A : $f(1) = e^1 \cdot \ln 1 = 0$. Bod dotyku má súradnice $A = [1, 0]$. Vypočítame deriváciu funkcie

$$f'(x) = (e^x \cdot \ln x)' = (e^x)' \cdot \ln x + e^x \cdot (\ln x)' = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \cdot \left(\ln x + \frac{1}{x} \right).$$

Smernicou dotyčnice je hodnota derivácie funkcie v bode A , t.j. $k_t = f'(1) = e^1 \cdot \left(\ln 1 + \frac{1}{1} \right) = e$. Vypočítané hodnoty dosadíme do rovnice dotyčnice

$$t : y - 0 = e(x - 1), \quad \text{po úprave} \quad t : ex - y - e = 0.$$

Rovnica normály má tvar

$$n : y - 0 = -\frac{1}{e}(x - 1), \quad \text{po úprave} \quad n : x + ey - 1 = 0.$$

Úlohy

2.4. Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x)$ v bode dotyku A .

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1, \quad A = [0, ?]$

b) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - 3x + 1, \quad A = [1, ?]$

c) $f(x) = \frac{3x+1}{1-x}, \quad A = [2, ?]$

d) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2+1}, \quad A = [1, ?]$

e) $f(x) = \frac{e^x}{3} + 1, \quad A = [0, ?]$

f) $f(x) = x + \sin 2x, \quad A = \left[\frac{\pi}{2}, ? \right]$

g) $f(x) = \sqrt{2x+1}, \quad A = \left[\frac{3}{2}, ? \right]$

h) $f(x) = x \cdot \sqrt{x+1}, \quad A = [3, ?]$

i) $f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad A = [1, ?]$

j) $f(x) = 2x \ln x, \quad A = [e, ?]$

Výsledky

2.4. a) $t : 2x + y - 1 = 0, n : x - 2y + 2 = 0$

b) $t : 5x + 5y - 3 = 0, n : 5x - 5y - 13 = 0$

c) $t : 4x - y - 15 = 0, n : x + 4y + 26 = 0$

d) $t : x - 2y - 2 = 0, n : 4x + 2y - 3 = 0$

e) $t : x - 3y + 4 = 0, n : 9x + 3y - 4 = 0$

f) $t : x + y - \pi = 0, n : x - y = 0$

g) $t : 2x - 4y + 5 = 0, n : 2x + y - 5 = 0$

h) $t : 11x - 4y - 9 = 0, n : 4x + 11y - 78 = 0$

i) $t : x - y - 1 = 0, n : x + y - 1 = 0$

j) $t : 4x - y - 2e = 0, n : x + 4y - 9e = 0$

2.3 Derivácia vyššieho rádu

Nech funkcia $f'(x)$ je deriváciou funkcie $f(x)$ na množine M . Deriváciou druhého rádu alebo druhou deriváciou funkcie $f(x)$ nazývame funkciu $[f'(x)]'$, t.j. deriváciu prvej derivácie funkcie $f(x)$. Označujeme ju $f''(x)$.

Iné označenia:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{df(x)}{dx} \right), \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ alebo } y''(x).$$

Analogicky definujeme $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, $\dots$.

Deriváciou n -tého rádu alebo n -tou deriváciou funkcie $f(x)$ nazývame deriváciu $(n-1)$ -ej derivácie funkcie $f(x)$, t.j. $[f^{(n-1)}(x)]'$. Označujeme ju $f^{(n)}(x)$.

Iné označenia:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n}, \frac{d^n y}{dx^n}, y^{(n)}(x).$$

Príklad 2.16. Vypočítajte $f^{(4)}(x)$ funkcie $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{7x^3}{2}$.

Riešenie

Funkciu postupne derivujeme

$$f'(x) = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{7x^3}{2} \right)' = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot x^4 - \frac{7}{2} \cdot 3 \cdot x^2 = x^4 - \frac{21}{2}x^2,$$

$$f''(x) = \left(x^4 - \frac{21}{2}x^2 \right)' = 4 \cdot x^3 - \frac{21}{2} \cdot 2 \cdot x = 4x^3 - 21x,$$

$$f'''(x) = (4x^3 - 21x)' = 4 \cdot 3 \cdot x^2 - 21 \cdot 1 = 12x^2 - 21,$$

$$f^{(4)}(x) = (12x^2 - 21)' = 12 \cdot 2 \cdot x - 0 = 24x.$$

Príklad 2.17. Vypočítajte $f''(x)$ funkcie $f(x) = \frac{5x+2}{x+2}$.

Riešenie

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{5x+2}{x+2} \right)' = \frac{(5x+2)' \cdot (x+2) - (5x+2) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{(5+0) \cdot (x+2) - (5x+2) \cdot (1+0)}{(x+2)^2} = \\ &= \frac{5x+10-5x-2}{(x+2)^2} = \frac{8}{(x+2)^2} = 8(x+2)^{-2}, \end{aligned}$$

$$f''(x) = [8(x+2)^{-2}]' = 8 \cdot (-2) \cdot (x+2)^{-3} \cdot (x+2)' = -16(x+2)^{-3} \cdot 1 = -\frac{16}{(x+2)^3}.$$

Príklad 2.18. Vypočítajte $f''(x)$ funkcie $f(x) = \arcsin 4x$.

Riešenie

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\arcsin 4x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} \cdot (4x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} \cdot 4 = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} = 4(1-16x^2)^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= \left[4(1-16x^2)^{-\frac{1}{2}} \right]' = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (1-16x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (1-16x^2)' = -\frac{2}{\sqrt{(1-16x^2)^3}} \cdot (-16 \cdot 2x) = \\ &= \frac{64x}{\sqrt{(1-16x^2)^3}}. \end{aligned}$$

Príklad 2.19. Vypočítajte $f'''(x)$ funkcie $f(x) = 1 - \ln(\cos x)$.

Riešenie

$$f'(x) = [1 - \ln(\cos x)]' = 0 - \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \operatorname{tg} x,$$

$$f''(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = (\cos x)^{-2},$$

$$f'''(x) = [(\cos x)^{-2}]' = -2 \cdot (\cos x)^{-3} \cdot (\cos x)' = -2 \cdot (\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$$

Príklad 2.20. Dokážme, že funkcia $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ vyhovuje rovnici $4y'' + 4y' + y = 0$.

Riešenie

Vypočítame prvú a druhú deriváciu funkcie $y = f(x)$

$$\begin{aligned} y' &= (x \cdot e^{-\frac{x}{2}})' = (x)' \cdot e^{-\frac{x}{2}} + x \cdot (e^{-\frac{x}{2}})' = 1 \cdot e^{-\frac{x}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)' = e^{-\frac{x}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right), \\ y'' &= \left[e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right]' = (e^{-\frac{x}{2}})' \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) + e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)' = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)' \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) + e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) + e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-1 + \frac{x}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-2 + \frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Do ľavej strany rovnice $4y'' + 4y' + y = 0$ dosadíme y'' , y' , y . Upravíme a porovnáme s pravou stranou rovnice, ktorá sa rovná 0. Platí

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-2 + \frac{x}{2}\right) + 4 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) + x \cdot e^{-\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left[2 \cdot \left(-2 + \frac{x}{2}\right) + 4 \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) + x\right] = \\ &= e^{-\frac{x}{2}} \cdot (-4 + x + 4 - 2x + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = P. \end{aligned}$$

Dokázali sme, že funkcia $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ vyhovuje rovnici $4y'' + 4y' + y = 0$.

Úlohy

2.5. Vypočítajte deriváciu príslušného rádu funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = 3x^4 + \frac{1}{x^2}, \quad f''(x)$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}, \quad f''(x)$

c) $f(x) = \sqrt[4]{3 - 4x}, \quad f''(x)$

d) $f(x) = \ln(4 + x^2), \quad f''(x)$

e) $f(x) = e^{-x}(x^2 + 3x), \quad f''(x)$

f) $f(x) = x \cos x, \quad f''(x)$

g) $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}, \quad f''(x)$

h) $f(x) = \sin 3x, \quad f'''(x)$

i) $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{2}, \quad f'''(x)$

j) $f(x) = \cos^2 2x, \quad f'''(x)$

k) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad f'''(x)$

l) $f(x) = x^2 \ln x + x, \quad f'''(x)$

m) $f(x) = \arctg x, \quad f'''(x)$

n) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, \quad f'''(x)$

o) $f(x) = \frac{-3x^4 + 5x^3 - 2x + 7}{6}, \quad f^{(4)}(x)$

p) $f(x) = \frac{x}{2x - 1}, \quad f^{(4)}(x)$

2.6. Dokážte, že funkcia $y = f(x)$ vyhovuje danej rovnici.

a) $f(x) = \frac{2x}{x + 2}, \quad 6y' - (x + 2)^2 \cdot y''' = 0$

b) $f(x) = e^x \cos x, \quad y'' - 2y' + 2y = 0$

Výsledky

2.5. a) $f'(x) = 12x^3 - \frac{2}{x^3}, f''(x) = 36x^2 + \frac{6}{x^4}$ b) $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}, f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$
c) $f'(x) = -(3 - 4x)^{-\frac{3}{4}}, f''(x) = -3 \cdot (3 - 4x)^{-\frac{7}{4}}$ d) $f'(x) = \frac{2x}{4+x^2}, f''(x) = \frac{8-2x^2}{(4+x^2)^2}$
e) $f'(x) = e^{-x}(-x^2 - x + 3), f''(x) = e^{-x}(x^2 - x - 4)$ f) $f'(x) = \cos x - x \sin x,$
 $f''(x) = -2 \sin x - x \cos x$ g) $f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}, f''(x) = -\frac{2 \cos x}{e^x}$ h) $f'(x) = 3 \cos 3x,$
 $f''(x) = -9 \sin 3x, f'''(x) = -27 \cos 3x$ i) $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{2}, f''(x) = \frac{8}{x^3}, f'''(x) = -\frac{24}{x^4}$
j) $f'(x) = -2 \sin 4x, f''(x) = -8 \cos 4x, f'''(x) = 32 \sin 4x$ k) $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}, f''(x) = \frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3},$

$$\begin{aligned}
& f'''(x) = \frac{24x^3 - 24x}{(x^2 + 1)^4} \quad \textbf{l)} \quad f'(x) = 2x \ln x + x + 1, \quad f''(x) = 2 \ln x + 3, \quad f'''(x) = \frac{2}{x} \quad \textbf{m)} \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \\
& f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} \quad \textbf{n)} \quad f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{-1+2 \ln x}{x^3}, \quad f'''(x) = \frac{5-6 \ln x}{x^4} \\
& \textbf{o)} \quad f'(x) = -2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}, \quad f''(x) = -6x^2 + 5x, \quad f'''(x) = -12x + 5, \quad f^{(4)}(x) = -12 \\
& \textbf{p)} \quad f'(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{(2x-1)^3}, \quad f'''(x) = -\frac{24}{(2x-1)^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{192}{(2x-1)^5}
\end{aligned}$$

2.6. **a)** $f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}, f''(x) = -\frac{8}{(x+2)^3}, f'''(x) = \frac{24}{(x+2)^4}$ **b)** $f'(x) = e^x (\cos x - \sin x),$
 $f''(x) = -2e^x \sin x$

2.4 L'Hospitalovo pravidlo

Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ spĺňajú tieto podmienky:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ alebo $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$,
- funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú v istom okolí bodu x_0 derivácie $f'(x), g'(x)$ (v bode x_0 tieto derivácie nemusia existovať),
- existuje vlastná alebo nevlastná limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje vlastná alebo nevlastná limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ak sú splnené zodpovedajúce podmienky l'Hospitalovho pravidla, môžeme ho použiť opakovane. Platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

L'Hospitalovo pravidlo poskytuje návod na priamy výpočet limit typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Pre výpočet limit typu $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0, 0^\infty$ je potrebné daný výraz upraviť na neurčitost typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Príklad 2.21. Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$.

Riešenie

Po dosadení $x = 1$ dostaneme výraz typu $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, preto môžeme priamo použiť l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - 2)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - 0}{1 - 0} = [\text{dosadíme } x = 1] = 4.$$

Príklad 2.22. Vypočítajme $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$.

Riešenie

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^3 - 3x^2 + 1)'}{(x^3 - 2x^2 + x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 6x}{3x^2 - 4x + 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(6x^2 - 6x)'}{(3x^2 - 4x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x - 6}{6x - 4} = \frac{12 - 6}{6 - 4} = \frac{6}{2} = 3.
\end{aligned}$$

Príklad 2.23. Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{9-x}-2}{x-5}$.

Riešenie

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{9-x}-2}{x-5} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{9-x}-2)'}{(x-5)'} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2} \cdot (9-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) - 0}{1-0} = -\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{9-x}}}{1} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{9-x}} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{9-5}} = -\frac{1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Príklad 2.24. Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$.

Riešenie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x})'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = \infty.$$

Príklad 2.25. Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} \right)$.

Riešenie

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} \right) &= \{ \infty - \infty \} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - (x+3)}{(x-3) \cdot (x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x^2-9} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)'}{(x^2-9)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Príklad 2.26. Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} &= \{ 0 \cdot \infty \} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2})}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \\ &= \{ e^\infty \} = \infty. \end{aligned}$$

Príklad 2.27. Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+4x)^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie

Limita je typu 1^∞ . Aby sme mohli použiť l'Hospitalovo pravidlo, je potrebné funkciu upraviť na tvar

$$(1+4x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(1+4x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+4x)} = e^{\frac{\ln(1+4x)}{x}}.$$

Teda

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+4x)^{\frac{1}{x}} = \{ 1^\infty \} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(1+4x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+4x)}{x}}.$$

Najprv vypočítame limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+4x)}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln(1+4x)]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+4x} \cdot 4}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{1+4x} = 4.$$

Teda

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+4x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+4x)}{x}} = e^4.$$

Príklad 2.28. Vypočítajte $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie

Limita je typu ∞^0 . Funkciu upravíme

$$(\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x)}.$$

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \{\infty^0\} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x)}.$$

Najprv vypočítame limitu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x) &= \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\ln(\ln x)]'}{(x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} = \left\{ \frac{1}{\infty} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Odtiaľ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(\ln x)} = e^0 = 1.$$

Úlohy

2.7. Vypočítajte limity funkcií.

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x-1}{1-9x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-5x-3}{x^3-9x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+5x}-1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\sin x} - 1}{\sqrt{x}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 11x^2 - 1}{2x^3 + 6x}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2^{x+1}}{1 + 2^x}$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x + 1}$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 + 2x - 1) \cdot e^{-2x}$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$

m) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x)^{\cos x}$

n) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 5)^{\frac{1}{3+x}}$

Výsledky

2.7. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{18}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{4}$ f) 0 g) $\frac{1}{2}$ h) $\frac{7}{2}$ i) 2 j) 0 k) 0 l) e^{-1} m) 1 n) 1

2.5 Monotónnosť funkcie

Ak funkcia má deriváciu, môžeme na vyšetrenie monotónnosti funkcie použiť nasledujúce vety. Nech pre funkciu $f(x)$ v každom bode $x \in (a, b)$ platí, že

$$f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0).$$

Potom funkcia $f(x)$ je na intervale (a, b) *rastúca* (*klesajúca*).

Nech pre funkciu $f(x)$ v každom bode $x \in (a, b)$ platí, že

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

Potom funkcia $f(x)$ je na intervale (a, b) *neklesajúca* (*nerastúca*).

Poznámka. Symbolom $\nearrow$ budeme označovať rastúcu funkciu, symbolom $\searrow$ klesajúcu funkciu.

Príklad 2.29. Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 4x + 5$ rýdzomonotónna.

Riešenie

$D_f = \mathbb{R}$. Vypočítame deriváciu funkcie $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 4x + 5\right)' = x^2 - 3x - 4$.

Vyriešením rovnice $f'(x) = 0$ nájdeme nulové body derivácie $f'(x)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = 4.$$

Tieto body rozdelia definičný obor $D_f = \mathbb{R}$ na tri intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 4)$ a $(4, \infty)$. Z každého intervalu vyberieme ľubovoľné číslo a dosadíme do derivácie $f'(x) = x^2 - 3x - 4$. Napríklad z intervalu $(-\infty, -1)$ vyberieme číslo $x = -2$. Platí

$$(-\infty, -1): \quad x = -2 \Rightarrow f'(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) - 4 = 4 + 6 - 4 = 6 > 0.$$

Analogicky postupujeme v ďalších intervaloch:

$$(-1, 4): \quad x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = 0 - 0 - 4 = -4 < 0,$$

$$(4, \infty): \quad x = 5 \Rightarrow f'(5) = 5^2 - 3 \cdot 5 - 4 = 25 - 15 - 4 = 6 > 0.$$

Znamienko výsledku vyznačíme pre príslušný interval do tabuľky. Ak derivácia funkcie má znamienko plus, funkcia na danom intervale rastie. Ak derivácia funkcie má znamienko mínus, funkcia na danom intervale klesá.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 4)$	4	$(4, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Funkcia $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 4x + 5$ je rastúca na $(-\infty, -1)$, $(4, \infty)$, klesajúca na $(-1, 4)$.

Príklad 2.30. Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3}$ rýdzomonotónna.

Riešenie

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Vypočítame deriváciu funkcie

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2 - 1}{x^3}\right)' = \frac{6x \cdot x^3 - (3x^2 - 1) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-3x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{3x^2(1 - x^2)}{x^6} = \frac{3(1+x)(1-x)}{x^4}.$$

Platí

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3(1+x)(1-x)}{x^4} = 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = 1.$$

Tieto dva body spolu s bodom nespojitosti funkcie $x = 0$ rozdelia definičný obor funkcie na štyri intervaly, ktoré zapíšeme do tabuľky a na každom z nich zistíme znamienko prvej derivácie funkcie. Podľa znamienka určíme, na ktorom intervale funkcia rastie, a na ktorom klesá.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Funkcia $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3}$ je rastúca na intervaloch $(-1, 0)$, $(0, 1)$, klesajúca na intervaloch $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$.

Príklad 2.31. Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = x^2 \cdot e^x$ rýdzomonotónna.

Riešenie

$D_f = \mathbb{R}$. Vypočítame deriváciu funkcie $f'(x) = (x^2 \cdot e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot x \cdot (2 + x)$.

Keďže $e^x \neq 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, platí

$$e^x \cdot x \cdot (2 + x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \quad \vee \quad x_2 = 0.$$

Zistíme znamienko derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a výsledky zapíšeme do tabuľky

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Funkcia $f(x) = x^2 \cdot e^x$ je rastúca na $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$, klesajúca na $(-2, 0)$.

Príklad 2.32. Nájdime intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = \ln(4 + x^2)$ rýdzomonotónna.

Riešenie

$D_f = \mathbb{R}$. Vypočítame deriváciu funkcie $f'(x) = [\ln(4 + x^2)]' = \frac{1}{4 + x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{4 + x^2}$.

Funkcia je rastúca pre tie reálne čísla x , pre ktoré platí

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{4 + x^2} > 0.$$

Keďže $4 + x^2 > 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, platí

$$\frac{2x}{4 + x^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Funkcia je klesajúca pre tie reálne čísla x , pre ktoré platí

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{4 + x^2} < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Funkcia $f(x)$ je rastúca na intervale $(0, \infty)$ a klesajúca na intervale $(-\infty, 0)$.

Úlohy

2.8. V nasledujúcich úlohách nájdite intervaly monotónnosti funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3x - 1$

b) $f(x) = \frac{1 - 4x - x^2}{2}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{6} + 3x - 5$

d) $f(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{4} + 1$

e) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 1$

f) $f(x) = \frac{x + 4}{x - 1}$

g) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

h) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$

i) $f(x) = e^{-x} + x$

j) $f(x) = \frac{e^x}{x + 1}$

k) $f(x) = 2x^2 - \ln x$

l) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Výsledky

2.8. a) $\nearrow (-\frac{9}{2}, \infty)$, $\searrow (-\infty, -\frac{9}{2})$

b) $\nearrow (-\infty, -2)$, $\searrow (-2, \infty)$

c) $\nearrow (-\infty, -\infty)$

d) $\nearrow (0, \infty)$, $\searrow (-\infty, 0)$

e) $\nearrow (-\infty, -1)$, $(2, \infty)$, $\searrow (-1, 0)$, $(0, 2)$

f) $\searrow (-\infty, 1)$, $(1, \infty)$

g) $\nearrow (-\infty, -1)$, $(1, \infty)$, $\searrow (-1, 0)$, $(0, 1)$

h) $\nearrow (-2, 2)$, $\searrow (-\infty, -2)$, $(2, \infty)$

i) $\nearrow (0, \infty)$, $\searrow (-\infty, 0)$

j) $\nearrow (0, \infty)$, $\searrow (-\infty, -1)$, $(-1, 0)$

k) $\nearrow (\frac{1}{2}, \infty)$, $\searrow (0, \frac{1}{2})$

l) $\nearrow (e, \infty)$, $\searrow (0, 1)$, $(1, e)$

2.6 Lokálne extrémym

Hovoríme, že funkcia $f(x)$ má v bode $x_0 \in (a, b)$ *ostré lokálne maximum* (*ostré lokálne minimum*), ak existuje také okolie bodu x_0 , že pre každé x z okolia bodu x_0 , $x \neq x_0$, platí

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Lokálne maximá a minimá funkcie $f(x)$ nazývame spoločným názvom *lokálnymi extrémami* funkcie.

Poznámka. Symbolom LM budeme označovať ostré lokálne maximum $f(x)$ v bode x_0 , symbolom Lm ostré

lokálne minimum $f(x)$ v bode x_0 .

Pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie $f(x)$ môžeme použiť nasledujúci postup:

- určíme definičný obor D_f funkcie $f(x)$ a vypočítame deriváciu funkcie $f'(x)$,
- nájdeme stacionárne body funkcie $f(x)$, t.j. body x_0 , v ktorých je $f'(x) = 0$ alebo body, v ktorých $f'(x)$ neexistuje,
- vypočítame druhú deriváciu funkcie $f''(x)$,
- ak v stacionárnom bode x_0 je $f''(x_0) < 0$, tak funkcia $f(x)$ má v bode x_0 ostré lokálne maximum,
- ak v stacionárnom bode x_0 je $f''(x_0) > 0$, tak funkcia $f(x)$ má v bode x_0 ostré lokálne minimum,
- ak v stacionárnom bode x_0 je $f''(x_0) = 0$, hľadáme v bode x_0 derivácie vyššieho rádu, až nájdeme v poradí prvú nenulovú deriváciu, t.j.

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ak n je *nepárne číslo*, funkcia $f(x)$ nemá v bode x_0 lokálny extrém. Ak n je *párne číslo*, tak funkcia $f(x)$ má v bode x_0 lokálny extrém a to ostré lokálne maximum, ak $f^{(n)}(x_0) < 0$ a ostré lokálne minimum, ak $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Príklad 2.33. Vypočítajme lokálne extrémymy funkcie $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + 1$.

Riešenie

$D_f = \mathbb{R}$. Vypočítame prvú deriváciu funkcie $f'(x) = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + 1\right)' = 2x^2 + 5x - 3$. Riešením rovnice

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

vypočítame stacionárne body $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -3$.

Druhá derivácia funkcie je $f''(x) = (2x^2 + 5x - 3)' = 4x + 5$. Vypočítame hodnoty druhej derivácie $f''(x)$ v stacionárnych bodoch

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 7 > 0 \Rightarrow \text{v bode } x = \frac{1}{2} \text{ má funkcia } Lm,$$

$$f''(-3) = 4 \cdot (-3) + 5 = -7 < 0 \Rightarrow \text{v bode } x = -3 \text{ má funkcia } LM.$$

Vypočítame hodnoty funkcie v daných bodoch

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{12} + \frac{5}{8} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{24},$$

$$f(-3) = \frac{2}{3} \cdot (-3)^3 + \frac{5}{2} \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) + 1 = -18 + \frac{45}{2} + 10 = \frac{29}{2}.$$

Lokálne extrémymy funkcie sú $Lm \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{24}\right]$, $LM \left[-3, \frac{29}{2}\right]$.

Príklad 2.34. Vypočítajme lokálne extrémymy funkcie $f(x) = -\frac{x^3}{6} - x^2 - 2x + 4$.

Riešenie

$D_f = \mathbb{R}$. Vypočítame prvú deriváciu funkcie $f'(x) = \left(-\frac{x^3}{6} - x^2 - 2x + 4\right)' = -\frac{x^2}{2} - 2x - 2$.

Z rovnice

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$$

vypočítame stacionárny bod $x = -2$.

Vypočítame druhú deriváciu funkcie a jej hodnotu v stacionárnom bode

$$f''(x) = \left(-\frac{x^2}{2} - 2x - 2\right)' = -x - 2, \quad f''(-2) = -(-2) - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Keďže $f''(-2) = 0$, vypočítame $f'''(x)$ a zistíme, aká je hodnota $f'''(-2)$. Pretože

$$f'''(x) = -1, \quad f'''(-2) = -1 \neq 0,$$

funkcia nemá v bode $x = -2$ lokálny extrém.

Príklad 2.35. Vypočítajte lokálne extrémym funkcie $f(x) = e^{-x^2}$.

Riešenie

$D_f = \mathbb{R}$. Vypočítame prvú deriváciu funkcie $f'(x) = (e^{-x^2})' = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{-x^2}$.
Stacionárny bod určíme riešením rovnice

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vypočítame druhú deriváciu funkcie a jej hodnotu v stacionárnom bode.

$$f''(x) = (-2x \cdot e^{-x^2})' = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} \cdot (-2 + 4x^2) = 2e^{-x^2} \cdot (2x^2 - 1)$$

$$f''(0) = 2 \cdot e^0 \cdot (2 \cdot 0 - 1) = 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2 < 0 \Rightarrow \text{LM v bode } x = 0.$$

Funkcia $f(x) = e^{-x^2}$ má v bode $x = 0$ ostré lokálne maximum $LM[0, 1]$, pričom $f(0) = e^0 = 1$.

Lokálne extrémym funkcie $f(x)$ môžeme nájsť aj pomocou monotónnosti funkcie.

Ak je funkcia $f(x)$ v stacionárnom bode x_0 spojitá, a ak existuje ľavé okolie bodu x_0 také, že pre všetky x z tohto okolia je $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) a také pravé okolie bodu x_0 , že pre všetky x z tohto okolia je $f'(x_0) < 0$ ($f'(x_0) > 0$), tak funkcia $f(x)$ má v bode *ostré lokálne maximum* (*ostré lokálne minimum*).

Príklad 2.36. Vypočítajte lokálne extrémym funkcie $f(x) = \frac{x-4}{x^2}$.

Riešenie

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Pomocou prvej derivácie určíme stacionárne body.

$$f'(x) = \left(\frac{x-4}{x^2}\right)' = \frac{1 \cdot x^2 - (x-4) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-x^2 + 8x}{x^4} = \frac{x(-x+8)}{x^4} = \frac{8-x}{x^3},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8-x=0 \Leftrightarrow x=8.$$

Stacionárny bod je $x=8$. Derivácia neexistuje v bode $x=0$. Tieto dva body rozdeľujú definičný obor funkcie na tri intervaly. Podľa znamienka prvej derivácie na jednotlivých intervaloch vyšetríme monotónnosť funkcie, výsledky zapíšeme do tabuľky

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 8)$	8	$(8, \infty)$
$f'(x)$	—	×	+	0	—
$f(x)$	$\searrow$	×	$\nearrow$	LM	$\searrow$

V ľavom okolí bodu $x=0$ je funkcia klesajúca, v pravom okolí bodu je rastúca. Ale bod $x=0$ nepatrí do definičného oboru funkcie, preto v tomto bode funkcia nemá lokálny extrém. V ľavom okolí bodu $x=8$ je funkcia rastúca, v pravom okolí bodu je klesajúca, teda funkcia $f(x)$ má v bode $x=8$ ostré lokálne maximum $f(8) = \frac{8-4}{8^2} = \frac{1}{16}$. Teda $LM[8, \frac{1}{16}]$.

Úlohy

2.9. Vypočítajte lokálne extrémym funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = 2x^2 + 12x + 16$

c) $f(x) = 2 - 3x + 9x^2 - 8x^3$

e) $f(x) = 5 - \frac{16}{x} - x^2$

g) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$

i) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 12}{x + 3}$

k) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}$

m) $f(x) = (x+1) \cdot e^{2x}$

o) $f(x) = x \cdot \ln x$

b) $f(x) = 25x - 5x^2 - 31$

d) $f(x) = 2 - 36x^2 + 20x^3 - 3x^4$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

h) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$

j) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$

l) $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

n) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

p) $f(x) = x + 2 \arctg x$

Výsledky

- 2.9. a) $Lm[-3, -2]$ b) $LM\left[\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right]$ c) $Lm\left[\frac{1}{4}, \frac{27}{16}\right], LM\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right]$ d) $Lm[2, -30], LM[0, 2], LM[3, -25]$ e) $LM[2, -7]$ f) $LM[0, 1]$ g) $Lm[1, 1], LM[-1, -3]$ h) $Lm\left[\frac{4}{3}, -\frac{1}{8}\right]$ i) $LM[0, 4], LM[-6, -8]$ j) $LM[7, 9], LM[3, 1]$ k) $Lm[1, -3], LM[-1, \frac{7}{3}]$ l) nemá lokálne extrémny m) $Lm\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2e^3}\right]$ n) $LM[1, e]$ o) $Lm\left[\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right]$ p) nemá lokálne extrémny
-

2.7 Konvexnosť, konkávnosť funkcie, inflexný bod

Konvexnosť, konkávnosť funkcie

Nech funkcia $f(x)$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ a má v každom bode $x \in \langle a, b \rangle$ deriváciu. Hovoríme, že funkcia $f(x)$ je *konvexná* (*konkávna*) na intervale $\langle a, b \rangle$, ak pre každú dotyčnicu v bode $x \in \langle a, b \rangle$ ku grafu funkcie $f(x)$ platí, že všetky body grafu (okrem dotykového) ležia nad (pod) touto dotyčnicou.

Nech funkcia $f(x)$ má v každom bode $x \in \langle a, b \rangle$ druhú deriváciu $f''(x)$ a nech pre každé $x \in \langle a, b \rangle$ platí, že

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0).$$

Potom funkcia $f(x)$ je na intervale $\langle a, b \rangle$ *konvexná* (*konkávna*).

Poznámka. Na označenie konvexnej funkcie budeme používať symbol $\smile$, na označenie konkávnej funkcie symbol $\frown$.

Inflexný bod

Uvažujme funkciu $f(x)$, ktorá je definovaná a spojitá v okolí bodu $x_0 \in D_f$. Ak existuje ľavé okolie bodu x_0 , v ktorom je funkcia $f(x)$ *konvexná* (*konkávna*) a pravé okolie bodu x_0 , v ktorom je funkcia $f(x)$ *konkávna* (*konvexná*), tak bod x_0 nazývame *inflexným bodom* funkcie $f(x)$. Inflexný bod $[x_0, f(x_0)]$ je teda bod, v ktorom sa mení funkcia z konvexnej na konkávnu, prípadne naopak (z konkávnej na konvexnú).

Inflexné body môžeme určiť aj pomocou nasledujúceho postupu:

- určíme definičný obor D_f funkcie $f(x)$,
- vypočítame deriváciu funkcie $f'(x)$,
- vypočítame druhú deriváciu funkcie $f''(x)$,
- nájdeme body, v ktorých je $f''(x) = 0$ alebo body, v ktorých $f''(x)$ neexistuje,
- ak v bode x_0 je $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, tak funkcia má v bode x_0 inflexný bod,
- ak v bode x_0 je $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, počítame derivácie vyššieho rádu, až kým nezískame deriváciu, ktorá bude rôzna od nuly, t.j. $f^{(4)}(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Ak n je *nepárne číslo*, má funkcia $f(x)$ v bode x_0 inflexný bod. Ak n je *párne číslo*, tak funkcia má v bode x_0 ostrý lokálny extrém.

Príklad 2.37. Vypočítajme inflexné body funkcie $f(x) = 18x^2 + 6x - 1$.

Riešenie

Funkcia $f(x)$ je definovaná pre všetky reálne čísla x , t.j. $D_f = \mathbb{R}$. Vypočítame prvú a druhú deriváciu funkcie

$$f'(x) = (18x^2 + 6x - 1)' = 36x + 6, \quad f''(x) = (36x + 6)' = 36.$$

Pretože $f''(x) \neq 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, funkcia $f(x) = 18x^2 + 6x - 1$ nemá inflexné body.

Príklad 2.38. Vypočítajme inflexné body funkcie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 7$.

Riešenie

$D_f = \mathbb{R}$. Vypočítame prvú a druhú deriváciu funkcie

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 7\right)' = x^2 + 3x + 1, \quad f''(x) = (x^2 + 3x + 1)' = 2x + 3.$$

Nájďme body, v ktorých je druhá derivácia funkcie rovná nule. Platí

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Funkcia môže mať inflexný bod pre $x = -\frac{3}{2}$. Vypočítame $f'''(x)$ a jej hodnotu v danom bode. Platí

$$f'''(x) = 2, \quad f''' \left(-\frac{3}{2}\right) = 2 \neq 0.$$

Daná funkcia $f(x)$ má v bode $x = -\frac{3}{2}$ inflexný bod. Platí $f(-\frac{3}{2}) = \frac{1}{3}(-\frac{3}{2})^3 + \frac{3}{2}(-\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2} + 7 = \frac{31}{4}$, teda $IB \left[-\frac{3}{2}, \frac{31}{4}\right]$.

Príklad 2.39. Vyšetrite konvexnosť, konkávnosť a nájdite inflexné body funkcie $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$.

Riešenie

$D_f = \mathbb{R}$. Inflexné body funkcie $f(x)$ môžeme nájsť aj použitím konvexnosti a konkávnosti funkcie. Využijeme skutočnosť, že ak pre všetky body x z ľavého okolia bodu x_0 je $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) a pre všetky body x z pravého okolia bodu x_0 je $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), tak funkcia $f(x)$ má v bode x_0 inflexný bod. Vypočítame prvú a druhú deriváciu funkcie.

$$f'(x) = (x^4 - 6x^2 + 8)' = 4x^3 - 12x, \quad f''(x) = (4x^3 - 12x)' = 12x^2 - 12.$$

Nulové body druhej derivácie dostaneme riešením rovnice

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 1.$$

Tieto dve čísla rozdelia definičný obor na tri intervaly $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, \infty)$. Z každého intervalu zvolíme ľubovoľné číslo a dosadíme do druhej derivácie funkcie.

$$(-\infty, -1): \quad x = -2 \Rightarrow f''(-2) = 12(-2)^2 - 12 = 36 > 0,$$

$$(-1, 1): \quad x = 0 \Rightarrow f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 12 = -12 < 0,$$

$$(1, \infty): \quad x = 3 \Rightarrow f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 12 = 96 > 0.$$

Znamienka derivácie vyznačíme do tabuľky a potom rozhodneme, na ktorých intervaloch je funkcia konvexná a na ktorých konkávna. Ak hodnota druhej derivácie má znamienko plus, tak funkcia je na danom intervale konvexná. Ak je znamienko druhej derivácie mínus, tak funkcia je na danom intervale konkávna.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	IB	$\cap$	IB	$\cup$

Funkcia $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$ je konvexná na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$, konkávna na $(-1, 1)$. Keďže v bode $x = -1$ sa mení funkcia z konvexnej na konkávnu, bod $[-1, 3]$ je inflexným bodom funkcie, pričom platí $f(-1) = (-1)^4 - 6(-1)^2 + 8 = 3$. V bode $x = 1$ sa mení funkcia z konkávnej na konvexnú, bod $[1, 3]$ je tiež inflexným bodom funkcie, pričom $f(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^2 + 8 = 3$.

Úlohy

2.10. Vyšetrite konvexnosť, konkávnosť a nájdite inflexné body funkcie $f(x)$.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + x + 10$

b) $f(x) = \frac{x^3}{2} - 9x^2 + 5x + 170$

c) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 5x^2 + 4x - 103$

d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x - 1$

e) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 13x + 135$

f) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$

g) $f(x) = \frac{x-4}{x^2}$

h) $f(x) = 5 - \frac{8}{x} - x^2$

i) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 7}{x + 2}$

j) $f(x) = x \cdot e^{x-1}$

k) $f(x) = x \cdot \ln x$

l) $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$

Výsledky

- 2.10. a) $\cup (2, \infty), \cap (-\infty, 2), IB [2, -4]$ b) $\cup (6, \infty), \cap (-\infty, 6), IB [6, -16]$ c) $\cup (-\infty, 5), \cap (5, \infty), IB [5, \frac{1}{3}]$ d) $\cup (-\infty, 0), (2, \infty), \cap (0, 2), IB_1 [0, -1], IB_2 [2, 7]$ e) $\cup (-\infty, -2), (3, \infty), \cap (-2, 3), IB_1 [-2, -3], IB_2 [3, -123]$ f) $\cup (0, \infty), \cap (-\infty, 0), IB$ nemá g) $\cup (12, \infty), \cap (-\infty, 0), (0, 12), IB [12, \frac{1}{18}]$ h) $\cup (-\infty, -2), \cap (-2, 0), (0, \infty), IB [-2, 5]$ i) $\cup (-2, \infty), \cap (-\infty, -2), IB$ nemá j) $\cup (-2, \infty), \cap (-\infty, -2), IB [-2, -2e^{-3}]$ k) konvexná na celom $D_f = (0, \infty), IB$ nemá l) $\cup (0, \infty), \cap (-\infty, 0), IB$ nemá

2.8 Priebeh funkcie

Pri vyšetřovaní priebehu funkcie $f(x)$ najčastejšie zisťujeme:

1. definičný obor D_f ,
2. body nespojitosti a jednostranné limity v nich,
3. párnosť, nepárnosť, prípadne periodičnosť,
4. priesečníky s osou x a y (t.j. nulové body),
5. intervaly monotónnosti,
6. lokálne extrémny,
7. intervaly konvexnosti a konkávnosti,
8. inflexné body,
9. asymptoty so smernicou, asymptoty bez smernice,
10. graf.

Príklad 2.40. Vyšetřime priebeh funkcie $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ a nakreslime jej graf.

Riešenie

1. Definičný obor funkcie je $D_f = \mathbb{R}$.
2. Funkcia $f(x)$ je spojitá na D_f , nemá body nespojitosti.
3. Párnosť, nepárnosť:

Pretože $D_f = \mathbb{R}$, $x \in D_f$ aj $(-x) \in D_f$.

Pre ľubovoľné reálne číslo vypočítame hodnotu $f(-x)$

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 - x = -x^3 - 2x^2 - x \neq f(x) \Rightarrow \text{funkcia nie je párna.}$$

$$f(-x) = -x^3 - 2x^2 - x = -(x^3 + 2x^2 + x) \neq -f(x) \Rightarrow \text{funkcia nie je nepárna.}$$

Funkcia $f(x)$ nie je párna a nie je nepárna.

4. Priesečník s osou x :

Riešime rovnicu

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2 = 0,$$

odkiaľ $x_1 = 0 \vee x_2 = 1$.

Priesečník s osou y : $x = 0 \Rightarrow y = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 0 = 0$.

Funkcia $f(x)$ má nulové body $NB_1[0, 0]$, $NB_2[1, 0]$.

5. Intervaly monotónnosti:

Vypočítame prvú deriváciu funkcie $f'(x) = (x^3 - 2x^2 + x)' = 3x^2 - 4x + 1$.

Stacionárne body vypočítame z rovnice

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3} \vee x_2 = 1.$$

x	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	LM	$\searrow$	Lm	$\nearrow$

Funkcia $f(x)$ je rastúca na $(-\infty, \frac{1}{3})$, $(1, \infty)$ a klesajúca na $(\frac{1}{3}, 1)$.

6. Funkcia má ostré lokálne maximum $LM[\frac{1}{3}, \frac{4}{27}]$ a ostré lokálne minimum $Lm[1, 0]$.

7. Intervaly konvexnosti a konkávnosti:

Vypočítame druhú deriváciu funkcie $f''(x) = (3x^2 - 4x + 1)' = 6x - 4$.

Nájďme body, v ktorých je druhá derivácia rovná nule

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

x	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frown$	IB	$\smile$

Funkcia je konvexná na intervale $(\frac{2}{3}, \infty)$, konkávna na intervale $(-\infty, \frac{2}{3})$.

8. Funkcia $f(x)$ má inflexný bod $IB[\frac{2}{3}, \frac{2}{27}]$, pričom $f(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^3 - 2(\frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$.

9. Asymptota bez smernice: Funkcia je spojitá na celom D_f , nemá asymptoty bez smernice.

Asymptota so smernicou $y = kx + q$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x-1)^2 = \infty.$$

Limita je nevlastná, funkcia $f(x)$ nemá asymptotu so smernicou.

10. Graf: pozri Obr. 2.2.

Príklad 2.41. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$ a nakreslite jej graf.

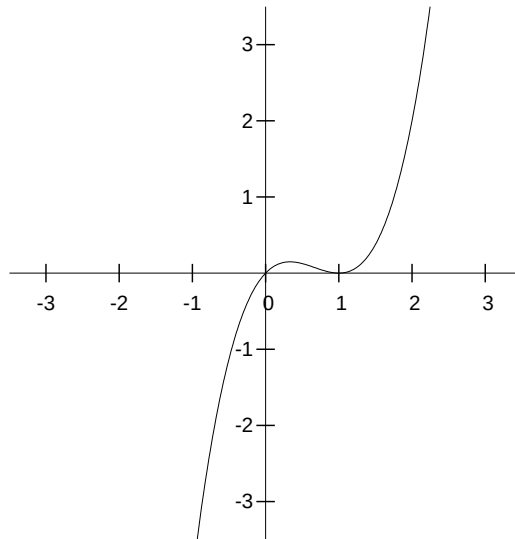
Riešenie

1. Definičný obor funkcie je $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$.

2. Funkcia $f(x)$ je nespojitá v bode $x = -2$. Počítame jednostranné limity sprava a zľava v bode nespojitosti $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x^2 - 3}{x + 2} \right) = \left\{ \frac{1}{0^+} \right\} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{x^2 - 3}{x + 2} \right) = \left\{ \frac{1}{0^-} \right\} = -\infty.$$

Priamka $x = -2$ je asymptotou bez smernice.



Obr. 2.2: Graf funkcie $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

3. Párnosť, nepárnosť:

Z definičného oboru vyplýva, že funkcia nie je párna a nie je nepárna (nie je splnená podmienka $x \in D_f$ aj $(-x) \in D_f$).

4. Priesečník s osou x :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3}{x + 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_1 = -\sqrt{3} \quad \vee \quad x_2 = \sqrt{3}.$$

Priesečník s osou y : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^2 - 3}{0 + 2} = -\frac{3}{2}$.

Funkcia $f(x)$ má nulové body $NB_1[-\sqrt{3}, 0]$, $NB_2[\sqrt{3}, 0]$, $NB_3[0, -\frac{3}{2}]$.

5. Intervaly monotónnosti:

Vypočítame prvú deriváciu funkcie $f'(x) = \left(\frac{x^2 - 3}{x + 2} \right)' = \frac{2x \cdot (x + 2) - (x^2 - 3)}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$.

Položme $f'(x) = 0$. Platí

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \quad \vee \quad x_2 = -1.$$

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	$\times$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	LM	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	Lm	$\nearrow$

Funkcia $f(x)$ je rastúca na $(-\infty, -3)$, $(-1, \infty)$ a klesajúca na $(-3, -2)$, $(-2, -1)$.

6. Funkcia $f(x)$ má ostré lokálne maximum v bode $LM[-3, -6]$, ostré lokálne minimum v bode $Lm[-1, -2]$, kde $f(-3) = \frac{(-3)^2 - 3}{-3 + 2} = -6$ a $f(-1) = \frac{(-1)^2 - 3}{-1 + 2} = -2$.

7. Intervaly konvexnosti a konkávnosti:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2} \right]' = \frac{(2x + 4) \cdot (x + 2)^2 - (x^2 + 4x + 3) \cdot 2 \cdot (x + 2)}{(x + 2)^4} = \\ &= \frac{2(x + 2) \cdot [(x + 2)^2 - (x^2 + 4x + 3)]}{(x + 2)^4} = \frac{2(x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4x - 3)}{(x + 2)^3} = \frac{2}{(x + 2)^3}. \end{aligned}$$

Položme $f''(x) = 0$. Pretože $\frac{2}{(x + 2)^3} \neq 0$, definičný obor funkcie rozdelíme iba v bode, v ktorom druhá

derivácia neexistuje, t.j. v bode $x = -2$. Tabuľka bude mať tvar

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$\times$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\times$	$\cup$

Funkcia je konvexná na intervale $(-2, \infty)$, konkávna na intervale $(-\infty, -2)$.

- Funkcia sa mení z konkávnej na konvexnú v bode $x = -2$. Keďže tento bod nepatrí do D_f , funkcia $f(x)$ nemá inflexné body.
- Z výpočtov jednostranných limit vyplýva, že priamka $x = -2$ je asymptotou bez smernice ku grafu funkcie.

Asymptota so smernicou $y = kx + q$:

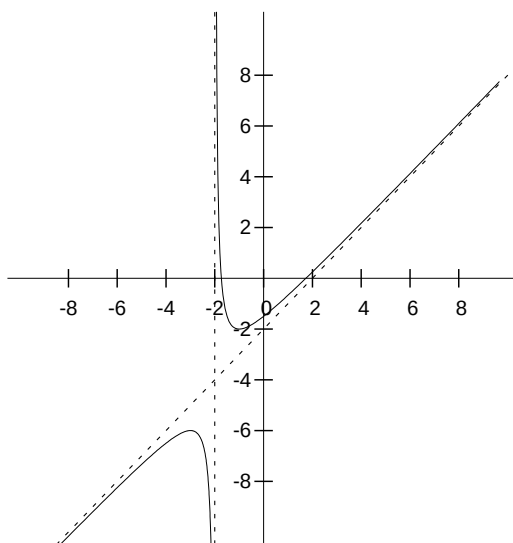
$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2-3}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3}{x^2+2x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2-3}{x+2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3-x^2-2x}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3-2x}{x+2} = -2.$$

ASS pre $x \rightarrow \pm\infty$ má rovnicu $y = x - 2$.

- Graf: pozri Obr. 2.3.



Obr. 2.3: Graf funkcie $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$.

Príklad 2.42. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ a nakreslite jej graf.

Riešenie

- Definičný obor funkcie je $D_f = (0, \infty)$.
- Funkcia $f(x)$ je nespojitá v bode $x = 0$. Počítame jednostrannú limitu sprava v bode $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (1 + \ln x) = \{\infty \cdot (-\infty)\} = -\infty.$$

- Párnosť, nepárnosť:

Z D_f vyplýva, že funkcia $f(x)$ nie je párna a nie je nepárna.

4. Priesečník s osou x :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

Priesečník s osou y : $x = 0 \notin D_f \Rightarrow$ funkcia nemá priesečník s osou y .

Funkcia $f(x)$ má nulový bod $NB[e^{-1}, 0]$.

5. Intervaly monotónnosti:

$$f'(x) = \left(\frac{1 + \ln x}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \ln x)}{x^2} = \frac{1 - (1 + \ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

Stacionárne body vypočítame z rovnice $f'(x) = 0$. Platí

$$-\frac{\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	LM	$\searrow$

Funkcia $f(x)$ je rastúca na intervale $(0, 1)$ a klesajúca na intervale $(1, \infty)$.

6. Funkcia $f(x)$ má ostré lokálne maximum v bode $LM[1, 1]$, pričom $f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = 1$.

7. Intervaly konvexnosti a konkávnosti:

$$f''(x) = \left(-\frac{\ln x}{x^2} \right)' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (-\ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-1 + 2 \ln x}{x^3}.$$

Platí

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1 + 2 \ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -1 + 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}.$$

x	$\left(0, e^{\frac{1}{2}}\right)$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\left(e^{\frac{1}{2}}, \infty\right)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	IB	$\smile$

Funkcia je konkávna na intervale $\left(0, e^{\frac{1}{2}}\right)$, konvexná na intervale $\left(e^{\frac{1}{2}}, \infty\right)$.

8. Funkcia $f(x)$ má inflexný bod $x = e^{\frac{1}{2}}$, pričom $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1 + \ln e^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{1}{2}}}$.

9. Asymptotou bez smernice ku grafy funkcie je priamka $x = 0$.

Asymptota so smernicou $y = kx + q$:

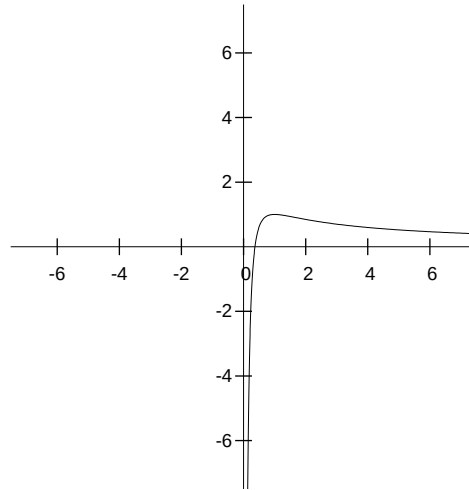
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 + \ln x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \ln x}{x} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln x}{x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

ASS pre $x \rightarrow \infty$ má rovnicu $y = 0$.

10. Graf: pozri Obr. 2.4.



Obr. 2.4: Graf funkcie $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.

Úlohy

2.11. Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)$ a nakreslite jej graf.

- | | | |
|----------------------------------|--|--|
| a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ | b) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ | c) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ |
| d) $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$ | e) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ | f) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ |
| g) $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ | h) $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$ | i) $f(x) = \frac{8-x^2}{2x}$ |
| j) $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$ | k) $f(x) = x \ln x$ | l) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ |
| m) $f(x) = \ln(9-x^2)$ | n) $f(x) = \ln(1+x^2)$ | o) $f(x) = xe^{-x}$ |
| p) $f(x) = (x^2+1)e^x$ | q) $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$ | r) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{x}$ |

Výsledky

- 2.11. a) $D_f = \mathbb{R}$, spojitá, ani párna ani nepárna, $NB_1[0, 0]$, $NB_2[3, 0]$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $\nearrow^{(-\infty, 0)} \searrow^{(0, 2)} \nearrow^{(2, \infty)}$
 $LM[0, 0]$, $Lm[2, -4]$, $f''(x) = 6x - 6$, $\searrow^{(-\infty, 1)} \nearrow^{(1, \infty)}$, $IB[1, -2]$, nemá asymptoty
- b) $D_f = \mathbb{R}$, spojitá, ani párna ani nepárna, $NB_1[0, -5]$, $NB_2[\frac{5}{3}, 0]$, $f'(x) = 9x^2 - 10x + 3$,
 $\nearrow^{(-\infty, \infty)}$, nemá lok. extrém, $f''(x) = 18x - 10$, $\searrow^{(-\infty, \frac{5}{9})} \nearrow^{(\frac{5}{9}, \infty)}$, $IB[\frac{5}{9}, -\frac{1060}{243}]$, nemá asymptoty
- c) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, nespojitá, BN: $x = 0$, ani párna ani nepárna, nemá NB, $f'(x) = \frac{x^2-9}{3x^2}$, $\nearrow^{(-\infty, -3)} \searrow^{(-3, 0)} \searrow^{(0, 3)}$
 $\nearrow^{(3, \infty)}$, $LM[3, 2]$, $LM[-3, -2]$, $f''(x) = \frac{6}{x^3}$, $\searrow^{(-\infty, 0)} \nearrow^{(0, \infty)}$, nemá IB, ASS: $y = \frac{1}{3}x$, ABS: $x = 0$
- d) $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$, nespojitá, BN: $x = 4$, ani párna ani nepárna, $NB[0, 0]$, $f'(x) = \frac{x^2-8x}{(x-4)^2}$,
 $\nearrow^{(-\infty, 0)} \searrow^{(0, 4)} \searrow^{(4, 8)} \nearrow^{(8, \infty)}$, $LM[0, 0]$, $LM[8, 16]$, $f''(x) = \frac{32}{(x-4)^3}$, $\searrow^{(-\infty, 4)} \nearrow^{(4, \infty)}$, nemá IB, ASS: $y = x + 4$,
 ABS: $x = 4$
- e) $D_f = \mathbb{R}$, spojitá, nepárna, $NB[0, 0]$, $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $\searrow^{(-\infty, -1)} \nearrow^{(-1, 1)} \searrow^{(1, \infty)}$, $LM[-1, -\frac{1}{2}]$, $LM[1, \frac{1}{2}]$,
 $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, $\searrow^{(-\infty, -\sqrt{3})} \searrow^{(-\sqrt{3}, 0)} \nearrow^{(0, \sqrt{3})} \searrow^{(\sqrt{3}, \infty)}$, $IB_1[-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}]$, $IB_2[\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}]$, $IB_3[0, 0]$,
 ASS: $y = 0$, nemá ABS

- f)** $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, nespojitá, BN: $x = 1, x = -1$, nepárna, $NB[0, 0]$, $f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$,
 $\nearrow^{(-\infty, -1)} \nearrow^{(-1, 1)} \nearrow^{(1, \infty)}$, nemá lok. extrém, $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$, $\searrow^{(-\infty, -1)} \searrow^{(-1, 0)} \searrow^{(0, 1)} \searrow^{(1, \infty)}$, $IB[0, 0]$,
ASS: $y = 0$, ABS: $x = -1, x = 1$
- g)** $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, nespojitá, BN: $x = 0$, párna, nemá NB, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $\nearrow^{(-\infty, 0)} \searrow^{(0, \infty)}$, nemá
lok. extrém, $f''(x) = \frac{6}{x^4}$, $\searrow^{(-\infty, 0)} \searrow^{(0, \infty)}$, nemá IB, ASS: $y = 1$, ABS: $x = 0$
- h)** $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$, nespojitá, BN: $x = -2$, ani párna ani nepárna, $NB[0, 0]$, $f'(x) = \frac{4-2x}{(x+2)^3}$,
 $\searrow^{(-\infty, -2)} \searrow^{(-2, 2)} \searrow^{(2, \infty)}$, $LM[2, \frac{1}{4}]$, $f''(x) = \frac{4x-16}{(x+2)^4}$, $\searrow^{(-\infty, -2)} \searrow^{(-2, 4)} \searrow^{(4, \infty)}$, $IB[4, \frac{2}{9}]$, ASS: $y = 0$, ABS: $x = -2$
- i)** $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, nespojitá, BN: $x = 0$, nepárna, $NB_1[2\sqrt{2}, 0]$, $NB_2[-2\sqrt{2}, 0]$,
 $f'(x) = \frac{-x^2-8}{2x^2}$, $\searrow^{(-\infty, 0)} \searrow^{(0, \infty)}$, nemá lok. extrém, $f''(x) = \frac{8}{x^3}$, $\searrow^{(-\infty, 0)} \searrow^{(0, \infty)}$, nemá IB,
ASS: $y = -\frac{1}{2}x$, ABS: $x = 0$
- j)** $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$, nespojitá, BN: $x = 5$, ani párna ani nepárna, $NB_1[0, -\frac{4}{5}]$, $NB_2[4, 0]$, $NB_3[1, 0]$,
 $f'(x) = \frac{x^2-10x+21}{(x-5)^2}$, $\nearrow^{(-\infty, 3)} \searrow^{(3, 5)} \searrow^{(5, 7)} \nearrow^{(7, \infty)}$, $LM[7, 9]$, $LM[3, 1]$, $f''(x) = \frac{8}{(x-5)^3}$, $\searrow^{(-\infty, 5)} \searrow^{(5, \infty)}$,
nemá IB, ASS: $y = x$, ABS: $x = 5$
- k)** $D_f = (0, \infty)$, ani párna ani nepárna, $NB[1, 0]$, $f'(x) = \ln x + 1$, $\searrow^{(0, \frac{1}{e})} \nearrow^{(\frac{1}{e}, \infty)}$, $LM[\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}]$,
 $f''(x) = \frac{1}{x}$, $\searrow^{(0, \infty)}$, nemá IB, nemá asymptoty
- l)** $D_f = (0, 1) \cup (1, \infty)$, nespojitá, BN: $x = 1$, ani párna ani nepárna, nemá NB, $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$,
 $\searrow^{(0, 1)} \searrow^{(1, e)} \searrow^{(e, \infty)}$, $LM[e, e]$, $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x \ln^3 x}$, $\searrow^{(0, 1)} \searrow^{(1, e^2)} \searrow^{(e^2, \infty)}$, $IB[e^2, \frac{e^2}{2}]$, nemá ASS, ABS: $x = 1$
- m)** $D_f = (-3, 3)$, párna, $NB_1[0, \ln 9]$, $NB_2[2\sqrt{2}, 0]$, $NB_3[-2\sqrt{2}, 0]$, $f'(x) = \frac{-2x}{9-x^2}$, $\nearrow^{(-3, 0)} \searrow^{(0, 3)}$,
 $LM[0, \ln 9]$, $f''(x) = \frac{-18-2x^2}{(9-x^2)^2}$, $\searrow^{(-3, 3)}$, nemá IB, nemá ASS, ABS: $x = 3, x = -3$
- n)** $D_f = \mathbb{R}$, spojitá, párna, $NB[0, 0]$, $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $\searrow^{(-\infty, 0)} \nearrow^{(0, \infty)}$, $LM[0, 0]$, $f''(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$,
 $\searrow^{(-\infty, -1)} \searrow^{(-1, 1)} \searrow^{(1, \infty)}$, $IB_1[-1, \ln 2]$, $IB_2[1, \ln 2]$, nemá asymptoty
- o)** $D_f = \mathbb{R}$, spojitá, ani párna ani nepárna, $NB[0, 0]$, $f'(x) = e^{-x}(1-x)$, $\nearrow^{(-\infty, 1)} \searrow^{(1, \infty)}$,
 $LM[1, e^{-1}]$, $f''(x) = e^{-x}(x-2)$, $\searrow^{(-\infty, 2)} \searrow^{(2, \infty)}$, $IB[2, 2e^{-2}]$, ASS: $y = 0$ pre $x \rightarrow \infty$, nemá ABS
- p)** $D_f = \mathbb{R}$, spojitá, ani párna ani nepárna, $NB[0, 1]$, $f'(x) = e^x(x+1)^2$, $\nearrow^{(-\infty, \infty)}$, nemá
lok. extrém, $f''(x) = e^x(x^2+4x+3)$, $\searrow^{(-\infty, -3)} \searrow^{(-3, -1)} \searrow^{(-1, \infty)}$, $IB_1[-3, 10e^{-3}]$, $IB_2[-1, 2e^{-1}]$,
ASS: $y = 0$ pre $x \rightarrow -\infty$, nemá ABS
- q)** $D_f = \mathbb{R}$, spojitá, nepárna, $NB[0, 0]$, $f'(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$, $\nearrow^{(-\infty, -1)} \searrow^{(-1, 1)} \nearrow^{(1, \infty)}$, $LM[1, 1 - \frac{\pi}{2}]$,
 $LM[-1, -1 + \frac{\pi}{2}]$, $f''(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$, $\searrow^{(-\infty, 0)} \searrow^{(0, \infty)}$, $IB[0, 0]$, ASS: $y = x + \pi$ pre $x \rightarrow -\infty$,
 $y = x - \pi$ pre $x \rightarrow \infty$, nemá ABS
- r)** $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, nespojitá, BN: $x = 0$, nepárna, nemá NB, $f'(x) = -\frac{2}{x^2+4}$, $\searrow^{(-\infty, \infty)}$, nemá
lok. extrém, $f''(x) = \frac{4x}{(x^2+4)^2}$, $\searrow^{(-\infty, 0)} \searrow^{(0, \infty)}$, nemá IB, ASS: $y = 0$, nemá ABS

3 Neurčitý integrál

3.1 Pojem primitívnej funkcie

Funkciu $F(x)$ nazývame *primitívnou funkciou* k funkcii $f(x)$ na intervale (a, b) , ak pre všetky $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$.

Každá spojitá funkcia na intervale (a, b) má primitívnu funkciu. Ak funkcia $F(x)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale (a, b) a c je ľubovoľná reálna konštanta, tak aj funkcia $F(x) + c$ je primitívna funkcia k funkcii $f(x)$ na intervale (a, b) .

Z uvedeného vyplýva, že ak k danej funkcii existuje primitívna funkcia, existuje ich nekonečne mnoho.

3.2 Neurčitý integrál. Základné vzorce

Množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii $f(x)$ na intervale (a, b) nazývame neurčitý integrál funkcie $f(x)$ na intervale (a, b) a označujeme ho

$$\int f(x) dx.$$

Píšeme

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

kde $\int$ je integrálny znak, $f(x)$ je integrovaná funkcia (integrand), $F(x)$ primitívna funkcia k funkcii $f(x)$, c je integračná konštanta a dx (diferenciál) je symbol, ktorý označuje integračnú premennú x .

Veta 1. Ak k funkciám $f(x)$ a $g(x)$ existujú primitívne funkcie a $k \in \mathbb{R}$, tak platí

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx,$$

$$\int [k \cdot f(x)] dx = k \cdot \int f(x) dx.$$

Základné vzorce integrovania

$$1. \int dx = x + c,$$

$$2. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1,$$

$$3. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c,$$

$$4. \int e^x dx = e^x + c,$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, a \neq 1,$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + c,$$

$$8. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c,$$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cotg x + c,$
10. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + c, \end{cases} \quad a > 0,$
11. $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c, \quad a > 0,$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + c, \\ -\arccos \frac{x}{a} + c, \end{cases} \quad a > 0,$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + c, \quad k \neq 0,$
14. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$

Vzorce platia pre tie intervaly, ktoré sú podmnožinou prieniku definičných oborov integrovanej funkcie a príslušnej primitívnej funkcie. O správnosti vzorcov sa môžeme presvedčiť derivovaním.

3.3 Integrovanie rozkladom a úpravou

Pri integrovaní rozkladom a úpravou sa snažíme rozložiť integrovanú funkciu pomocou algebraických úprav a goniometrických vzťahov na súčet jednoduchších funkcií, ktoré potom integrujeme pomocou základných vzorcov.

Príklad 3.1. *Vypočítajme neurčitý integrál $\int \left(4x + 5 - \frac{7}{x^2} \right) dx$.*

Riešenie

Pri výpočte integrálu použijeme Vetu 1 a integračné vzorce [1] a [2]. Platí

$$\begin{aligned} \int \left(4x + 5 - \frac{7}{x^2} \right) dx &= 4 \int x dx + 5 \int dx - 7 \int x^{-2} dx = 4 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 5x - 7 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \\ &= \frac{4}{2} x^2 + 5x - \frac{7x^{-1}}{-1} + c = 2x^2 + 5x + \frac{7}{x} + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.2. *Vypočítajme neurčitý integrál $\int (\cos x - 5 \sin x + 2^x) dx$.*

Riešenie

Integrál rozložíme na súčet troch integrálov a použijeme integračné vzorce [7], [6] a [5]. Platí

$$\int (\cos x - 5 \sin x + 2^x) dx = \int \cos x dx - 5 \int \sin x dx + \int 2^x dx = \sin x + 5 \cos x + \frac{2^x}{\ln 2} + c.$$

Príklad 3.3. *Vypočítajme neurčitý integrál $\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{x} \right) dx$.*

Riešenie

Najprv upravíme odmocninu do tvaru mocninovej funkcie a potom použijeme vzorce [2] a [3]. Platí

$$\int \left(\sqrt{x} + \frac{3}{x} \right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{x} \right) dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 3 \ln |x| + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 3 \ln |x| + c =$$

$$= \frac{2}{3} x \sqrt{x} + 3 \ln |x| + c.$$

Príklad 3.4. Vypočítajme neurčitý integrál $\int e^x \left(e^{-x} + 3 - \frac{6}{x^3 e^x} \right) dx$.

Riešenie

Integrovanú funkciu roznásobíme a použijeme základné integračné vzorce [1], [4] a [2].

$$\begin{aligned} \int e^x \left(e^{-x} + 3 - \frac{6}{x^3 e^x} \right) dx &= \int \left(e^x \cdot e^{-x} + 3e^x - e^x \cdot \frac{6}{x^3 e^x} \right) dx = \int \left(1 + 3e^x - \frac{6}{x^3} \right) dx = \\ &= \int dx + 3 \int e^x dx - 6 \int x^{-3} dx = x + 3e^x - 6 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + c = x + 3e^x + \frac{3}{x^2} + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.5. Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{x-2}{x+3} dx$.

Riešenie

Integrovanú funkciu upravíme vydelením čitateľa menovateľom.

$$\begin{array}{lcl} (x-2) & : & (x+3) = 1 - \frac{5}{x+3} \\ \hline -x-3 & & -5 \text{ (vyšok)} \end{array}$$

Dostaneme

$$\int \frac{x-2}{x+3} dx = \int \left(1 - \frac{5}{x+3} \right) dx = \int dx - 5 \int \frac{1}{x+3} dx = x - 5 \ln |x+3| + c,$$

pričom integrál $\int \frac{1}{x+3} dx$ sme vypočítali použitím vzorca [14], t.j. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$.

Príklad 3.6. Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{x^2}{x+4} dx$.

Riešenie

Integrovanú funkciu môžeme upraviť delením čitateľa menovateľom podobne ako v predchádzajúcom príklade. Túto úpravu však môžeme nahradiť pripočítaním a odpočítaním vhodného čísla v čitateli (pripočítaním nuly vo vhodnom tvare) a ďalším rozkladom zlomku na také výrazy, ktoré už vieme integrovať pomocou základných vzorcov.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x+4} dx &= \int \frac{x^2 + (-16 + 16)}{x+4} dx = \int \left(\frac{x^2 - 16}{x+4} + \frac{16}{x+4} \right) dx = \\ &= \int \left[\frac{(x-4)(x+4)}{x+4} + \frac{16}{x+4} \right] dx = \int \left(x-4 + \frac{16}{x+4} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 16 \ln |x+4| + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.7. Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{1}{\sqrt{5x^2-30}} dx$.

Riešenie

Výraz pod odmocninou upravíme vynímaním pred zátvorku a potom použijeme vzorec [13].

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x^2-30}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{5(x^2-6)}} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-6}} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln |x + \sqrt{x^2-6}| + c.$$

Príklad 3.8. Vypočítajme neurčitý integrál $\int \frac{7x}{x^2-12} dx$.

Riešenie

Integrovanú funkciu upravíme tak, aby v čitateli bola derivácia menovateľa a použijeme vzorec [14].

$$\int \frac{7x}{x^2-12} dx = |\text{derivácia menovateľa je } (x^2-12)' = 2x| = 7 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-12} dx =$$

$$= \frac{7}{2} \ln |x^2 - 12| + c.$$

Príklad 3.9. Vypočítajte neurčitý integrál $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

Riešenie

Pri úprave integrovanej funkcie použijeme vzťah $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a podobne ako v predchádzajúcom príklade použijeme integračný vzorec [14].

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = |(\cos x)' = -\sin x| = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + c.$$

Úlohy

3.1. Vypočítajte neurčitý integrál.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (4x^3 - 6x - 1) \, dx & \text{b)} \int (\cos x - e^x + 4) \, dx & \text{c)} \int \left(2^x + 5 \sin x + \frac{3}{x} \right) \, dx \\ \text{d)} \int \left(4 \cdot 3^x - \frac{7}{\sin^2 x} \right) \, dx & \text{e)} \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4} \right) \, dx & \text{f)} \int \frac{4x - 3x^2 + 2x^3}{x^2} \, dx \\ \text{g)} \int (2x^5 + \sqrt{x}) \, dx & \text{h)} \int (4\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^3}) \, dx & \text{i)} \int \frac{2\sqrt{x} + x + 9x\sqrt{x}}{x} \, dx \\ \text{j)} \int x \left(\frac{2}{x} - 5\sqrt{x} + 3x \right) \, dx & \text{k)} \int e^x \left(4 - \frac{5e^{-x}}{x^6} \right) \, dx & \text{l)} \int (x - 2)^2 \, dx \\ \text{m)} \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 \, dx & \text{n)} \int \frac{x^2 - 9}{x - 3} \, dx & \text{o)} \int \frac{18x^2 - 2}{3x - 1} \, dx \end{array}$$

3.2. Vypočítajte neurčitý integrál.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{1}{x^2 + 4} \, dx & \text{b)} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 8}} \, dx & \text{c)} \int \frac{2}{\sqrt{16 - x^2}} \, dx \\ \text{d)} \int \frac{x^2}{x^2 + 9} \, dx & \text{e)} \int \frac{x^2 + 5}{x^2 + 3} \, dx & \text{f)} \int \frac{1}{x^2 - 25} \, dx \\ \text{g)} \int \frac{1}{9 - x^2} \, dx & \text{h)} \int \frac{1}{x - 2} \, dx & \text{i)} \int \frac{2}{3 - 4x} \, dx \\ \text{j)} \int \frac{3x^2}{x^3 - 11} \, dx & \text{k)} \int \frac{e^x}{8 + e^x} \, dx & \text{l)} \int \frac{1}{x(3 + \ln x)} \, dx \end{array}$$

3.3. Vypočítajte neurčitý integrál.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \cotg x \, dx & \text{b)} \int \operatorname{tg} 2x \, dx & \text{c)} \int \frac{10 \cos x}{4 + 5 \sin x} \, dx \\ \text{d)} \int \frac{3 \sin^2 x + 7}{\sin^2 x} \, dx & \text{e)} \int \frac{6 + 5 \cos^3 x}{\cos^2 x} \, dx & \text{f)} \int \operatorname{tg}^2 x \, dx \\ \text{g)} \int \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x} \, dx & \text{h)} \int \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\cos 2x} \, dx & \text{i)} \int \cos^2 \frac{x}{2} \, dx \end{array}$$

Výsledky

$$\begin{array}{lll} 3.1. \text{ a)} } x^4 - 3x^2 - x + c & \text{b)} } \sin x - e^x + 4x + c & \text{c)} } \frac{2^x}{\ln 2} - 5 \cos x + 3 \ln |x| + c \\ \text{d)} } \frac{4 \cdot 3^x}{\ln 3} + 7 \cotg x + c & \text{e)} } -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + c & \text{f)} } 4 \ln |x| - 3x + x^2 + c \quad \text{g)} } \frac{x^6}{3} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} + c \\ \text{h)} } 3 \sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} + c & \text{i)} } 4 \sqrt{x} + x + 6x \sqrt{x} + c & \text{j)} } 2x - 2 \sqrt{x^5} + x^3 + c \quad \text{k)} } 4e^x + \frac{1}{x^5} + c \\ \text{l)} } \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x + c & \text{m)} } x - \frac{1}{x} - 2 \ln |x| + c & \text{n)} } \frac{x^2}{2} + 3x + c \quad \text{o)} } 3x^2 + 2x + c \\ 3.2. \text{ a)} } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c & \text{b)} } \ln |x + \sqrt{x^2 + 8}| + c & \text{c)} } 2 \arcsin \frac{x}{4} + c \quad \text{d)} } x - 3 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c \\ \text{e)} } x + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + c & \text{f)} } \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + c & \text{g)} } \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3+x}{3-x} \right| + c \quad \text{h)} } \ln |x - 2| + c \\ \text{i)} } -\frac{1}{2} \ln |3 - 4x| + c & \text{j)} } \ln |x^3 - 11| + c & \text{k)} } \ln (8 + e^x) + c \quad \text{l)} } \ln |3 + \ln x| + c \end{array}$$

- 3.3. a) $\ln |\sin x| + c$ b) $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + c$ c) $2 \ln |4 + 5 \sin x| + c$ d) $3x - 7 \cotg x + c$
 e) $6 \tg x + 5 \sin x + c$ f) $\tg x - x + c$ g) $\tg x + c$ h) $x + c$ i) $\frac{1}{2} (x + \sin x) + c$

3.4 Integrovanie substitučnou metódou

Jednou z dôležitých metód pre výpočet neurčitých integrálov je substitučná metóda. Hovorí o nej nasledujúca veta.

Veta 2. *Nech funkcia $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale (α, β) . Nech funkcia $t = \varphi(x)$ má na intervale (a, b) deriváciu $\varphi'(x)$. Nech pre každé $x \in (a, b)$ je $\varphi(x) \in (\alpha, \beta)$. Potom na intervale (a, b) platí*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c.$$

Príklad 3.10. *Vypočítajte $\int \frac{1}{(2+3x)^4} dx$.*

Riešenie

Integrál riešime pomocou substitúcie $2 + 3x = t$.

$$\int \frac{1}{(2+3x)^4} dx = \left| \begin{array}{l} 2+3x=t \\ 3 dx=dt \\ dx=\frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^{-4} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{9(2+3x)^3} + c.$$

Príklad 3.11. *Vypočítajte $\int x \cdot e^{x^2} dx$.*

Riešenie

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2=t \\ 2x dx=dt \\ x dx=\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$$

Príklad 3.12. *Vypočítajte $\int x \sqrt{9-x^2} dx$.*

Riešenie

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{9-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{9-x^2}=t \\ 9-x^2=t^2 \\ -2x dx=2t dt \\ x dx=-t dt \end{array} \right| = \int t \cdot (-t dt) = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + c = \\ &= -\frac{1}{3} (\sqrt{9-x^2})^3 + c = -\frac{1}{3} (9-x^2) \sqrt{9-x^2} + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.13. *Vypočítajte $\int x \sqrt{x+4} dx$.*

Riešenie

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x+4} dx &= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x+4}=t \\ x+4=t^2 \\ dx=2t dt \\ x=t^2-4 \end{array} \right| = \int (t^2-4) \cdot t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4-4t^2) dt = \\ &= 2 \left(\frac{t^5}{5} - 4 \frac{t^3}{3} \right) + c = \frac{2}{5} (\sqrt{x+4})^5 - \frac{8}{3} (\sqrt{x+4})^3 + c = \frac{2}{5} (x+4)^2 \sqrt{x+4} - \frac{8}{3} (x+4) \sqrt{x+4} + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.14. Vypočítajte $\int \frac{3 \ln x + 4}{x \sqrt{\ln x + 1}} dx$.

Riešenie

$$\int \frac{3 \ln x + 4}{x \sqrt{\ln x + 1}} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x + 1 = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \\ \ln x = t - 1 \end{array} \right| = \int \frac{3(t-1) + 4}{\sqrt{t}} dt = \int \frac{3t+1}{\sqrt{t}} dt = \int (3t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) dt =$$

$$= 3 \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{(\ln x + 1)^3} + 2\sqrt{\ln x + 1} + c.$$

Úlohy

3.4. Vhodnou substitúciou vypočítajte neurčitý integrál.

- | | | |
|---|-------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\int (x-8)^4 dx$ | b) $\int (3x+2)^5 dx$ | c) $\int \frac{1}{(4x+1)^2} dx$ |
| d) $\int \frac{5}{(1-3x)^8} dx$ | e) $\int \sqrt{8x-3} dx$ | f) $\int \frac{4}{\sqrt[3]{2-3x}} dx$ |
| g) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{(2x+1)^3}} dx$ | h) $\int x(x^2+9)^5 dx$ | i) $\int \frac{8x}{6-x^2} dx$ |
| j) $\int x \sqrt{10-x^2} dx$ | k) $\int 5x \sqrt{x^2+12} dx$ | l) $\int x^2 \sqrt{6-x^3} dx$ |
| m) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ | n) $\int x \sqrt[3]{(3x^2+5)^2} dx$ | o) $\int x \sqrt{x-2} dx$ |
| p) $\int (x-1) \sqrt{x+3} dx$ | q) $\int (x+2) \sqrt[3]{3x-4} dx$ | r) $\int (x^2-1) \sqrt{1-x} dx$ |

3.5. Vhodnou substitúciou vypočítajte neurčitý integrál.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\int e^{4x} dx$ | b) $\int e^{-\frac{x}{2}} dx$ | c) $\int e^{4-3x} dx$ |
| d) $\int 2x e^{x^2} dx$ | e) $\int x e^{3-x^2} dx$ | f) $\int x^2 e^{-x^3} dx$ |
| g) $\int \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} dx$ | h) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ | i) $\int \frac{5-\ln x}{x} dx$ |
| j) $\int \frac{2}{x \ln^2 x} dx$ | k) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx$ | l) $\int \frac{20}{x(16+\ln^2 x)} dx$ |
| m) $\int \frac{\ln x}{x(8+\ln^2 x)} dx$ | n) $\int \frac{\ln x}{x \sqrt{1+\ln^2 x}} dx$ | o) $\int \cos 2x dx$ |
| p) $\int \sin \frac{x}{3} dx$ | q) $\int \frac{1}{\sin^2(5x-1)} dx$ | r) $\int \frac{\sqrt[3]{\arctg x}}{1+x^2} dx$ |

Výsledky

- 3.4. a) $\frac{(x-8)^5}{5} + c$ b) $\frac{(3x+2)^6}{18} + c$ c) $-\frac{1}{4(4x+1)} + c$ d) $\frac{5}{21(1-3x)^7} + c$
e) $\frac{1}{12}(8x-3)\sqrt{(8x-3)} + c$ f) $-2\sqrt[3]{(2-3x)^2} + c$ g) $2\sqrt[4]{2x+1} + c$ h) $\frac{(x^2+9)^6}{12} + c$
i) $-4 \ln |6-x^2| + c$ j) $-\frac{1}{3}\sqrt{(10-x^2)^3} + c$ k) $\frac{5}{3}\sqrt{(x^2+12)^3} + c$ l) $-\frac{2}{9}\sqrt{(6-x^3)^3} + c$
m) $\sqrt{x^2+1} + c$ n) $\frac{1}{10}(3x^2+5)\sqrt[3]{(3x^2+5)^2} + c$
o) $\frac{2}{5}(x-2)^2\sqrt{x-2} + \frac{4}{3}(x-2)\sqrt{x-2} + c$ p) $\frac{2}{5}(x+3)^2\sqrt{x+3} - \frac{8}{3}(x+3)\sqrt{x+3} + c$
q) $\frac{1}{21}(3x-4)^2\sqrt[3]{3x-4} + \frac{5}{6}(3x-4)\sqrt[3]{3x-4} + c$ r) $\frac{4}{5}(1-x)^2\sqrt{1-x} - \frac{2}{7}(1-x)^3\sqrt{1-x} + c$
- 3.5. a) $\frac{e^{4x}}{4} + c$ b) $-2e^{-\frac{x}{2}} + c$ c) $-\frac{e^{4-3x}}{3} + c$ d) $e^{x^2} + c$ e) $-\frac{1}{2}e^{3-x^2} + c$ f) $-\frac{1}{3}e^{-x^3} + c$
g) $\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x^2}} + c$ h) $\frac{\ln^4 x}{4} + c$ i) $-\frac{(5-\ln x)^2}{2} + c$ j) $-\frac{2}{\ln x} + c$ k) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x+2)^3} + c$ l) $5 \arctg \frac{\ln x}{4} + c$

$$\begin{array}{lllll} \text{m)} & \frac{1}{2} \ln(8 + \ln^2 x) + c & \text{n)} & \sqrt{1 + \ln^2 x} + c & \text{o)} & \frac{1}{2} \sin 2x + c & \text{p)} & -3 \cos \frac{x}{3} + c & \text{q)} & -\frac{1}{5} \cotg(5x - 1) + c \\ \text{r)} & \frac{3}{4} \sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x} + c & & & & & & & & \end{array}$$

3.5 Integrovanie metódou per partes

Veta 3. Nech funkcie $f(x)$ a $g(x)$ majú na intervale (a, b) derivácie $f'(x)$ a $g'(x)$. Nech funkcia $f(x) \cdot g'(x)$ má primitívnu funkciu na intervale (a, b) . Potom platí

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx,$$

pre každé $x \in (a, b)$.

Príklad 3.15. Vypočítajte $\int x \cdot \cos x dx$.

Riešenie

Integrál riešime metódou per partes, pričom za funkciu $f(x)$ zvolíme x . Platí

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos x dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g'(x) = \cos x \\ f'(x) = 1 & g(x) = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + c = \\ &= x \sin x + \cos x + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.16. Vypočítajte $\int (2x + 1) \cdot \sin 2x dx$.

Riešenie

Za funkciu $f(x)$ zvolíme $2x + 1$. Platí

$$\begin{aligned} \int (2x + 1) \cdot \sin 2x dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = 2x + 1 & g'(x) = \sin 2x \\ f'(x) = 2 & g(x) = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (2x + 1) \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) - \\ &- \int 2 \cdot \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) dx = -\frac{2x + 1}{2} \cos 2x + \int \cos 2x dx = -\frac{2x + 1}{2} \cos 2x + \frac{\sin 2x}{2} + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.17. Vypočítajte $\int x^2 \cdot e^x dx$.

Riešenie

Pri výpočte integrálu použijeme dvakrát metódu per partes. Platí

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot e^x dx &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = x^2 & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 2x & g(x) = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x dx = \\ &= | \text{integrujeme ešte raz metódou per partes} | = \left| \begin{array}{ll} f(x) = 2x & g'(x) = e^x \\ f'(x) = 2 & g(x) = e^x \end{array} \right| = \\ &= x^2 e^x - \left(2x e^x - \int 2 e^x dx \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.18. Vypočítajte $\int \ln x dx$.

Riešenie

Integrovanú funkciu napíšeme ako súčin jednotky a danej funkcie. Za funkciu $f(x)$ zvolíme $\ln x$.

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx =$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

Príklad 3.19. Vypočítajte $\int 8x^3 \cdot \ln x \, dx$.

Riešenie

Za funkciu $f(x)$ zvolíme funkciu $\ln x$. Platí

$$\int 8x^3 \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & g'(x) = 8x^3 \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g(x) = 2x^4 \end{array} \right| = 2x^4 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot 2x^4 \, dx =$$

$$= 2x^4 \ln x - 2 \int x^3 \, dx = 2x^4 \ln x - 2 \frac{x^4}{4} + c = 2x^4 \ln x - \frac{x^4}{2} + c.$$

Úlohy

3.6. Metódou per partes vypočítajte neurčitý integrál.

- | | | |
|-------------------------------------|---|--|
| a) $\int 2x \cdot e^x \, dx$ | b) $\int x \cdot 3^x \, dx$ | c) $\int (2x+3) \cdot 4^x \, dx$ |
| d) $\int 4x \cdot e^{2x} \, dx$ | e) $\int (2-x) \cdot e^{-3x} \, dx$ | f) $\int (5-2x) \cdot e^{\frac{x}{4}} \, dx$ |
| g) $\int (4x+3) \cdot \sin x \, dx$ | h) $\int 2x \cdot \sin \frac{x}{2} \, dx$ | i) $\int (9x-1) \cdot \sin 3x \, dx$ |
| j) $\int t \cdot \cos t \, dt$ | k) $\int (2x-3) \cdot \cos 2x \, dx$ | l) $\int 2x \cdot \sin^2 x \, dx$ |
| m) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$ | n) $\int 4x^2 \cdot \sin 2x \, dx$ | o) $\int (9x^2-1) \cdot e^{3x} \, dx$ |

3.7. Metódou per partes vypočítajte neurčitý integrál.

- | | | |
|---|---------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\int x \cdot \ln x \, dx$ | b) $\int x^2 \cdot \ln x \, dx$ | c) $\int 3\sqrt{x} \cdot \ln x \, dx$ |
| d) $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ | e) $\int 2 \arctg x \, dx$ | f) $\int x \cdot \arctg x \, dx$ |
| g) $\int (2x+2) \cdot \operatorname{arccotg} x \, dx$ | h) $\int \arccos x \, dx$ | g) $\int x \cdot \arcsin x \, dx$ |

Výsledky

- 3.6. a) $2(x-1)e^x + c$ b) $\frac{x3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + c$ c) $\frac{(2x+3)4^x}{\ln 4} - \frac{2 \cdot 4^x}{\ln^2 4} + c$ d) $(2x-1)e^{2x} + c$
e) $\frac{e^{-3x}}{9}(3x-5) + c$ f) $4e^{\frac{x}{4}}(13-2x) + c$ g) $-(4x+3)\cos x + 4\sin x + c$ h) $-4x \cos \frac{x}{2} + 8\sin \frac{x}{2} + c$
i) $-\frac{(9x-1)}{3}\cos 3x + \sin 3x + c$ j) $t \sin t + \cos t + c$ k) $\frac{2x-3}{2}\sin 2x + \frac{\cos 2x}{2} + c$
l) $\frac{x^2}{2} - \frac{x \sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + c$ m) $-x \cotg x + \ln |\sin x| + c$ n) $-2x^2 \cos 2x + 2x \sin 2x + \cos 2x + c$
o) $\frac{e^{3x}}{3}(3x-1)^2 + c$
- 3.7. a) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$ b) $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c$ c) $2x\sqrt{x} \ln x - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c$ d) $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$
e) $2x \arctg x - \ln(x^2+1) + c$ f) $\frac{x^2+1}{2} \arctg x - \frac{1}{2}x + c$ g) $(x^2+2x+1) \operatorname{arccotg} x + \ln(1+x^2) + x + c$
h) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$ h) $\frac{2x^2-1}{4} + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + c$

3.6 Integrovanie racionálnej funkcie

Funkciu $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $P_n(x)$, $Q_m(x)$ sú polynómy stupňa n a m , nazývame *racionálnou funkciou*.

- Ak stupeň polynómu $P_n(x)$ je menší ako stupeň polynómu $Q_m(x)$, t.j. ak $n < m$ hovoríme, že funkcia $f(x)$ je *rýdzoracionálna*.
- V opačnom prípade, t.j. ak $n \geq m$ hovoríme, že funkcia $f(x)$ je *nerýdzoracionálna*.

Každú nerýdzoracionálnu funkciu môžeme vyjadriť ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = U_r(x) + \frac{Z_k(x)}{Q_m(x)},$$

kde $Z_k(x)$, $Q_m(x)$, $U_r(x)$ sú polynómy stupňa k , m , r , pričom $k < m$, $r + m = n$. Funkcia $U_r(x)$ je príslušný podiel, $Z_k(x)$ je zvyšok po delení polynómov $P_n(x)$, $Q_m(x)$ a funkcia $\frac{Z_k(x)}{Q_m(x)}$ je rýdzoracionálna, pretože $k < m$.

Každú rýdzoracionálnu funkciu môžeme rozložiť na súčet elementárnych zlomkov. *Elementárnymi (parciálnymi) zlomkami* nazývame racionálne funkcie tvaru

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

kde A , M , N , a , p , q sú reálne čísla, n prirodzené číslo a polynóm $x^2 + px + q$ nemá reálne korene, t.j. $p^2 - 4q < 0$.

Uvažujme rýdzoracionálnu funkciu $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Rozklad tejto funkcie na elementárne zlomky úzko súvisí s koreňmi polynómu $Q_m(x)$, t.j. s riešením rovnice $Q_m(x) = 0$.

- a) Predpokladajme, že polynóm $Q_m(x)$ má reálne navzájom rôzne korene $x_1, x_2, \dots, x_m$. Danú funkciu $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ rozložíme na elementárne zlomky v tvare

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \dots + \frac{A_m}{x-x_m},$$

kde $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ sú reálne čísla.

- b) Predpokladajme, že polynóm $Q_m(x)$ má násobné reálne korene. Nech x_1 je k_1 -násobný, x_2 je k_2 -násobný, $\dots$, x_s je k_s -násobný reálny koreň, pričom $k_1 + k_2 + \dots + k_s = m$. Danú funkciu $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ rozložíme na elementárne zlomky v tvare

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \dots + \frac{B_1}{x-x_s} + \frac{B_2}{(x-x_s)^2} + \dots + \frac{B_{k_s}}{(x-x_s)^{k_s}},$$

kde $A_1, A_2, \dots, A_{k_1}, \dots, B_1, \dots, B_{k_s}$ sú reálne čísla.

- c) Predpokladajme, že polynóm $Q_m(x)$ obsahuje polynóm $x^2 + px + q$, ktorý nemá reálne korene, t.j. $p^2 - 4q < 0$. Potom sa v rozklade bude vyskytovať elementárny zlomok

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \text{resp.} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}.$$

Príslušné koeficienty elementárnych zlomkov môžeme vypočítať

- metódou porovnávania koeficientov (metódou neurčitých koeficientov),
- dosadzovacou metódou,
- kombináciou metódy porovnávania koeficientov a dosadzovacej metódy.

Integrovanie elementárnych zlomkov.

1. Integrály typu

$$\int \frac{1}{x-a} dx.$$

Môžeme využiť vzorec [14] $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$ alebo použijeme substitúciu $x - a = t$.

Príklad 3.20. Vypočítajte $\int \frac{3}{x-5} dx$.

Riešenie

Integrujme pomocou vzorca [14].

$$\int \frac{3}{x-5} dx = 3 \int \frac{1}{x-5} dx = |\text{derivácia menovateľa je } (x-5)' = 1| = 3 \ln |x-5| + c.$$

Príklad 3.21. Vypočítajte $\int \frac{1}{4x+3} dx$.

Riešenie

Integrovanú funkciu upravíme tak, aby v čitateli bola derivácia menovateľa a následne použijeme vzorec [14].

$$\int \frac{1}{4x+3} dx = |\text{derivácia menovateľa je } (4x+3)' = 4| = \frac{1}{4} \int \frac{4}{4x+3} dx = \frac{1}{4} \ln |4x+3| + c.$$

2. Integrály typu

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \quad \text{pre } n \neq 1.$$

Použijeme substitúciu $x - a = t$.

Príklad 3.22. Vypočítajte $\int \frac{6}{(2-3x)^4} dx$.

Riešenie

$$\begin{aligned} \int \frac{6}{(2-3x)^4} dx &= \left| \begin{array}{l} 2-3x=t \\ -3dx=dt \\ dx=-\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = 6 \int \frac{1}{t^4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) dt = -2 \int t^{-4} dt = -2 \cdot \frac{t^{-3}}{-3} + c = \\ &= \frac{2}{3t^3} + c = \frac{2}{3(2-3x)^3} + c. \end{aligned}$$

3. Integrály typu

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx.$$

Použijeme základný integračný vzorec [10]

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + c. \end{cases}$$

Príklad 3.23. Vypočítajte $\int \frac{1}{36+x^2} dx$.

Riešenie

$$\int \frac{1}{36+x^2} dx = \int \frac{1}{6^2+x^2} dx = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{6} + c.$$

4. Integrály typu

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx.$$

Použijeme substitúciu $a^2 + x^2 = t$ alebo integrovanú funkciu upravíme tak, aby sa v čitateli nachádzala derivácia menovateľa a použijeme vzorec [14], t.j. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$.

Príklad 3.24. Vypočítajme $\int \frac{x}{x^2 + 12} dx$.

Riešenie

Použijeme substitúciu $x^2 + 12 = t$.

$$\int \frac{x}{x^2 + 12} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + 12 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + c = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 12) + c.$$

Ak chceme integrál vypočítať bez použitia substitúcie, upravíme funkciu tak, aby sa v čitateli vyskytoval výraz $2x$, pretože derivácia menovateľa je $(x^2 + 12)' = 2x$.

$$\int \frac{x}{x^2 + 12} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 12} dx = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 12) + c.$$

5. Integrály typu

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx.$$

Použijeme substitúciu $x^2 + a^2 = t$.

Príklad 3.25. Vypočítajme $\int \frac{7x}{(x^2 + 15)^2} dx$.

Riešenie

$$\begin{aligned} \int \frac{7x}{(x^2 + 15)^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2 + 15 = t \\ 2x dx = dt \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int \frac{7}{t^2} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{7}{2} \int t^{-2} dt = \frac{7}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + c = -\frac{7}{2t} + c = \\ &= -\frac{7}{2(x^2 + 15)} + c. \end{aligned}$$

6. Integrály typu

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx.$$

Použijeme vzorec

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{x}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \cdot \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx.$$

Príklad 3.26. Vypočítajme $\int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$.

Riešenie

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx &= \frac{x}{2 \cdot (2-1) \cdot 2^2} \cdot \frac{1}{(x^2 + 4)^{(2-1)}} + \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot (2-1) \cdot 2^2} \cdot \int \frac{1}{(x^2 + 4)^{(2-1)}} dx = \\ &= \frac{x}{2 \cdot 1 \cdot 4} \cdot \frac{1}{x^2 + 4} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 4} \cdot \int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{x}{8} \cdot \frac{1}{x^2 + 4} + \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2 + 2^2} dx = \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \\ &+ \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c = \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

7. Integrály typu

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx, \quad \text{kde } p^2 - 4q < 0.$$

Pri výpočte integrálu tohto typu postupujeme tak, že trojčlen $x^2 + px + q$ upravíme na úplný štvorec $(x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q$ a zavedieme substitúciu $x + \frac{p}{2} = t$. Po úprave získame integrál tvaru

$$\int \frac{1}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + c.$$

Príklad 3.27. Vypočítajte $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 45} dx$.

Riešenie

Kvadratický trojčlen $x^2 - 6x + 45$ upravíme na úplný štvorec $(x - 3)^2 - 3^2 + 45 = (x - 3)^2 + 36$ a zavedieme substitúciu $x - 3 = t$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 6x + 45} dx &= \int \frac{1}{(x - 3)^2 + 36} dx = \left| \begin{array}{l} x - 3 = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2 + 36} dt = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{t}{6} + c = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x - 3}{6} + c. \end{aligned}$$

8. Integrály typu

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx, \quad \text{kde } p^2 - 4q < 0.$$

Trojčlen $x^2 + px + q$ upravíme na úplný štvorec $(x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q$, zavedieme substitúciu $x + \frac{p}{2} = t$, odkiaľ vyjadríme $x = t - \frac{p}{2}$. Po úprave rozdelíme integrál na súčet dvoch integrálov, z ktorých jeden má v čitateli deriváciu menovateľa a teda môžeme použiť vzorec $\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln |f(t)| + c$. Na výpočet druhého integrálu použijeme vzorec $\int \frac{1}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + c$.

Príklad 3.28. Vypočítajte $\int \frac{x + 3}{2x^2 + 4x + 27} dx$.

Riešenie

Kvadratický trojčlen $2x^2 + 4x + 27$ upravíme na úplný štvorec.

$$2x^2 + 4x + 27 = 2 \left(x^2 + 2x + \frac{27}{2} \right) = 2 \left[(x + 1)^2 - 1 + \frac{27}{2} \right] = 2 \left[(x + 1)^2 + \frac{25}{2} \right].$$

Zavedieme substitúciu $x + 1 = t$ a vzniknutý integrál rozdelíme na dva integrály.

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 3}{2x^2 + 4x + 27} dx &= \int \frac{x + 3}{2 \left[(x + 1)^2 + \frac{25}{2} \right]} dx = \left| \begin{array}{l} x + 1 = t \\ dx = dt \\ x = t - 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{(t - 1) + 3}{t^2 + \frac{25}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{t + 2}{t^2 + \frac{25}{2}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t}{t^2 + \frac{25}{2}} dt + \frac{1}{2} \int \frac{2}{t^2 + \frac{25}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + \frac{25}{2}} dt + \int \frac{1}{t^2 + \frac{25}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left(t^2 + \frac{25}{2} \right) + \frac{1}{\frac{5}{\sqrt{2}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{5}{\sqrt{2}}} + c = \frac{1}{4} \ln \left(x^2 + 2x + \frac{27}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{5} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}(x + 1)}{5} + c. \end{aligned}$$

Úlohy

3.8. Vypočítajte neurčité integrály.

a) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{7}{x - 2} \right) dx$

b) $\int \left(\frac{1}{x + 3} + \frac{3}{x - 1} + \frac{2}{x^3} \right) dx$

c) $\int \left(\frac{3}{x^6} + \frac{1}{5x + 2} \right) dx$

d) $\int \left(\frac{4}{1 - x} + \frac{10}{3 - 4x} \right) dx$

e) $\int \left[\frac{7}{4x + 3} - \frac{1}{2 - 5x} + \frac{2}{(2 - 5x)^3} \right] dx$

f) $\int \left[\frac{2}{7x - 3} + \frac{14}{(7x - 3)^2} \right] dx$

$$\begin{array}{ll}
\text{g)} \int \frac{1}{x^2 + 64} dx & \text{h)} \int \left(\frac{6}{x^2 + 9} - \frac{x}{x^2 + 9} \right) dx \\
\text{i)} \int \left(\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^2 + 16} + \frac{4x}{x^2 + 25} \right) dx & \text{j)} \int \frac{5x - 3}{x^2 + 10} dx \\
\text{k)} \int \frac{3x - 1}{4x^2 + 36} dx & \text{l)} \int \frac{14x + 3}{9x^2 + 25} dx \\
\text{m)} \int \frac{1}{x^2 - 8x + 41} dx & \text{n)} \int \frac{4}{x^2 + 5x + 10} dx \\
\text{o)} \int \frac{x}{x^2 + 4x + 20} dx & \text{p)} \int \frac{3x - 1}{x^2 - 10x + 106} dx
\end{array}$$

Výsledky

3.8. a) $2 \ln |x| + 7 \ln |x - 2| + c$ b) $\ln |x + 3| + 3 \ln |x - 1| - \frac{1}{x^2} + c$ c) $-\frac{3}{5x^5} + \frac{1}{5} \ln |5x + 2| + c$
d) $-4 \ln |1 - x| - \frac{5}{2} \ln |3 - 4x| + c$ e) $\frac{7}{4} \ln |4x + 3| + \frac{1}{5} \ln |2 - 5x| + \frac{1}{5(2-5x)^2} + c$
f) $\frac{2}{7} \ln |7x - 3| - \frac{2}{7x-3} + c$ g) $\frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{8} + c$ h) $2 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 9) + c$
i) $-\frac{3}{x} - \frac{5}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + 2 \ln (x^2 + 25) + c$ j) $\frac{5}{2} \ln (x^2 + 10) - \frac{3}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{10}} + c$
k) $\frac{3}{8} \ln (x^2 + 9) - \frac{12}{12} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c$ l) $\frac{7}{9} \ln (9x^2 + 25) + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{3x}{5} + c$ m) $\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{5} + c$
n) $\frac{8}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2x+5}{\sqrt{15}} + c$ o) $\frac{1}{2} \ln (x^2 + 4x + 20) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{4} + c$
p) $\frac{3}{2} \ln (x^2 - 10x + 106) + \frac{14}{9} \operatorname{arctg} \frac{x-5}{9} + c$

Integrovanie racionálnych funkcií rozkladom na elementárne zlomky.

Neurčitý integrál racionálnej funkcie počítame nasledujúcim spôsobom:

- Ak je funkcia $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nerýdzoracionálna, pomocou delenia polynómov ju vyjadríme ako súčet polynómu a rýdzoracionálnej funkcie.
- Ak je funkcia $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ rýdzoracionálna, rozložíme ju na súčet elementárnych zlomkov a vypočítame ich neurčité integrály.

Príklad 3.29. Vypočítajme $\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$.

Riešenie

Funkcia $\frac{18}{x^2 - 5x - 14}$ je rýdzoracionálna funkcia. Výraz v menovateli rozložíme na súčin koreňových činiteľov $x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$. Integrovanú funkciu napíšeme ako súčet dvoch elementárnych zlomkov.

$$\frac{18}{(x - 7)(x + 2)} = \frac{A}{x - 7} + \frac{B}{x + 2}.$$

Rovnicu vynásobíme výrazom $(x - 7)(x + 2)$ a dostaneme

$$18 = A(x + 2) + B(x - 7).$$

Koeficienty A, B vypočítame dosadzovacou metódou. Za x dosadíme do rovnice korene polynómu $x^2 - 5x - 14$, t.j.

$$x = 7 \quad \Rightarrow \quad 18 = 9A \quad \Rightarrow \quad A = 2,$$

$$x = -2 \quad \Rightarrow \quad 18 = -9B \quad \Rightarrow \quad B = -2.$$

Teda

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx = \int \frac{18}{(x - 7)(x + 2)} dx = \int \left(\frac{A}{x - 7} + \frac{B}{x + 2} \right) dx = 2 \int \frac{1}{x - 7} dx -$$

$$-2 \int \frac{1}{x+2} dx = 2 \ln |x-7| - 2 \ln |x+2| + c = 2 \ln \left| \frac{x-7}{x+2} \right| + c.$$

Príklad 3.30. Vypočítajte $\int \frac{x^2 - 13x + 4}{x^2(x-4)} dx$.

Riešenie

Funkcia $\frac{x^2 - 13x + 4}{x^2(x-4)}$ je rýdzoracionálna funkcia. Integrovanú funkciu napíšeme ako súčet troch elementárnych zlomkov

$$\frac{x^2 - 13x + 4}{x^2(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-4}.$$

Rovnosť vynásobíme výrazom $x^2(x-4)$ a dostaneme

$$x^2 - 13x + 4 = Ax(x-4) + B(x-4) + Cx^2,$$

$$x^2 - 13x + 4 = Ax^2 - 4Ax + Bx - 4B + Cx^2.$$

Koeficienty A , B , C vypočítame porovnávacou metódou. Porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách na oboch stranách rovnice.

$$x^2: \quad 1 = A + C,$$

$$x^1: \quad -13 = -4A + B,$$

$$x^0: \quad 4 = -4B.$$

Riešením sústavy rovníc sú čísla $A = 3$, $B = -1$, $C = -2$. Platí

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 13x + 4}{x^2(x-4)} dx &= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-4} \right) dx = 3 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx - 2 \int \frac{1}{x-4} dx = \\ &= 3 \ln |x| + \frac{1}{x} - 2 \ln |x-4| + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.31. Vypočítajte $\int \frac{2x^3 + x^2 + 30x - 32}{x(x^2 + 16)} dx$.

Riešenie

Integrovaná funkcia je nerýdzoracionálna, preto vydelíme čitateľa menovateľom.

$$(2x^3 + x^2 + 30x - 32) : (x^2 + 16x) = 2 + \frac{x^2 - 2x - 32}{x(x^2 + 16)}.$$

$$\frac{-2x^3 - 32x}{x^2 - 2x - 32}$$

Funkciu $\frac{2x^3 + x^2 + 30x - 32}{x(x^2 + 16)}$ napíšeme v tvare

$$\frac{2x^3 + x^2 + 30x - 32}{x(x^2 + 16)} = 2 + \frac{x^2 - 2x - 32}{x(x^2 + 16)}.$$

Pre rozklad rýdzoracionálnej funkcie $\frac{x^2 - 2x - 32}{x(x^2 + 16)}$ na elementárne zlomky platí

$$\frac{x^2 - 2x - 32}{x(x^2 + 16)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 16}.$$

Koeficienty A , B , C vypočítame podobne ako v predchádzajúcom príklade porovnávacou metódou.

$$x^2 - 2x - 32 = A(x^2 + 16) + (Bx + C)x,$$

$$x^2 - 2x - 32 = Ax^2 + 16A + Bx^2 + Cx,$$

$$\begin{aligned}x^2: \quad 1 &= A + B, \\x^1: \quad -2 &= C, \\x^0: \quad -32 &= 16A.\end{aligned}$$

Riešením sústavy sú čísla $A = -2$, $B = 3$, $C = -2$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 2x - 32}{x(x^2 + 16)} dx &= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 16} \right) dx = \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{3x - 2}{x^2 + 16} dx = \\&= -2 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{x}{x^2 + 16} dx - 2 \int \frac{1}{x^2 + 16} dx = -2 \ln |x| + 3 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 16} dx - 2 \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + c = \\&= -2 \ln |x| + \frac{3}{2} \ln (x^2 + 16) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + c.\end{aligned}$$

Pre integrál platí

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 + x^2 + 30x - 32}{x(x^2 + 16)} dx &= \int \left[2 + \frac{x^2 - 2x - 32}{x(x^2 + 16)} \right] dx = \int 2 dx + \int \frac{x^2 - 2x - 32}{x(x^2 + 16)} dx = \\&= 2x + -2 \ln |x| + \frac{3}{2} \ln (x^2 + 16) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + c.\end{aligned}$$

Úlohy

3.9. Vypočítajte neurčité integrály.

$$\begin{array}{lll}\text{a)} \int \frac{5x - 10}{x(x - 5)} dx & \text{b)} \int \frac{5 + x}{(x + 3)(x - 5)} dx & \text{c)} \int \frac{x - 21}{x^2 + 7x} dx \\ \text{d)} \int \frac{x + 6}{x^2 - 3x - 4} dx & \text{e)} \int \frac{6x + 22}{x^2 + 8x + 15} dx & \text{f)} \int \frac{9x + 12}{x(x - 2)(x + 3)} dx \\ \text{g)} \int \frac{x^2 + 15x + 32}{(x - 1)(x + 2)(x + 3)} dx & \text{h)} \int \frac{5 - 11x - 2x^2}{x^2(x - 5)} dx & \text{i)} \int \frac{x^2 - 9x + 17}{(x - 3)(x - 2)^2} dx \\ \text{j)} \int \frac{x^2 + 8x + 6}{(x - 1)(x^2 + 4)} dx & \text{k)} \int \frac{2x^2 - 3x - 9}{(x + 2)(x^2 + 1)} dx & \text{l)} \int \frac{5x - 10}{x(x^2 - 6x + 10)} dx\end{array}$$

Výsledky

$$\begin{array}{lll}\text{3.9. a)} 2 \ln |x| + 3 \ln |x - 5| + c & \text{b)} 3 \ln |x + 2| - 2 \ln |x + 3| + c & \text{c)} -3 \ln |x| + 4 \ln |x + 7| + c \\ \text{d)} 2 \ln |x - 4| - \ln |x + 1| + c & \text{e)} 4 \ln |x + 5| + 2 \ln |x + 3| + c & \\ \text{f)} 3 \ln |x - 2| - 2 \ln |x| - \ln |x + 3| + c & \text{g)} 4 \ln |x - 1| - 2 \ln |x + 2| - \ln |x + 3| + c & \\ \text{h)} \frac{1}{x} + 2 \ln |x| - 4 \ln |x - 5| + c & \text{i)} 2 \ln |x - 2| + \frac{3}{x - 2} - \ln |x - 3| + c & \\ \text{j)} 3 \ln |x - 1| - \ln (x^2 + 4) + 3 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c & \text{k)} \ln |x + 2| + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) - 5 \operatorname{arctg} x + c & \\ \text{l)} \frac{1}{2} \ln (x^2 - 6x + 10) + 2 \operatorname{arctg} (x - 3) - \ln |x| + c & & \end{array}$$

3.7 Integrovanie iracionálnych funkcií

1. Integrály s lineárnou iracionalitou.

Integrál tvaru

$$\int R(x, \sqrt[k_1]{x}, \sqrt[k_2]{x}, \dots, \sqrt[k_n]{x}) dx,$$

kde $k_1, k_2, \dots, k_n$ sú prirodzené čísla, možno pomocou substitúcie $x = t^k$ upraviť na integrál racionálnej funkcie, pričom k je najmenší spoločný násobok čísel $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Príklad 3.32. Vypočítajte $\int \frac{3 - 5\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Riešenie

Pri výpočte integrálu použijeme substitúciu $x = t^6$, kde $k = 6$ je najmenší spoločný násobok čísel $k_1 = 2, k_2 = 3$.

$$\begin{aligned} \int \frac{3 - 5\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \\ t = \sqrt[6]{x} \end{array} \right| = \int \frac{3 - 5t^2}{t^3} \cdot 6t^5 dt = 6 \int (3 - 5t^2)t^2 dt = 6 \int (3t^2 - 5t^4) dt = \\ &= 6(t^3 - t^5) + c = 6\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x^5} + c. \end{aligned}$$

Integrál tvaru

$$\int R\left(x, \sqrt[k_1]{ax+b}, \sqrt[k_2]{ax+b}, \dots, \sqrt[k_n]{ax+b}\right) dx,$$

kde $k_1, k_2, \dots, k_n$ sú prirodzené čísla, a, b sú reálne čísla, možno upraviť pomocou substitúcie $ax+b = t^k$ na integrál racionálnej funkcie, pričom k je najmenší spoločný násobok čísel $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Príklad 3.33. Vypočítajte $\int \frac{3x+4}{\sqrt{2x+1}} dx$.

Riešenie

Pri výpočte integrálu použijeme substitúciu $2x+1 = t^2$.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{\sqrt{2x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} 2x+1 = t^2 \\ 2dx = 2t dt \\ dx = t dt \\ x = \frac{t^2-1}{2} \end{array} \right| = \int \frac{3\frac{t^2-1}{2} + 4}{t} \cdot t dt = \int \frac{3t^2 - 3 + 8}{2} dt = \frac{1}{2} \int (3t^2 + 5) dt = \\ &= \frac{1}{2} (t^3 + 5t) + c = \frac{(2x+1)\sqrt{2x+1}}{2} + \frac{5\sqrt{2x+1}}{2} + c. \end{aligned}$$

2. Integrály s kvadratickou iracionalitou.

Najjednoduchším tvarom integrálov s kvadratickou iracionalitou sú integrály, ktoré môžeme vypočítať priamo pomocou integračných vzorcov:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + c, \\ -\arccos \frac{x}{a} + c, \end{cases} \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.34. Vypočítajte $\int \frac{1}{\sqrt{18-2x^2}} dx$.

Riešenie

Integrovanú funkciu upravíme vynímaním pred zátvorku.

$$\int \frac{1}{\sqrt{18-2x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2(9-x^2)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{3} + c.$$

Príklad 3.35. Vypočítajte $\int \frac{3}{\sqrt{4x^2-20}} dx$.

Riešenie

$$\int \frac{3}{\sqrt{4x^2-20}} dx = 3 \int \frac{1}{\sqrt{4(x^2-5)}} dx = \frac{3}{\sqrt{4}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-5}} dx = \frac{3}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2-5} \right| + c.$$

Integrál tvaru

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

vypočítame tak, že kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ upravíme na úplný štvorec.

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right].$$

Potom substitúciou $x + \frac{b}{2a} = t$ dostaneme jeden z integračných vzorcov.

Príklad 3.36. Vypočítajte $\int \frac{1}{\sqrt{12 + 4x - x^2}} dx$.

Riešenie

Trojčlen $12 + 4x - x^2$ upravíme na úplný štvorec a integrál vypočítame substitučnou metódou.

$$12 + 4x - x^2 = -(x^2 - 4x - 12) = -[(x - 2)^2 - 4 - 12] = -[(x - 2)^2 - 16] = 16 - (x - 2)^2.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{12 + 4x - x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{16 - (x - 2)^2}} dx = \left| \begin{array}{l} x - 2 = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{16 - t^2}} dt = \\ &= \arcsin \frac{t}{\sqrt{16}} + c = \arcsin \frac{x - 2}{4} + c. \end{aligned}$$

Integrál tvaru

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

kde $P_n(x)$ je polynóm stupňa $n \geq 1$, môžeme počítať metódou neurčitých koeficientov, pomocou tzv. **Ostrogradského vzorca**. Platí rovnosť

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + k \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

kde $Q_{n-1}(x)$ je polynóm stupňa $(n - 1)$ a k je neznáma konštanta.

Koeficienty polynómu $Q_{n-1}(x)$ a konštantu k určíme nasledujúcim postupom:

- rovnosť zderivujeme,
- vynásobíme výrazom $\sqrt{ax^2 + bx + c}$,
- porovnávacou metódou vypočítame koeficienty polynómu $Q_{n-1}(x)$ a konštantu k .

Príklad 3.37. Vypočítajte $\int \frac{6x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx$.

Riešenie

Polynóm $P_n(x) = 6x^2 - 5x + 4$ je polynóm 2. stupňa, polynóm $Q_{n-1}(x)$ bude polynóm 1. stupňa, t.j. $Q_{n-1}(x) = Ax + B$. Platí

$$\int \frac{6x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx = (Ax + B) \sqrt{x^2 - 2x + 3} + k \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx.$$

Rovnosť zderivujeme

$$\frac{6x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = A \sqrt{x^2 - 2x + 3} + (Ax + B) \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \cdot (2x - 2) + k \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}.$$

Vynásobíme výrazom $\sqrt{x^2 - 2x + 3}$ a dostaneme

$$6x^2 - 5x + 4 = A(x^2 - 2x + 3) + (Ax + B)(x - 1) + k.$$

Po úprave vznikne rovnica

$$6x^2 - 5x + 4 = 2Ax^2 - 3Ax + Bx + 3A - B + k.$$

Hodnoty konštant A , B , k vypočítame porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách.

$$x^2: \quad 6 = 2A \quad \Rightarrow \quad A = 3,$$

$$x^1: \quad -5 = -3A + B \quad \Rightarrow \quad B = 4,$$

$$x^0: \quad 4 = 3A - B + k \quad \Rightarrow \quad k = -1.$$

Platí

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx &= (3x + 4) \sqrt{x^2 - 2x + 3} - \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx = (3x + 4) \sqrt{x^2 - 2x + 3} - \\ &- \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + 2}} dx = (3x + 4) \sqrt{x^2 - 2x + 3} - \ln \left| x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 3} \right| + c. \end{aligned}$$

Úlohy

3.10. Vypočítajte neurčité integrály.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})} dx & \text{b)} \int \frac{1}{\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x}} dx & \text{c)} \int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x^5} + x} dx \\ \text{d)} \int \frac{1}{4(5\sqrt[4]{x} - \sqrt{x})} dx & \text{e)} \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx & \text{f)} \int \frac{2x + 5}{\sqrt{x+1}} dx \\ \text{g)} \int \frac{x-4}{\sqrt[3]{6x-12}} dx & \text{h)} \int \frac{\sqrt{5x+3}}{4 + \sqrt{5x+3}} dx & \text{i)} \int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx \end{array}$$

3.11. Vypočítajte neurčité integrály.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 14}} dx & \text{b)} \int \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 54}} dx & \text{c)} \int \frac{1}{\sqrt{28 - 7x^2}} dx \\ \text{d)} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 8x + 17}} dx & \text{e)} \int \frac{4}{\sqrt{x^2 - 10x + 26}} dx & \text{f)} \int \frac{1}{\sqrt{16 - 6x - x^2}} dx \\ \text{g)} \int \frac{1}{\sqrt{12 + 4x - x^2}} dx & \text{h)} \int \frac{1}{\sqrt{8x - x^2}} dx & \text{i)} \int \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 6x + 2}} dx \\ \text{j)} \int \frac{1}{\sqrt{12 + 5x - 2x^2}} dx & \text{k)} \int \frac{5x + 8}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}} dx & \text{l)} \int \frac{8x - 7}{\sqrt{5 + 3x - 2x^2}} dx \\ \text{m)} \int \frac{2x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx & \text{n)} \int \frac{50 - 21x - 4x^2}{\sqrt{27 - 6x - x^2}} dx & \text{o)} \int \sqrt{25 - x^2} dx \end{array}$$

Výsledky

$$\begin{array}{lll} 3.10. \text{ a)} 6 \ln |1 + \sqrt[6]{x}| + c & \text{b)} 2\sqrt{x} + 12\sqrt[4]{x} + 36 \ln |\sqrt[4]{x} - 3| + c & \text{c)} 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln |\sqrt[6]{x} + 1| + c \\ \text{d)} } -\frac{\sqrt{x}}{2} - 5\sqrt[4]{x} - 25 \ln |\sqrt[4]{x} - 5| + c & \text{e)} } \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3} \ln \left| \sqrt[4]{x^3} + 1 \right| + c & \text{f)} } \frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + 6\sqrt{x+1} + c \\ \text{g)} } \frac{1}{60}\sqrt[3]{(6x-12)^5} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{(6x-12)^2} + c & \text{h)} } \frac{5x+3}{5} - \frac{8}{5}\sqrt{5x+3} + \frac{32}{5} \ln |\sqrt{5x+3} + 4| + c \\ \text{i)} 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6 \ln |\sqrt[6]{x+2} + 1| + c \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 3.11. \text{ a)} \ln |x + \sqrt{x^2 - 14}| + c & \text{b)} \frac{1}{3} \ln |x + \sqrt{x^2 + 6}| + c & \text{c)} \frac{1}{\sqrt{7}} \arcsin \frac{x}{2} + c \\ \text{d)} \ln |x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 17}| + c & \text{e)} 4 \ln |x - 5 + \sqrt{x^2 - 10x + 26}| + c & \text{f)} \arcsin \frac{x+3}{5} + c \\ \text{g)} \arcsin \frac{x-2}{4} + c & \text{h)} \arcsin \frac{x-4}{4} + c & \text{i)} \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + \frac{2}{3}} \right| + c \\ \text{j)} \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-5}{11} + c & \text{k)} 5\sqrt{x^2 + 4x + 7} - 2 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 7}| + c \\ \text{l)} -4\sqrt{5 + 3x - 2x^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{7} + c & \text{m)} (x-3)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 6 \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + c \end{array}$$

$$\text{n)} (2x+3)\sqrt{27-6x-x^2} + 5 \arcsin \frac{x+3}{6} + c \quad \text{o)} \frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} + c$$

3.8 Integrovanie goniometrických funkcií

Neurčitý integrál racionálnej funkcie premenných $\sin x, \cos x$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx.$$

môžeme upraviť na integrál racionálnej funkcie premennej t pomocou substitúcie

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Z tejto substitúcie vyplýva

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Príklad 3.38. Vypočítajme $\int \frac{1}{6 \sin x - 5 \cos x - 5} dx$.

Riešenie

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{6 \sin x - 5 \cos x - 5} dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{6 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - 5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - 5} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int \frac{1}{\frac{12t-5+5t^2-5-5t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{12t-10} dt = \int \frac{1}{6t-5} dt = \frac{1}{6} \int \frac{6}{6t-5} dt = \frac{1}{6} \ln |6t-5| + c = \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5 \right| + c. \end{aligned}$$

Ak sa funkcia $R(\sin x, \cos x)$ dá upraviť na tvar $R_1(\sin x) \cdot \cos x$, môžeme integrál riešiť pomocou substitúcie

$$\sin x = t, \quad \cos x dx = dt.$$

Príklad 3.39. Vypočítajme $\int \frac{8 \cos x}{17 - \cos^2 x} dx$.

Riešenie

Integrovanú funkciu upravíme na tvar $\int R(\sin x) \cdot \cos x dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{8 \cos x}{17 - \cos^2 x} dx &= 8 \int \frac{\cos x}{17 - (1 - \sin^2 x)} dx = 8 \int \frac{1}{16 + \sin^2 x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \\ &= 8 \int \frac{1}{16 + t^2} dt = 8 \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{4} + c = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{4} + c. \end{aligned}$$

Ak sa funkcia $R(\sin x, \cos x)$ dá upraviť na tvar $R_2(\cos x) \cdot \sin x$, môžeme integrál riešiť pomocou substitúcie

$$\cos x = t, \quad -\sin x dx = dt.$$

Príklad 3.40. Vypočítajme $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 6 \cos x + 9} dx$.

Riešenie

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 6 \cos x + 9} dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x - 6 \cos x + 9} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{1}{t^2 - 6t + 9} (-dt) = - \int \frac{1}{(t-3)^2} dt = \left| \begin{array}{l} t-3 = z \\ dt = dz \end{array} \right| = - \int \frac{1}{z^2} dz = - \int z^{-2} dz = \\ &= -\frac{z^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{z} + c = \frac{1}{t-3} + c = \frac{1}{\cos x - 3} + c. \end{aligned}$$

Ak sa funkcia $R(\sin x, \cos x)$ dá upraviť tak, že v nej vystupujú len párne mocniny výrazov $\sin x, \cos x$ a funkcia $\operatorname{tg} x$, môžeme integrál riešiť pomocou substitúcie $t = \operatorname{tg} x$. Z tejto substitúcie vyplýva

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Príklad 3.41. Vypočítajme $\int \frac{12}{\sin^2 x + 9 \cos^2 x} dx$.

Riešenie

Integrovaná funkcia obsahuje párne mocniny funkcie $\sin x$ a $\cos x$. Použijeme substitúciu $\operatorname{tg} x = t$.

$$\begin{aligned} \int \frac{12}{\sin^2 x + 9 \cos^2 x} dx &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{array} \right| = \int \frac{12}{\frac{t^2}{1+t^2} + 9 \cdot \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= 12 \int \frac{1}{\frac{t^2+9}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = 12 \int \frac{1}{t^2+9} dt = 12 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + c = 4 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{3} + c. \end{aligned}$$

Integrály tvaru

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx,$$

kde m, n sú celé čísla, môžeme spravidla počítať nasledujúcim spôsobom.

- a) Ak aspoň jedno z čísel m, n je nepárne číslo, tak integrál upravíme pre nepárne m na tvar

$$\int \sin^n x \cdot \cos^{m-1} x \cdot \cos x dx \text{ a použijeme substitúciu}$$

$$\sin x = t, \quad \cos x dx = dt$$

a pre nepárne n na tvar

$$\int \sin^{n-1} x \cdot \cos^m x \cdot \sin x dx \text{ a použijeme substitúciu}$$

$$\cos x = t, \quad -\sin x dx = dt.$$

- b) Ak sú obidve čísla m, n párne, tak integrál môžeme upraviť na súčet alebo rozdiel integrálov tvaru $\int \sin^k x dx, \int \cos^\ell x dx$, kde k, ℓ sú celé čísla. Tieto integrály potom môžeme počítať pomocou rekurentných vzorcov

$$\int \sin^k x dx = -\frac{1}{k} \sin^{k-1} x \cos x + \frac{k-1}{k} \int \sin^{k-2} x dx,$$

$$\int \cos^\ell x \, dx = \frac{1}{\ell} \cos^{\ell-1} x \sin x + \frac{\ell-1}{\ell} \int \cos^{\ell-2} x \, dx.$$

Príklad 3.42. Vypočítajte $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$.

Riešenie

Máme integrál typu $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$, pričom n je nepárne. Integrovanú funkciu upravíme na tvar $\sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \sin x$ a zo vzťahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ vyjadríme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Použijeme substitúciu $\cos x = t$. Teda

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^4 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \\ \sin x \, dx = -dt \end{array} \right| = \\ &= \int (1 - t^2) t^4 (-dt) = -\int (t^4 - t^6) \, dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + c = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.43. Vypočítajte $\int \sin^5 x \cos^3 x \, dx$.

Riešenie

Máme integrál typu $\int \sin^n x \cos^m x \, dx$, pričom obidva exponenty n a m sú nepárne. Upravme funkciu na súčin $\sin^5 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x$ (je to výhodnejšie, pretože $m < n$). Zo vzťahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ vyjadríme $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Dostaneme funkciu tvaru $R(\sin x) \cdot \cos x$, preto zvolíme substitúciu $\sin x = t$. Teda

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int \sin^5 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 (1 - t^2) \, dt = \int (t^5 - t^7) \, dt = \frac{t^6}{6} - \frac{t^8}{8} + c = \frac{1}{6} \sin^6 x - \frac{1}{8} \sin^8 x + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.44. Vypočítajte $\int \sin^5 x \, dx$.

Riešenie

Integrál môžeme počítat pomocou rekurentného vzorca. Avšak funkcia $\sin x$ je umocnená na nepárne číslo, preto môžeme využiť analogický postup ako v predchádzajúcich úlohách. Upravme funkciu na súčin $\sin^4 x \cdot \sin x$. Platí $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ a teda $\sin^4 x = (1 - \cos^2 x)^2$. Dostaneme funkciu tvaru $R(\cos x) \cdot \sin x$, preto zvolíme substitúciu $\cos x = t$.

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \, dx &= \int \sin^4 x \cdot \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x \, dx = -dt \end{array} \right| = \\ &= \int (1 - t^2)^2 (-dt) = -\int (1 - 2t^2 + t^4) \, dt = -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c. \end{aligned}$$

Príklad 3.45. Vypočítajte $\int \sin^4 x \, dx$.

Riešenie

Využijeme rekurentný vzorec

$$\int \sin^k x \, dx = -\frac{1}{k} \sin^{k-1} x \cos x + \frac{k-1}{k} \int \sin^{k-2} x \, dx.$$

Platí

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} \int dx \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x + c. \end{aligned}$$

Poznámka.

Pri výpočte integrálov $\int \sin^2 x \, dx$, $\int \cos^2 x \, dx$ môžeme použiť vzorce

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Príklad 3.46. Vypočítajte $\int \sin^2 x \, dx$.

Riešenie

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + c.$$

Úlohy

3.12. Vypočítajte neurčité integrály.

a) $\int \sin 2x \, dx$	b) $\int \cos \frac{x}{3} \, dx$	c) $\int \frac{1}{\sin^2(5x-1)} \, dx$
d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \, dx$	e) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 2} \, dx$	f) $\int \frac{5 \cos x}{3 + \sin x} \, dx$
g) $\int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x} \, dx$	h) $\int \frac{5 + \operatorname{cotg}^4 x}{\sin^2 x} \, dx$	i) $\int \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\cos^2 x} \, dx$

3.13. Vypočítajte neurčité integrály.

a) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$	b) $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x} \, dx$	c) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} \, dx$
d) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} \, dx$	e) $\int \sqrt[5]{\sin^3 x} \cos x \, dx$	f) $\int \sin^4 x \cos x \, dx$
g) $\int \sin x (3 - \cos^5 x) \, dx$	h) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x - 9}} \, dx$	i) $\int \frac{\cos x}{\sin x + \sin^2 x} \, dx$
j) $\int \frac{1}{10 + 6 \cos x} \, dx$	k) $\int \frac{1}{6 + 5 \sin x} \, dx$	l) $\int \frac{1}{5 \cos x - 3 \sin x + 6} \, dx$
m) $\int \frac{1}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} \, dx$	n) $\int \frac{1}{6 \sin^2 x + 14 \cos^2 x - 5} \, dx$	o) $\int \frac{1}{1 - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x} \, dx$

Výsledky

3.12. a) $-\frac{1}{2} \cos 2x + c$ b) $3 \sin \frac{x}{3} + c$ c) $-\frac{1}{5} \operatorname{cotg}(5x-1) + c$ d) $2 \sin \sqrt{x} + c$ e) $-\ln(\cos^2 x + 2) + c$
f) $5 \ln|3 + \sin x| + c$ g) $-\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x + c$ h) $-5 \operatorname{cotg} x - \frac{1}{5} \operatorname{cotg}^5 x + c$ i) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + c$

3.13. a) $\frac{1}{\cos x} + c$ b) $-\frac{1}{4 \sin^4 x} + c$ c) $-\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + c$ d) $\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + c$ e) $\frac{5}{8} \sin x \sqrt[5]{\sin^3 x} + c$ f) $\frac{1}{5} \sin^5 x + c$
g) $\frac{1}{6} \cos^6 x - 3 \cos x + c$ h) $-\ln|\cos x + \sqrt{\cos^2 x - 9}| + c$ i) $-\ln\left|\frac{\sin x}{\sin x + 1}\right| + c$ j) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2}\right) + c$
k) $\frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 5}{\sqrt{11}}\right) + c$ l) $\sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3}{\sqrt{2}}\right) + c$ m) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + c$ n) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{3}\right) + c$
o) $-\frac{1}{\operatorname{tg} x - 2} + c$

4 Základy algebry

4.1 Matice

Nech m a n sú prirodzené čísla. Schému $m \cdot n$ čísel zostavenú do m riadkov a n stĺpcov nazývame *maticou* o m riadkoch a n stĺpcoch alebo maticou typu $m \times n$. Pre maticu typu $m \times n$ používame označenie

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matice budeme označovať veľkými latinskými písmenami $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$. Čísla a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, nazývame *prvkami matice* $\mathbf{A}$. Prvý index i označuje poradie riadku, druhý index j poradie stĺpca, v ktorom sa daný prvok nachádza.

Nulovou maticou $\mathbf{O}$ nazývame maticu, ktorej všetky prvky sú nulové.

Ak matica $\mathbf{A}$ má rovnaký počet riadkov a stĺpcov, t. j. je typu $n \times n$, hovoríme, že $\mathbf{A}$ je *štvorcová matica stupňa n* . Prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, teda prvky a_{ii} pre $i = 1, 2, \dots, n$, nazývame *prvky hlavnej diagonály matice* $\mathbf{A}$. Ak $m \neq n$, maticu nazývame *obdĺžnikovou maticou*.

Štvorcová matica, ktorej všetky prvky neležiacie na hlavnej diagonále sú rovné nule, sa nazýva *diagonálna matica*. Diagonálna matica, ktorej všetky prvky hlavnej diagonály sú jednotky, sa nazýva *jednotkovou maticou*.

Nech matica $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$. Maticu

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(typu $n \times m$) nazývame *transponovanou maticou* k matici $\mathbf{A}$.

4.2 Operácie s maticami

Dve matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sa *rovnajú* ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$), ak sú rovnakého typu $m \times n$ a platí

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{pre } i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Súčtom dvoch matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ rovnakého typu $m \times n$ rozumieme maticu $\mathbf{C}$ typu $m \times n$ ($\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$), ak platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \text{pre } i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Súčet $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ nazývame *rozdiel matice* $\mathbf{A}$ a *matice* $\mathbf{B}$.

Súčinom matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ s *číslom* α rozumieme maticu $\mathbf{C}$ typu $m \times n$ ($\mathbf{C} = \alpha \cdot \mathbf{A}$), ak platí

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \quad \text{pre } i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Nech matica $\mathbf{A}$ je typu $m \times n$ a matica $\mathbf{B}$ typu $n \times r$. *Súčinom matíc* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (v danom poradí) rozumieme maticu $\mathbf{C}$ typu $m \times r$ ($\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$), kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

pre $i = 1, 2, 3, \dots, m$, $j = 1, 2, 3, \dots, r$. Prvok c_{ij} získame ako súčet súčinov sebe zodpovedajúcich prvkov i -teho riadku matice $\mathbf{A}$ a j -teho stĺpca matice $\mathbf{B}$.

Z definície súčinu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je jasné, že počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ musí byť rovný počtu riadkov matice $\mathbf{B}$. Ak je $m \neq r$, tak súčin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ neexistuje. Súčin matíc nie je komutatívny, t. j. vo všeobecnosti neplatí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Príklad 4.1. *Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Vypočítajme*

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ b) $-2\mathbf{B}$ c) $4\mathbf{B} - 3\mathbf{A}$ d) $\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T$.

Riešenie

Matica $\mathbf{A}$ a matica $\mathbf{B}$ sú rovnakého typu 2×3 .

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & -3+1 & 1+1 \\ 0-2 & -1+4 & 2-1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } -2\mathbf{B} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -2 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 4\mathbf{B} - 3\mathbf{A} &= 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 \\ -8 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 13 & 1 \\ -8 & 19 & -10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Príklad 4.2. *Nájdime maticu $\mathbf{X}$, ktorá spĺňa podmienku $\mathbf{A} - 2\mathbf{X} = \mathbf{O}$, ak*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Riešenie

Riešime maticovú rovnicu $\mathbf{A} - 2\mathbf{X} = \mathbf{O}$, kde $\mathbf{O}$ je nulová matica. Platí

$$\begin{aligned} -2\mathbf{X} &= \mathbf{O} - \mathbf{A}, \\ \mathbf{X} &= \mathbf{O} + \frac{1}{2}\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Teda

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -3 \\ -1 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Matica } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -3 \\ -1 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Príklad 4.3. *Vypočítajme*

$$\text{a) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \text{ a } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \text{ ak } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \text{ a } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \text{ ak } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c) \mathbf{A}^2, \text{ ak } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}, \text{ ak } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Riešenie

- a) $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ sú matice typu 2×2 , počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ je rovnaký ako počet riadkov matice $\mathbf{B}$. Súčin matíc $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ existuje a výsledná matica $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ bude typu 2×2 . Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 5 + 4 \cdot 0 & (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 & 5 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 25 & -13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Súčin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ existuje, výsledná matica bude typu 2×2 . Teda

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 5 & 5 \cdot 4 + (-2) \cdot (-3) \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -15 & 26 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- b) Matica $\mathbf{A}$ je typu 2×3 , matica $\mathbf{B}$ typu 3×1 . Počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ je rovnaký ako počet riadkov matice $\mathbf{B}$. Výsledná matica $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ bude typu 2×1 . Platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 7 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 7 + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Matica $\mathbf{B}$ je typu 3×1 , matica $\mathbf{A}$ typu 2×3 . Počet stĺpcov matice $\mathbf{B}$ nie je rovnaký ako počet riadkov matice $\mathbf{A}$ a teda súčin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ neexistuje.

- c) Matica $\mathbf{A}$ je typu 3×3 . Výsledná matica $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ bude opäť typu 3×3 . Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 12 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- d) Matica $\mathbf{A}$ je typu 3×2 , matica $\mathbf{B}$ typu 2×2 , teda počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ je rovnaký ako počet riadkov matice $\mathbf{B}$. Označme výslednú maticu súčinu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ako maticu $\mathbf{D}$, ktorá je typu 3×2 . Platí

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 - 7 \cdot 2 & 2 \cdot 5 + 7 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 17 \\ 13 & 13 \end{pmatrix}.$$

Súčin $\mathbf{D} \cdot \mathbf{C}$ existuje, výsledná matica bude typu 3×1 . Platí

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 17 \\ 13 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 12 \\ 8 + 51 \\ -13 + 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 59 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Úlohy

4.1. Vypočítajte $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^T$ a $\mathbf{B} + 2\mathbf{A}^T$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Vypočítajte $\frac{1}{2}\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3. Nájdite maticu $\mathbf{X}$, ktorá spĺňa podmienku $2\mathbf{A} - 3\mathbf{X} = \mathbf{O}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.4. Vypočítajte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, ak

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

4.5. Vypočítajte $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.6. Vypočítajte $\mathbf{A}^2$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.7. Vypočítajte

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledky

$$4.1. \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 9 & 7 & 11 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 19 & -8 \\ -3 & -4 & 13 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} + 2\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -3 \\ 16 & 9 & 4 \\ -6 & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4.2. \frac{1}{2}\mathbf{B} - 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{13}{2} & 4 \\ 4 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$4.3. \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} \\ -\frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$4.4. \text{ a) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 14 & 32 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -1 & 34 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \text{ neexistuje, } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 5 & -15 & -10 \\ -7 & 21 & 14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 & 4 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{13}{4} \\ -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & 17 & 9 \\ 16 & 8 & -1 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 20 & -15 & 11 \\ 1 & -3 & 13 \\ -8 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & -11 \\ 25 & -5 & 14 & -25 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \text{ neexistuje}$$

$$4.5. \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 30 \\ -18 & -11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 29 \\ -18 & -20 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 27 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$$

$$4.6. \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 16 & -22 \\ 8 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$4.7. \begin{pmatrix} -50 & -6 \\ -2 & 6 \\ -39 & -9 \end{pmatrix}$$

4.3 Hodnosť matice

Hodnosť matice je maximálny počet lineárne nezávislých riadkov v matici. Ak má matica m riadkov, môže mať hodnosť najviac m , t. j. $h(\mathbf{A}) \leq m$. Ak $h(\mathbf{A}) = m$, všetky riadky matice $\mathbf{A}$ sú lineárne nezávislé.

Hodnosť matice $\mathbf{A}$ sa nezmení, ak

- vzájomne vymeníme dva riadky matice,
- vynásobíme ľubovoľný riadok nenulovým číslom,
- pripočítame k niektorému riadku lineárnu kombináciu ostatných riadkov (špeciálne, ak pripočítame ľubovoľný násobok niektorého riadku k inému riadku),
- pridáme alebo vynecháme riadok, ktorý je lineárnou kombináciou ostatných riadkov.

Pri praktickom zisťovaní hodnosti matice $\mathbf{A}$ postupujeme tak, že elementárnymi úpravami, ktoré nemenia hodnosť matice upravíme maticu $\mathbf{A}$ na stupňovitý tvar, t. j. pod hlavnou diagonálou budú nulové prvky. Hodnosť matice je rovná počtu nenulových riadkov v upravenej matici.

Príklad 4.4. Vypočítajte hodnosť matice $\mathbf{A}$, ak

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad c) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}.$$

Riešenie

a) Elementárnymi úpravami, ktoré nemenia hodnosť matice, upravíme maticu $\mathbf{A}$ na stupňovitý tvar.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} / + R_1 \\ / + R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} / - R_2 \\ / + 3R_2 \end{matrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} / + 8R_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hodnosť matice $\mathbf{A}$ je rovná počtu nenulových riadkov v upravenej matici, teda $h(\mathbf{A}) = 4$.

b) Elementárnymi úpravami upravíme maticu $\mathbf{A}$ na stupňovitý tvar.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} / - R_1 \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightleftharpoons \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} / - 2R_1 \\ / - 2R_1 \end{matrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightleftharpoons \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} / + 5R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

Pretože výsledná matica má tri nenulové riadky, hodnosť matice $\mathbf{A}$ je $h(\mathbf{A}) = 3$.

c) Maticu $\mathbf{A}$ upravíme na stupňovitý tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \begin{matrix} / - 3R_1 \\ / - 4R_1 \\ / - 3R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} / : 3 \\ / : (-2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ / -R_2 \\ / -R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hodnosť matice je $h(\mathbf{A}) = 2$.

Úlohy

4.8. Určte hodnotu matice $\mathbf{A}$.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 7 & 12 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{d) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{e) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} & \text{f) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{g) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{h) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Výsledky

4.8. a) $h(\mathbf{A}) = 2$ b) $h(\mathbf{A}) = 3$ c) $h(\mathbf{A}) = 3$ d) $h(\mathbf{A}) = 3$ e) $h(\mathbf{A}) = 2$ f) $h(\mathbf{A}) = 4$
g) $h(\mathbf{A}) = 3$ h) $h(\mathbf{A}) = 4$

4.4 Sústavy lineárnych rovníc - Gaussova eliminačná metóda

Nech je daná sústava m lineárnych rovníc s n neznámymi tvaru

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \quad (1)$$

Koeficienty sústavy a_{ij} , $i = 1, 2, 3, \dots, m$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ tvoria *maticu sústavy*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Maticu

$$\overline{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

nazývame *rozšírenou maticou sústavy*.

Čísla $b_1, b_2, \dots, b_m$ nazývame *absolútnymi členmi sústavy* alebo *pravými stranami* a $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú *neznáme*.

Sústava sa nazýva *homogénna*, ak $b_i = 0$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, m$ a *nehomogénna*, ak existuje aspoň jedno i také, že $b_i \neq 0$.

Sústavu (1) môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Maticu $\mathbf{X}$ nazývame *stĺpcom neznámych* a maticu $\mathbf{B}$ *stĺpcom pravých strán* sústavy.

O riešiteľnosti sústavy (1) hovorí *Frobeniova veta*:

Sústava (1) má riešenie vtedy a len vtedy, keď hodnosť $h(\mathbf{A})$ matice sústavy sa rovná hodnosti $h(\overline{\mathbf{A}})$ rozšírenej matice sústavy.

Dôsledok Frobeniovej vety:

- Ak $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = n$, kde n je počet neznámych, tak sústava (1) má práve jedno riešenie.
- Ak $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) < n$, tak sústava (1) má nekonečne veľa riešení.
- Ak $h(\mathbf{A}) \neq h(\overline{\mathbf{A}})$, tak sústava (1) nemá riešenie.

Riešením sústavy (1) nazývame každú usporiadanú n -ticu čísel $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, pre ktorú je po dosadení zložiek c_i za neznáme x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ splnená každá rovnica sústavy (1).

Gaussova eliminačná metóda

Nech je daná sústava (1) m lineárnych rovníc o n neznámych. K danej sústave lineárnych rovníc priradíme jej rozšírenú maticu, ktorú elementárnymi úpravami upravíme na stupňovitý tvar. Podľa dôsledku Frobeniovej vety môžu nastať tri prípady:

- Existuje jediné riešenie, ktoré získame tak, že k upravenej rozšírenej matici priradíme odpovedajúcu ekvivalentnú sústavu lineárnych rovníc. Postupným dosadzovaním získame hodnoty neznámych $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- Existuje nekonečne veľa riešení, ktoré získame tak, že k upravenej rozšírenej matici priradíme odpovedajúcu ekvivalentnú sústavu lineárnych rovníc a volíme $p = n - h(\mathbf{A})$ voľných neznámych. Ostatné neznáme získame postupným dosadzovaním do rovníc.
- Neexistuje riešenie danej sústavy lineárnych rovníc.

Príklad 4.5. *Riešme sústavu lineárnych rovníc eliminačnou metódou*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 3, \\ 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 4, \\ 9x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 &= 21. \end{aligned}$$

Riešenie

Napišeme rozšírenú maticu sústavy a upravíme ju elementárnymi úpravami na stupňovitý tvar.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & -4 & 4 & 4 \\ 9 & 5 & -2 & -1 & 21 \end{array} \right) \begin{array}{l} / + R_1 \\ / - 2R_1 \\ / - 3R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow \end{array} \sim \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 12 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ / - 2R_2 \\ / - 2R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 16 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ / - 2R_3 \end{array} \sim \\
 & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Keďže $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) = n = 4$, podľa dôsledku Frobeniovej vety má daná sústava lineárnych rovníc jediné riešenie, ktoré získame tak, že k upravenej rozšírenej matici priradíme odpovedajúcu ekvivalentnú sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}
 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3, \\
 x_2 + 2x_4 &= -2, \\
 2x_3 - 5x_4 &= 10, \\
 2x_4 &= -4.
 \end{aligned}$$

Z poslednej rovnice vyplýva, že $x_4 = -2$. Dosadením x_4 do tretej rovnice získame neznámu x_3 :

$$2x_3 = 10 + 5x_4 = 10 + 5 \cdot (-2) = 10 - 10 = 0, \quad \text{odkiaľ} \quad x_3 = 0.$$

Dosadením x_4 do druhej rovnice dopočítame neznámu x_2 :

$$x_2 = -2 - 2x_4 = -2 + 4 = 2.$$

Dosadením x_4, x_3, x_2 do prvej rovnice získame neznámu x_1 :

$$3x_1 = 3 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 - 2 + 0 + 2 = 3, \quad \text{odkiaľ} \quad x_1 = 1.$$

Riešením sústavy je usporiadaná štvorica $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 0, -2)$.

Príklad 4.6. Riešme sústavu lineárnych rovníc eliminačnou metódou

$$\begin{aligned}
 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4, \\
 x_1 + x_2 - x_3 &= -1, \\
 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= -1, \\
 -2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1.
 \end{aligned}$$

Riešenie

Rozšírenú maticu sústavy upravíme elementárnymi úpravami na stupňovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -7 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ / - 2R_1 \\ / - 3R_1 \\ / + 2R_1 \end{array} \sim$$

$$\begin{aligned}
& \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -10 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \end{array} \right) / : (-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -10 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \end{array} \right) / + 10R_2 \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 6 & 13 \end{array} \right) / : (-9) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 13 \end{array} \right) / - 6R_3 \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Platí $h(\mathbf{A}) = 3$, $h(\overline{\mathbf{A}}) = 4$, $n = 4$. Keďže $h(\mathbf{A}) \neq h(\overline{\mathbf{A}})$, podľa Frobeniovej vety sústava lineárnych rovníc nemá riešenie.

Príklad 4.7. Riešme sústavu lineárnych rovníc eliminačnou metódou

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2, \\
2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\
x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= 5.
\end{aligned}$$

Riešenie

Rozšírenú maticu sústavy upravíme elementárnymi úpravami na stupňovitý tvar.

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & 5 \end{array} \right) / - 2R_1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & 3 \end{array} \right) / + R_2 \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Platí $h(\mathbf{A}) = 2$, $h(\overline{\mathbf{A}}) = 2$, $n = 4$. Keďže $h(\mathbf{A}) = h(\overline{\mathbf{A}}) < n$, podľa dôsledku Frobeniovej vety sústava lineárnych rovníc má nekonečne veľa riešení. K upravenej rozšírenej matici priradíme odpovedajúcu ekvivalentnú sústavu lineárnych rovníc a volíme voľné neznáme.

V našom prípade volíme dve neznáme ($p = n - h(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$). Ostatné neznáme získame z rovníc:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2, \\
-5x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= -3.
\end{aligned}$$

Zvolíme napríklad $x_4 = a$, $x_3 = b$ a z poslednej rovnice vyjadríme x_2 . Platí

$$-5x_2 = -3 + 7x_4 - 3x_3 = -3 + 7a - 3b, \quad \text{odkiaľ} \quad x_2 = \frac{3 - 7a + 3b}{5}.$$

Z prvej rovnice vyplýva

$$x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 2 - 2 \cdot \frac{3 - 7a + 3b}{5} + b - 4a = \frac{10 - 6 + 14a - 6b + 5b - 20a}{5},$$

$$\text{odkiaľ} \quad x_1 = \frac{4 - 6a - b}{5}.$$

Riešením sústavy je usporiadaná štvorica $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{4-6a-b}{5}, \frac{3-7a+3b}{5}, a, b \right)$,
 kde $a, b \in \mathbb{R}$. Ak položíme napríklad $a = 0, b = 1$ dostaneme riešenie $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0, 1 \right)$.

Úlohy

4.9. Riešte sústavy lineárnych rovníc eliminačnou metódou.

- a) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1,$
 $x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -1,$
 $4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1,$
- b) $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0,$
 $x_1 - x_2 + 3x_3 = 0,$
 $2x_1 + x_2 + x_3 = 0,$
- c) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1,$
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2,$
 $x_1 + x_2 + 2x_3 = -1,$
- d) $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -2,$
 $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8,$
 $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1,$
 $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4,$
- e) $3x_1 + 2x_2 + x_4 = 3,$
 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1,$
 $-3x_1 - 7x_2 - 15x_3 + 7x_4 = -1,$
- f) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0,$
 $3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
 $x_1 + 8x_2 - 13x_3 + 7x_4 = 5,$
 $-2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1,$
- g) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1,$
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2,$
 $x_1 + x_2 + 2x_3 = 1,$
- h) $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1,$
 $x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1,$
 $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 6,$
- i) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1,$
 $3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1,$
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
 $5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2,$
- j) $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
 $x_1 + x_2 + x_4 = 0,$
 $2x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
 $4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3,$
- k) $2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2,$
 $6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3,$
 $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9,$
 $4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1.$

Výsledky

- 4.9. a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4} \right)$ b) $(0, 0, 0)$ c) nemá riešenie d) $(1, 2, 1, 3)$ e) nemá riešenie f) nemá riešenie
 g) $(1 - 5a, 3a, a), a \in \mathbb{R}$ h) $(2b - 2a, b, a, 1), a, b \in \mathbb{R}$ i) $\left(\frac{5a+1}{6}, \frac{1-7a}{6}, \frac{5a+1}{6}, a \right), a \in \mathbb{R}$
 j) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - a, \frac{3}{2} + a, a \right), a \in \mathbb{R}$ k) $(b, 2b - a + 1, 3 - 4a, 0, a), a, b \in \mathbb{R}$

4.5 Determinanty

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica stupňa n . Determinantom matice $\mathbf{A}$ rozumieme číslo $|\mathbf{A}|$, pre ktoré platí:

1. Ak $\mathbf{A}$ je matica prvého stupňa, t.j. $\mathbf{A} = (a_{11})$, tak $|\mathbf{A}| = a_{11}$.
2. Ak $n > 1$, tak

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} |\mathbf{S}_{ij}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad \text{kde } 1 \leq i \leq n \quad (\text{tzv. Laplaceov rozvoj}).$$

Symbolom $|S_{ij}|$ rozumieme *subdeterminant prislúchajúci prvku a_{ij}* , ktorý vznikne z pôvodného determinantu vynechaním i -teho riadku a j -teho stĺpca. Súčin $(-1)^{i+j} |S_{ij}|$ označujeme A_{ij} a nazývame ho *algebraickým doplnkom k prvku a_{ij}* , teda $A_{ij} = (-1)^{i+j} |S_{ij}|$.

Zapisujeme

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Z definície determinantu vyplýva, že ak $n = 2$, tak

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

a ak $n = 3$, tak

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Determinant matice druhého stupňa najjednoduchšie vypočítame tak, že od súčiny prvkov v smere hlavnej diagonály odpočítame súčin prvkov v smere vedľajšej diagonály (tzv. *krížové pravidlo*).

Determinant matice tretieho stupňa je vhodné počítať pomocou *Sarussovho pravidla*. Spočíva v tom, že pod maticu opíšeme prvé dva riadky a vytvoríme súčiny po troch prvkoch v smere hlavnej diagonály, od ktorých odpočítame súčiny prvkov v smere vedľajšej diagonály.

$$\begin{array}{ccccc} + & \swarrow & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \searrow & - \\ + & \swarrow & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \searrow & - \\ + & \swarrow & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \searrow & - \\ & \swarrow & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \searrow & \\ & \swarrow & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \searrow & \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}).$$

Sarussovo pravidlo sa nedá použiť na počítanie determinantov štvrtého a vyšších stupňov!

Niekedy, hlavne u determinantov vyššieho stupňa, je výhodné použiť pri výpočte vlastnosti determinantov:

- ak sa všetky prvky niektorého riadku (stĺpca) matice $\mathbf{A}$ rovnajú nule, tak $|\mathbf{A}| = 0$,
- ak v determinante vymeníme navzájom dva riadky (stĺpce), determinant zmení znamienko na opačné,
- determinant násobíme číslom tak, že daným číslom násobíme jeden ľubovoľný riadok (stĺpec),
- ak matica $\mathbf{A}$ obsahuje dva rovnaké riadky (stĺpce), tak $|\mathbf{A}| = 0$,
- hodnota determinantu matice $\mathbf{A}$ sa nezmení, ak ku niektorému riadku (stĺpcu) pripočítame lineárnu kombináciu ostatných riadkov (stĺpcov),
- ak matica $\mathbf{A}^T$ je transponovaná matica k matici $\mathbf{A}$, tak $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^T|$.

Príklad 4.8. Vypočítajme determinanty

$$\begin{array}{lll} a) \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & b) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} & c) \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{array}$$

Riešenie

a) Na výpočet determinantu použijeme krížové pravidlo.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-4) \cdot (-2) = 15 - 8 = 7.$$

b) Determinant vypočítame pomocou Sarussovho pravidla.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 2 - [1 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 4 \cdot (-1)] = \\ = 0 + 1 + 24 - (18 - 4 + 0) = 11.$$

c) Determinant vypočítame pomocou Laplaceovho rozvoja. Zvoľme niektorý riadok alebo stĺpec, podľa ktorého urobíme rozvoj determinantu. Vhodný je taký riadok (stĺpec), ktorý obsahuje čo najviac nulových prvkov. Na tento účel upravíme determinant pomocou vlastností determinantu tak, aby napríklad 1. stĺpec obsahoval tri nulové prvky. Potom urobíme rozvoj podľa upraveného 1. stĺpca.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} / -4R_2 \\ \\ / -R_1 \\ / -3R_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & -6 & -11 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -8 & -5 & -8 \end{vmatrix} + \\ + 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -9 & -6 & -11 \\ 1 & 1 & 2 \\ -8 & -5 & -8 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -9 & -6 & -11 \\ 3 & 2 & 3 \\ -8 & -5 & -8 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -9 & -6 & -11 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -9 & -6 & -11 \\ 1 & 1 & 2 \\ -8 & -5 & -8 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 6 & 11 \\ 1 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 8 \end{vmatrix} = \\ = -[9 \cdot 1 \cdot 8 + 1 \cdot 5 \cdot 11 + 8 \cdot 6 \cdot 2 - (11 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \cdot 9 + 8 \cdot 6 \cdot 1)] = 3.$$

Príklad 4.9. *Riešme v $\mathbb{R}$ rovnicu*
$$\begin{vmatrix} x^2 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ x & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Riešenie

Na výpočet determinantu použijeme Sarussovo pravidlo.

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ x & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6x^2 + 0 + 4x - (-8x - 2x^2 + 0) = 8x^2 + 12x.$$

Neznámu x vypočítame riešením kvadratickej rovnice

$$8x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow 4x(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Úlohy

4.10. Vypočítajte.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a & a-4 \\ -2 & a-2 \end{vmatrix}$$

4.11. Vypočítajte determinant matice D , ak

$$\text{a) } D = A + 3B, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } D = \frac{1}{2}A - B + \frac{2}{3}C, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } D = A \cdot B - B \cdot A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } D = A^2 + B, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

4.12. Riešte v množine $\mathbb{R}$ nerovnice.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2x-3 & x+4 \\ x-7 & x \end{vmatrix} < 29 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x+2 & x-1 \\ x+4 & 3-x \end{vmatrix} \geq 10 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} x+1 & x-5 \\ x+3 & 2x-1 \end{vmatrix} > 24$$

4.13. Vypočítajte determinanty.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

4.14. Vypočítajte determinant matice C , ak

$$\text{a) } C = 2A - 3B, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ -9 & 8 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } C = A \cdot B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = A^2 - B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -10 & -9 \\ 5 & 6 & -3 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } C = B \cdot A + A, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.15. Riešte v množine $\mathbb{R}$ rovnice.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -6 & x^2 \\ -1 & 2 & x \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 10 & 0 \\ x & x^2 & 3 \\ -1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} x^2 & -6 & -32 \\ 2 & 1 & 3 \\ x & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

4.16. Vypočítajte determinanty.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{d)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 6 \\ 5 & -2 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} & \text{e)} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 9 & 12 & -7 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Výsledky

4.10. a) 5 b) -21 c) $a^2 - 8$

4.11. a) $|D| = -27$ b) $|D| = -25$ c) $|D| = -1$ d) $|D| = 0$

4.12. a) $(-1, 1)$ b) $\langle -1, 0 \rangle$ c) $(-\infty, -5) \cup (2, \infty)$

4.13. a) -1 b) 40 c) 39 d) -26

4.14. a) $|C| = -7$ b) $|C| = 0$ c) $|C| = -1$ d) $|C| = 1056$

4.15. a) $x_1 = -4, x_2 = 4$ b) $x_1 = 2, x_2 = 3$ c) $x_1 = -4, x_2 = -3$

4.16. a) -36 b) 28 c) -54 d) 66 e) 194 f) 10

4.6 Riešenie sústav lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla

Nech je daná sústava n lineárnych rovníc s n neznámymi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Označme $D = |A|$. Nech D_i je determinant matice, ktorá vznikne z matice A nahradením jej i -teho stĺpca stĺpcom pravých strán, teda

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Ak sa determinant D matice sústavy (2) nerovná nule, tak sústava (2) má jediné riešenie a to usporiadanú n -tícu

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \dots, \frac{D_n}{D} \right).$$

Príklad 4.10. Riešme pomocou Cramerovho pravidla sústavu lineárnych rovníc

$$2x + 5y = 1,$$

$$3x + 4y = 5.$$

Riešenie

Vypočítame determinant matice sústavy

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = 8 - 15 = -7 \neq 0.$$

Determinant D matice sústavy je rôzny od nuly a podľa Cramerovho pravidla má sústava lineárnych rovníc jediné riešenie. Vypočítame D_1 , D_2 , kde D_i , $i = 1, 2$ je determinant matice, ktorá vznikne z matice A nahradením jej i -teho stĺpca stĺpcom pravých strán. Platí

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 5 = 4 - 25 = -21,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 10 - 3 = 7.$$

Potom

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-21}{-7} = 3, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{7}{-7} = -1.$$

Riešením sústavy je usporiadaná dvojica $(x, y) = (3, -1)$.

Príklad 4.11. *Riešme pomocou Cramerovho pravidla sústavu lineárnych rovníc*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4, \\ -3x_2 + 4x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Riešenie

Vypočítame determinant matice sústavy

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 0 + 0 - (0 - 18 + 8) = -12 + 10 = -2 \neq 0.$$

Keďže $D \neq 0$, sústava lineárnych rovníc má jediné riešenie. Vypočítame D_1 , D_2 , D_3 . Platí

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 7 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -20 + 0 + 28 - (0 - 30 + 32) = 8 - 2 = 6,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 48 + 0 + 0 - (0 + 42 + 20) = 48 - 62 = -14,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -21 - 15 + 0 - (0 - 36 + 14) = -36 + 22 = -14.$$

Potom

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{6}{-2} = -3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-2} = 7, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-14}{-2} = 7.$$

Riešením sústavy je usporiadaná trojica $(x_1, x_2, x_3) = (-3, 7, 7)$.

Úlohy

4.17. Riešte sústavy lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla.

- | | | |
|--|--|---|
| a) $3x - 4y = 7,$
$2x - 3y = 6,$ | b) $5x + 6y = -2,$
$3x + 4y = 4,$ | c) $6x_1 + 4x_2 = 3,$
$7x_1 + 5x_2 = 2,$ |
| d) $5x_1 + 6x_2 = 2,$
$x_1 + 3x_2 = 4,$ | e) $3x_1 - 5x_2 = 7,$
$5x_1 - 9x_2 = 11,$ | f) $3x_1 - x_2 = \frac{3}{2},$
$-2x_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{4},$ |
| g) $x - y + z = 2,$
$2x - y + z = 5,$
$x - 2y + z = 7,$ | h) $x - y - 2z = -1,$
$2x + 3y + z = -2,$
$5x + 4y + 2z = 4,$ | i) $2x_1 - x_2 + x_3 = 1,$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2,$ |
| j) $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0,$
$5x_1 + x_2 + 6x_3 = -2,$
$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,$ | k) $5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2,$
$-5x_1 + 3x_2 + x_3 = 2,$
$-3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0,$ | l) $2x_1 + x_3 = 5,$
$x_1 + 3x_2 = 16,$
$x_2 - 5x_3 = -10,$ |
| m) $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8,$
$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8,$
$4x_1 + x_2 - 6x_3 = 21,$ | n) $5x_1 - x_2 + 5x_3 = \frac{19}{2},$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = \frac{1}{2},$
$3x_1 - x_2 + x_3 = \frac{11}{2},$ | o) $5x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0,$
$x_1 + x_2 + 4x_3 = -\frac{3}{2},$
$-5x_1 + 4x_2 + x_3 = -\frac{15}{4}.$ |

Výsledky

- 4.17. a) $D = -1, D_1 = 3, D_2 = 4, (x, y) = (-3, -4)$
b) $D = 2, D_1 = -32, D_2 = 26, (x, y) = (-16, 13)$
c) $D = 2, D_1 = 7, D_2 = -9, (x_1, x_2) = (\frac{7}{2}, -\frac{9}{2})$
d) $D = 9, D_1 = -18, D_2 = 18, (x_1, x_2) = (-2, 2)$
e) $D = -2, D_1 = -8, D_2 = -2, (x_1, x_2) = (4, 1)$
f) $D = -\frac{5}{4}, D_1 = \frac{5}{8}, D_2 = \frac{15}{4}, (x_1, x_2) = (-\frac{1}{2}, -3)$
g) $D = -1, D_1 = -3, D_2 = 5, D_3 = 6, (x, y, z) = (3, -5, -6)$
h) $D = 15, D_1 = 30, D_2 = -45, D_3 = 45, (x, y, z) = (2, -3, 3)$
i) $D = 18, D_1 = 12, D_2 = 12, D_3 = 6, (x_1, x_2, x_3) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
j) $D = 22, D_1 = 22, D_2 = -22, D_3 = -22, (x_1, x_2, x_3) = (1, -1, -1)$
k) $D = -4, D_1 = 56, D_2 = 92, D_3 = -4, (x_1, x_2, x_3) = (-14, -23, 1)$
l) $D = -29, D_1 = -29, D_2 = -145, D_3 = -87, (x_1, x_2, x_3) = (1, 5, 3)$
m) $D = 121, D_1 = 484, D_2 = -121, D_3 = -121, (x_1, x_2, x_3) = (4, -1, -1)$
n) $D = -14, D_1 = -18, D_2 = 18, D_3 = -5, (x_1, x_2, x_3) = (\frac{9}{7}, -\frac{9}{7}, \frac{5}{14})$
o) $D = 45, D_1 = 45, D_2 = \frac{45}{2}, D_3 = -\frac{135}{4}, (x_1, x_2, x_3) = (1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

4.7 Inverzná matica

Štvorcová matica $A = (a_{ij})_{n,n}$ sa nazýva *regulárna*, ak $|A| \neq 0$. Matica A sa nazýva *singulárna*, ak $|A| = 0$.

Nech $A = (a_{ij})_{n,n}$ je regulárna matica. *Inverznou maticou* k matici A rozumieme štvorcovú maticu A^{-1} , pre ktorú platí

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$

kde E je jednotková matica stupňa n .

Uvedieme dva spôsoby výpočtu inverznej matice:

- pomocou adjungovanej matice,
- Gaussovou metódou.

a) Výpočet inverznej matice pomocou adjungovanej matice

Adjungovanou maticou k matici $\mathbf{A}$ nazývame maticu

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

kde A_{ij} sú algebraické doplnky k prvkom a_{ij} matice $\mathbf{A}$.

Ku každej regulárnej matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n,n}$ existuje inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$ a platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

b) Výpočet inverznej matice pomocou Gaussovej metódy

Metóda spočíva v tom, že

- zapíšeme rozšírenú maticu, ktorá obsahuje maticu $\mathbf{A}$ a jednotkovú maticu $\mathbf{E}$,
- elementárnymi riadkovými úpravami upravujeme rozšírenú maticu dovtedy, kým na mieste matice $\mathbf{A}$ nedostaneme jednotkovú maticu $\mathbf{E}$,
- daným postupom na mieste jednotkovej matice dostaneme inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$.

Zápis:

$$\left(\mathbf{A} \mid \mathbf{E} \right) \longrightarrow \left(\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1} \right).$$

Príklad 4.12. Vypočítajme inverznú maticu k matici $\mathbf{A}$, ak

$$a) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad b) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riešenie

a) Determinant matice $\mathbf{A}$ je

$$|\mathbf{A}| = 4 \cdot (-3) - (-7) \cdot 2 = -12 + 14 = 2 \neq 0,$$

takže matica $\mathbf{A}$ je regulárna a existuje k nej inverzná matica.

K prvkom a_{ij} vypočítame algebraické doplnky $A_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{S}_{ij}|$, kde $\mathbf{S}_{ij}$ je submatica, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynechaním i -teho riadku a j -teho stĺpca.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |\mathbf{S}_{11}| = (-1)^2 \cdot (-3) = -3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} |\mathbf{S}_{21}| = (-1)^3 \cdot (-7) = 7,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |\mathbf{S}_{12}| = (-1)^3 \cdot 2 = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} |\mathbf{S}_{22}| = (-1)^4 \cdot 4 = 4.$$

Inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$ je

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Matica $\mathbf{A}$ je regulárna, pretože

$$|\mathbf{A}| = 3 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \cdot 1 - [1 \cdot 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 1] = -1 \neq 0.$$

Existuje k nej inverzná matice.

Najprv ukážeme výpočet inverznej matice pomocou adjungovanej matice. Vypočítame preto hodnoty algebraických doplnkov A_{ij} k prvkom a_{ij} .

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, & A_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, & A_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3, & A_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3, & A_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \\ A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 11, & A_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -12, & A_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7. \end{aligned}$$

Potom

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 11 & -12 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -11 & 12 & -7 \end{pmatrix}.$$

Teraz ukážeme postup výpočtu inverznej matice k matici $\mathbf{A}$ Gaussovou metódou. Zapišeme maticu, ktorá obsahuje maticu $\mathbf{A}$ a jednotkovú maticu $\mathbf{E}$ a elementárnymi riadkovými úpravami upravujeme maticu dovtedy, kým na mieste matice $\mathbf{A}$ nedostaneme jednotkovú maticu.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightleftharpoons \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} / -3R_1 \\ / +R_2 \end{array} \sim \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} / \cdot 4 \\ / \cdot 7 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -28 & -8 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 28 & 7 & 7 & 0 & 7 \end{array} \right) / +R_2 \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -28 & -8 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 11 & -12 & 7 \end{array} \right) / :4 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 11 & -12 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} / +R_3 \\ / -2R_3 \end{array} \sim \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 11 & -11 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & -21 & 21 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & 11 & -12 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} / :(-7) \\ / \cdot (-1) \end{array} \sim \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 11 & -11 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 12 & -7 \end{array} \right) / -3R_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 12 & -7 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Inverzná matica je

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -11 & 12 & -7 \end{pmatrix}.$$

Správnosť výsledku môžeme overiť skúškou. Musí platiť $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. Teda

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -11 & 12 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Príklad 4.13. Riešme rovnicu s neznámou maticou $\mathbf{X}$, ak

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Riešenie

Máme riešiť rovnicu tvaru $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Za predpokladu, že matica $\mathbf{A}$ je regulárna, vynásobíme rovnicu inverznou maticou $\mathbf{A}^{-1}$ sprava. Dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{B} & / \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ (\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{X} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}. \end{aligned}$$

Riešenie $\mathbf{X}$ rovnice $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ teda dostaneme tak, že maticu $\mathbf{B}$ násobíme sprava inverznou maticou $\mathbf{A}^{-1}$.

Daná matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ je regulárna, pretože

$$|\mathbf{A}| = 2 \cdot (-3) - 5 \cdot (-1) = -1 \neq 0.$$

Existuje k nej inverzná matica. Algebraické doplnky A_{ij} k prvkom a_{ij} sú:

$$A_{11} = -3, \quad A_{12} = 1, \quad A_{21} = -5, \quad A_{22} = 2.$$

Potom pre inverznú maticu platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Maticu $\mathbf{B}$ násobíme sprava inverznou maticou $\mathbf{A}^{-1}$. Dostaneme

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 11 & 20 \end{pmatrix}.$$

Maticové rovnice tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

riešime analogicky. Za predpokladu, že matica $\mathbf{A}$ je regulárna, vynásobíme rovnicu inverznou maticou $\mathbf{A}^{-1}$ tentokrát zľava. Získame

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \cdot / \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{B} \\ \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Príklad 4.14. Riešme rovnicu s neznámou maticou $\mathbf{X}$, ak

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -16 & -10 \end{pmatrix}.$$

Riešenie

Máme riešiť rovnicu tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$. Za predpokladu, že matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sú regulárne, vynásobíme rovnicu

inverznou maticou $\mathbf{A}^{-1}$ zľava a inverznou maticou $\mathbf{B}^{-1}$ sprava. Dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \cdot / \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{C} & / \cdot \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{-1} \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot \mathbf{X} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}) &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{-1}. \end{aligned}$$

Riešenie $\mathbf{X}$ rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$ teda dostaneme, ak vypočítame súčin matic $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{-1}$.

Matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ je regulárna, pretože $|\mathbf{A}| = -1 \neq 0$. Existuje k nej inverzná matica

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matica $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ je tiež regulárna, pretože $|\mathbf{B}| = 1 \neq 0$. Inverzná matica k matici $\mathbf{B}$ je

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajme súčin matic $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{-1}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -16 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Riešením rovnice je matica $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Úlohy

4.18. Nájdite inverznú maticu k matici $\mathbf{A}$, ak

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 6 & -10 \end{pmatrix}.$

4.19. Riešte rovnice s neznámou maticou $\mathbf{X}$.

a) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{f)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Výsledky

$$4.18. \text{ a) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{g) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 & -10 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 13 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{h) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.19. \text{ a) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 & -11 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

Literatúra

- [1] Bača, M., Feňovčíková, A.: *Mathematics 1*, C-PRESS, Košice, 2010.
- [2] Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 1. časť*, Alfa, Bratislava 1995.
- [3] Eliáš, J., Horváth, J., Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 2. časť*, Alfa, Bratislava 1995.
- [4] Knežo, D., Andrejiová, M., Kimáková, Z.: *Matematika 1, Časť A: Funkcia jednej premennej a jej diferenciálny počet*, Technická univerzita, Košice, 2010.
- [5] Knežo, D., Andrejiová, M., Kimáková, Z.: *Matematika 1, Časť B: Neurčitý integrál, algebra, analytická geometria*, Technická univerzita, Košice, 2010.
- [6] Šoltés, V., Juhásová, Z.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky I*, Olympia, Košice 1992.