TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH

STROJNÍCKA FAKULTA

Zbierka riešených a neriešených príkladov z Matematiky 3

Miriam Andrejiová, Martin Bača, Andrea Feňovčíková,

Anton Hovana, Gabriela Ižaríková, Zuzana Kimáková, Marcela Lascsáková

2021

RECENZOVALI: prof. RNDr. Jozef Džurina, CSc.
RNDr. Anna Grinčová, PhD.

Predhovor

Zbierka riešených a neriešených úloh je určená predovšetkým pre poslucháčov druhého ročníka bakalárskeho štúdia Strojníckej fakulty Technickej univerzity v Košiciach. Zbierka by mala slúžiť nielen ako učebná pomôcka na cvičeniach z predmetu Matematika III, ale aj pre samostatnú prípravu študentov. Rovnako dobre však môže poslúžit aj iným čitateľom, ktorí sa zaujímajú o danú problematiku.

Učebný text je rozdelený do šiestich kapitol: dvojný integrál, trojný integrál, krivkový integrál, číselné rady, funkcionálne rady a Fourierove rady. Každá kapitola obsahuje podstatné teoretické poznatky potrebné k riešeniu úloh. V učebnom texte sa nachádza množstvo riešených a neriešených príkladov, pričom práve v riešených príkladoch sú vysvetlené základné postupy riešenia typických a štandardných úloh. Obsah zbierky je postačujúcim základom pre štúdium a úspešné absolvovanie predmetu Matematika III.

Obom recenzentom prof. RNDr. Jozefovi Džurinovi, CSc. a RNDr. Anne Grinčovej, PhD. ďakujeme za dôsledné posúdenie tejto učebnej pomôcky. Ich cenné pripomienky, rady a odporúčania prispeli k zvýšeniu kvality tejto publikácie.

Košice, december 2021 Autori

Obsah

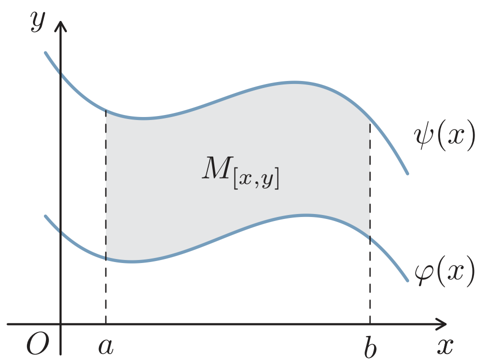
Kapitola 1

Dvojný integrál

1.1 Výpočet dvojného integrálu

Elementárnou oblasťou typu $M_{[x,y]}$ rozumieme uzavretú oblasť ohraničenú krivkami $x = a$, $x = b$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, kde $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sú spojité funkcie na intervale $\langle a, b\rangle$ a pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí, že $\varphi(x) \le \psi(x)$, pozri Obr. 1.1. Teda

$$M_{[x,y]} = \big\{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\big\}.$$



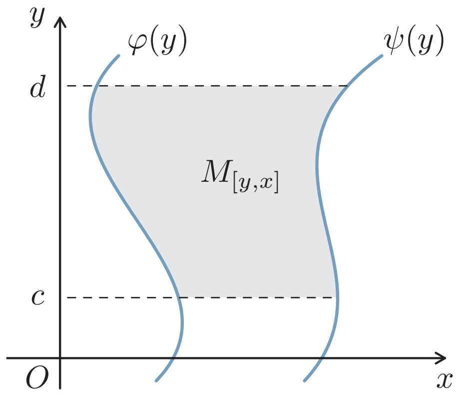
Obr. 1.1: Elementárna oblasť typu $M_{[x,y]}$.

Elementárnou oblasťou typu $M_{[y,x]}$ rozumieme uzavretú oblasť ohraničenú krivkami $y = c$, $y = d$, $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, kde $\varphi(y)$, $\psi(y)$ sú spojité funkcie na intervale $\langle c, d\rangle$ a pre každé $y \in \langle c, d\rangle$ platí, že $\varphi(y) \le \psi(y)$, pozri Obr. 1.2. Teda

$$M_{[y,x]} = \big\{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : c \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\big\}.$$

Z definície elementárnych oblastí vyplýva, že každá rovnobežka s osou y, resp. s osou x pretne hranicu oblasti $M_{[x,y]}$, resp. $M_{[y,x]}$ najviac v dvoch bodoch. Špeciálnym prípadom elementárnych oblastí typu $M_{[x,y]}$ a $M_{[y,x]}$ je obdĺžniková oblasť

$$I = \big\{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\big\} = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle.$$



Obr. 1.2: Elementárna oblasť typu $M_{[y,x]}$.

Nech je funkcia $f(x, y)$ spojitá na dvojrozmernom intervale $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Potom

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Ak sa dá navyše funkcia $f(x, y)$ zapísať v tvare $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, tak platí

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Nech je funkcia $f(x, y)$ spojitá na elementárnej oblasti M typu $M_{[x,y]}$. Potom platí

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

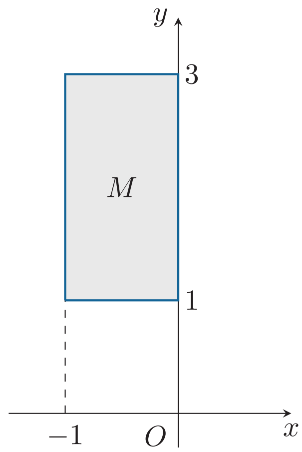
Nech je funkcia $f(x, y)$ spojitá na elementárnej oblasti M typu $M_{[y,x]}$. Potom platí

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Príklad 1.1 Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint_I \left(x^2 + 2xy - \frac{27}{y^4}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

ak $I = \langle -1, 0\rangle \times \langle 1, 3\rangle$.



Obr. 1.3: Interval $I = \langle -1, 0\rangle \times \langle 1, 3\rangle$.

Riešenie. Na Obr. 1.3 je znázornený interval $I = \langle -1, 0\rangle \times \langle 1, 3\rangle$.

Keďže počítame dvojný integrál na dvojrozmernom intervale, na poradí integrovania nezáleží. Ak najskôr vypočítame určitý integrál $\int\limits_1^3 \left(x^2 + 2xy - \frac{27}{y^4}\right) \mathrm{d}y$, pričom x považujeme za konštantu, dostaneme

$$\int\limits_{-1}^{0} \left[\int\limits_1^3 \left(x^2 + 2xy - \frac{27}{y^4}\right) \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \left[x^2y + xy^2 - 27\frac{y^{-3}}{-3}\right]_1^3 \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \left[x^2y + xy^2 + \frac{9}{y^3}\right]_1^3 \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} \left[\left(3x^2 + 9x + \frac{1}{3}\right) - \left(x^2 + x + 9\right)\right] \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \left(2x^2 + 8x - \frac{26}{3}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - \frac{26}{3}x\right]_{-1}^{0} = (0 + 0 - 0) - \left(-\frac{2}{3} + 4 + \frac{26}{3}\right) = -12.$$

Rovnaký výsledok dostaneme, ak začneme výpočtom určitého integrálu $\int\limits_{-1}^{0} \left(x^2 + 2xy - \frac{27}{y^4}\right) \mathrm{d}x$, pričom y považujeme za konštantu. Platí

$$\int\limits_1^3 \left[\int\limits_{-1}^{0} \left(x^2 + 2xy - \frac{27}{y^4}\right) \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left[\frac{x^3}{3} + x^2y - \frac{27x}{y^4}\right]_{-1}^{0} \mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left[(0 + 0 - 0) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{-1}{3} + y + \frac{27}{y^4}\right)\right] \mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left(\frac{1}{3} - y - 27y^{-4}\right) \mathrm{d}y = \left[\frac{1}{3}y - \frac{y^2}{2} - 27\frac{y^{-3}}{-3}\right]_1^3 =$$

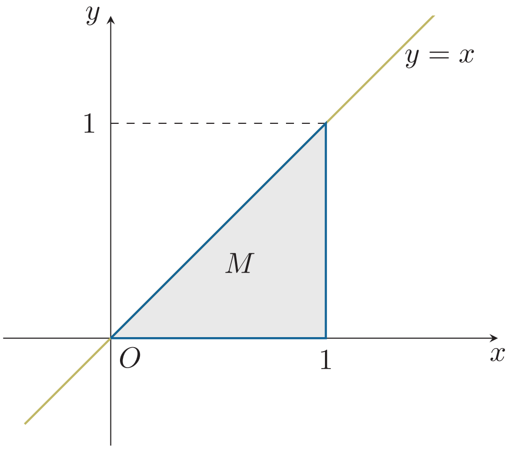
$$= \left[\frac{y}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{9}{y^3}\right]_1^3 = 1 - \frac{9}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 9\right) = -12.$$

Príklad 1.2 Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint\limits_M (2-x)\, e^y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

ak oblasť M je určená nerovnosťami $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$.

Riešenie. Daná oblasť M je znázornená na Obr. 1.4.



Obr. 1.4: Oblasť M určená nerovnosťami $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$.

Rovinná oblasť M je popísaná systémom nerovníc ako oblasť typu $M_{[x,y]}$. Preto najskôr integrujeme podľa premennej y, pričom x považujeme za konštantu. Dostaneme

$$\iint\limits_M (2-x)\, e^y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_0^x (2-x)\, e^y \,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 (2-x)\,[e^y]_0^x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (2-x)\,(e^x-1)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \text{per partes:} & \\ f(x) = 2-x & g'(x) = e^x - 1 \\ f'(x) = -1 & g(x) = e^x - x \end{array} \right| = \left[(2-x)\,(e^x-x)\right]_0^1 - \int_0^1 (-1)\,(e^x-x)\,\mathrm{d}x =$$

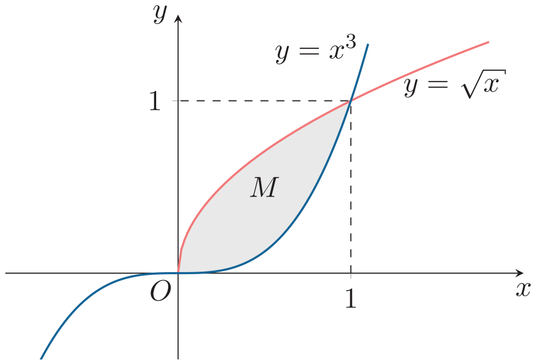
$$= e - 1 - 2 + \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e - 3 + e - \frac{1}{2} - 1 = 2e - \frac{9}{2}.$$

Príklad 1.3 Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint\limits_M 36x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

ak oblasť M je ohraničená grafmi funkcií $y = x^3$ a $y = \sqrt{x}$.

Riešenie. Oblasť M znázornená na Obr. 1.5 je elementárnou oblasťou typu $M_{[x,y]}$ aj typu $M_{[y,x]}$.



Obr. 1.5: Oblasť M ohraničená grafmi funkcií $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

Vypočítame priesečníky grafov daných funkcií. Riešime sústavu rovníc

$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ y &= \sqrt{x}, \end{aligned}$$

z ktorej po úprave dostaneme rovnicu

$$x^3 = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^6 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(x^5 - 1\right) = 0.$$

Riešením tejto rovnice je $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Oblasť M popíšeme napríklad ako oblasť typu $M_{[x,y]}$ sústavou nerovníc

$$\begin{aligned} 0 \leq x &\leq 1 \\ x^3 \leq y &\leq \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Potom dvojný integrál vypočítame nasledovne

$$\iint\limits_M 36x^2y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}} 36x^2 y \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 36x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^3}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 18x^2 \left(x - x^6\right) \mathrm{d}x =$$

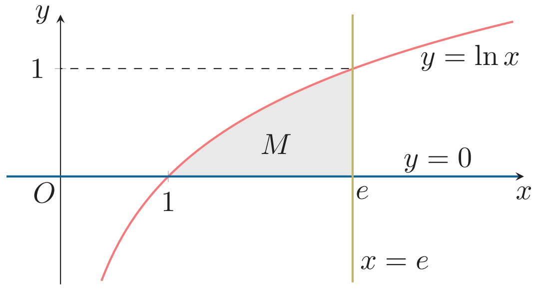
$$= 18 \int\limits_0^1 \left(x^3 - x^8\right) \mathrm{d}x = 18 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^9}{9} \right]_0^1 = 18 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = \frac{5}{2}.$$

Rovnaký výsledok dostaneme, ak oblasť popíšeme ako elementárnu oblasť typu $M_{[y,x]}$ a dvojný integrál prepíšeme na dvojnásobný tak, že najprv integrujeme podľa premennej x.

Príklad 1.4 Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint\limits_M x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

ak oblasť M je ohraničená grafom funkcie $y = \ln x$ a priamkami $y = 0$, $x = e$.



Obr. 1.6: Oblasť M ohraničená grafom funkcie $y = \ln x$ a priamkami $y = 0$, $x = e$.

Riešenie. Daná oblasť M je znázornená na Obr. 1.6. Z obrázka je zrejmé, že oblasť M je elementárnou oblasťou typu $M_{[x,y]}$ a zároveň aj elementárnou oblasťou typu $M_{[y,x]}$. Môžeme ju teda popísať dvojakým spôsobom, a to sústavou nerovníc

$$\begin{aligned} 1 \leq x \leq e \\ 0 \leq y \leq \ln x \end{aligned}$$

alebo sústavou nerovníc

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 1 \\ e^y \leq x \leq e. \end{aligned}$$

Pre výpočet daného dvojného integrálu využijeme teraz popis oblasti typu $M_{[y,x]}$. Výpočet integrálu je totiž jednoduchší. V prípade, že by sme využili popis oblasti typu $M_{[x,y]}$, bolo by potrebné počítať metódou per partes integrál $\int x^2 \ln x \, dx$.

Dvojný integrál prepíšeme na dvojnásobný tak, že najprv integrujeme podľa premennej x. Platí

$$\iint_M x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\int_{e^y}^{e} x^2 \, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{e^y}^{e} \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^{3y}}{3} \right) \mathrm{d}y = \frac{1}{3} \left[e^3 y - \frac{e^{3y}}{3} \right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{3} \left(e^3 - \frac{e^3}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{9} \left(2e^3 + 1 \right).$$

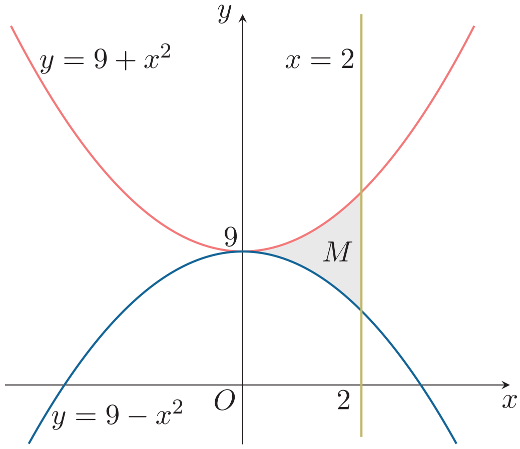
Príklad 1.5 Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint_M (2y - x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

ak oblasť M je ohraničená krivkami $y = 9 - x^2$, $y = 9 + x^2$ a priamkou $x = 2$.

Riešenie. Oblasť M je znázornená na Obr. 1.7. Je elementárnou oblasťou typu $M_{[x,y]}$. Preto ju popíšeme sústavou nerovníc

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 \\ 9 - x^2 \leq y \leq 9 + x^2. \end{aligned}$$



Obr. 1.7: Oblasť M ohraničená krivkami $y = 9 - x^2$, $y = 9 + x^2$ a priamkou $x = 2$.

Dvojný integrál prepíšeme na dvojnásobný tak, že najprv integrujeme podľa premennej y. Platí

$$\iint\limits_M (2y - x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_{9-x^2}^{9+x^2} (2y - x)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left[y^2 - xy\right]_{9-x^2}^{9+x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^2 \left\{\left[\left(9 + x^2\right)^2 - x\left(9 + x^2\right)\right] - \left[\left(9 - x^2\right)^2 - x\left(9 - x^2\right)\right]\right\}\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^2 \left[\left(81 + 18x^2 + x^4 - 9x - x^3\right) - \left(81 - 18x^2 + x^4 - 9x + x^3\right)\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(-2x^3 + 36x^2\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^4}{2} + 12x^3\right]_0^2 = -8 + 96 = 88.$$

Príklad 1.6 Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint\limits_M \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

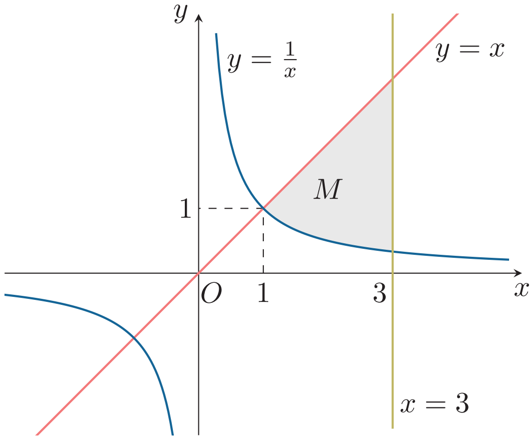
ak oblasť M je ohraničená krivkami $y = x$, $xy = 1$, $x = 3$.

Riešenie. Oblasť M znázornená na Obr. 1.8 je elementárna oblasť typu $M_{[x,y]}$. Vypočítame priesečníky grafov funkcií $y = x$ a $y = \frac{1}{x}$. Riešime rovnicu

$$x = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Oblasť M môžeme popísať sústavou nerovníc

$$\begin{gathered} 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{x} \leq y \leq x. \end{gathered}$$



Obr. 1.8: Oblasť M ohraničená krivkami $y = x$, $xy = 1$, $x = 3$.

Dvojný integrál prepíšeme na dvojnásobný tak, že najprv integrujeme podľa premennej y. Dostaneme

$$\iint\limits_M \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_1^3 \left[\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 x\left[\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} y^{-2}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 x\left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_1^3 x\left(-\frac{1}{x} + x\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 (-1 + x^2)\,\mathrm{d}x = \left[-x + \frac{x^3}{3}\right]_1^3 = -3 + 9 - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 7 - \frac{1}{3} = \frac{20}{3}.$$

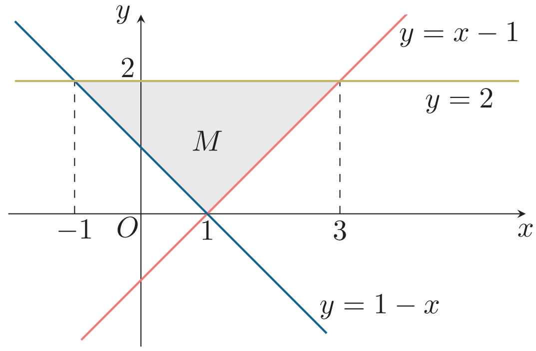
Príklad 1.7 Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint\limits_M \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

ak oblasť M je ohraničená priamkami $x - y - 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $y = 2$.

Riešenie. Z Obr. 1.9, na ktorom je znázornená oblasť M je zrejmé, že daná oblasť je elementárnou oblasťou typu $M_{[y,x]}$. Oblasť M popíšeme sústavou nerovníc

$$\begin{gathered} 0 \leq y \leq 2 \\ 1 - y \leq x \leq 1 + y. \end{gathered}$$



Obr. 1.9: Oblasť M ohraničená priamkami $x - y - 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $y = 2$.

Dvojný integrál prepíšeme na dvojnásobný tak, že najprv integrujeme podľa premennej x. Dostaneme

$$\iint_M \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\int_{1-y}^{1+y} \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{1}{y^2+1}\,[x]_{1-y}^{1+y}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{y^2+1}\,[1+y-(1-y)]\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{2y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \left[\ln\left|y^2+1\right|\right]_0^2 = (\ln 5 - \ln 1) = \ln 5.$$

Integrál $\int \frac{2y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y$ sme vypočítali použitím vzorca $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$.

Príklad 1.8 Vypočítajme dvojný integrál

$$\iint_M e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

ak oblasť M je ohraničená priamkami $y = 2x$, $y = 4$, $x = 0$.

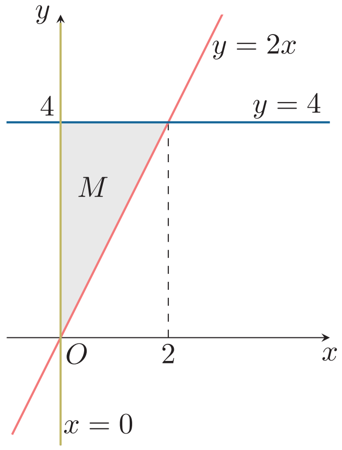
Riešenie. Oblasť M je znázornená na Obr. 1.10. Je elementárnou oblasťou typu $M_{[x,y]}$ aj typu $M_{[y,x]}$. Priesečníkom priamok $y = 4$ a $y = 2x$ je bod $[2,4]$. Oblasť M môžeme popísať dvojakým spôsobom, a to sústavou nerovníc

$$0 \le x \le 2$$
$$2x \le y \le 4$$

alebo sústavou nerovníc

$$0 \le y \le 4$$
$$0 \le x \le \frac{y}{2}.$$

Ak využijeme popis oblasti $M_{[x,y]}$, je potrebné integrovať najprv podľa premennej y. To znamená, že je treba vypočítať integrál $\int e^{-y^2}\mathrm{d}y$, a to priamymi metódami nie je možné. Z tohto



Obr. 1.10: Oblasť M ohraničená priamkami $y = 2x$, $y = 4$, $x = 0$.

dôvodu je potrebné využiť popis oblasti typu $M_{[y,x]}$ a integrovať najprv podľa premennej x. Dostaneme

$$\iint\limits_M e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^4 \left[\int\limits_0^{\frac{y}{2}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int\limits_0^4 e^{-y^2}\,[x]_0^{\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^4 e^{-y^2}\cdot\frac{y}{2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{substitúcia:} \\ \quad -y^2 = t \\ -2y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}t \\ \quad y\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ \quad y_D = 0 \quad \ldots \quad t_D = 0 \\ \quad y_H = 4 \quad \ldots \quad t_H = -16 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\limits_0^{-16} e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[e^t\right]_{-16}^0 = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-16}\right).$$

Úlohy

V nasledujúcich úlohách zistite o aký typ elementárnej oblasti sa jedná a popíšte ju, ak je oblasť ohraničená zadanými krivkami.

1.1 $x + y - 2 = 0,\ 2y - x = 0,\ x = 0.$

1.2 $x + y + 3 = 0,\ y = 3x - 3,\ y = 1.$

1.3 $xy = 2,\ 2x + y - 5 = 0.$

1.4 $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ y = 3.$

1.5 $y = e^{2x},\ y = e^{-x},\ x = 1.$

1.6 $y = -x^2 + 2x + 3,\ y = 8x - 4.$

1.7 $y = 2x^2 + 5$, $y = x^2 + 6x$.

1.8 $y = 2 + x$, $y = x^2$, $y = 0$.

1.9 $y = x^2 + 3x$, $y = x^2 + x - 2$, $y = 3x + 6$.

1.10 $y = x^2 + 9$, $y = 2x^2 - 7$, $8x - y - 7 = 0$.

V nasledujúcich úlohách vypočítajte dvojné integrály na danom intervale.

1.11 $\displaystyle\iint_I \left(x^3 + 2y\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, $I = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle$.

1.12 $\displaystyle\iint_I \left(3x - 4xy^3 - 1\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, $I = \langle 2, 4\rangle \times \langle -1, 2\rangle$.

1.13 $\displaystyle\iint_I \frac{y}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, $I = \langle 1, 4\rangle \times \langle -2, 5\rangle$.

1.14 $\displaystyle\iint_I \frac{3x}{(5+x)y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, $I = \langle -4, 0\rangle \times \langle 1, e\rangle$.

1.15 $\displaystyle\iint_I \frac{2x-5}{y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, $I = \langle 3, 4\rangle \times \langle 1, 2\rangle$.

1.16 $\displaystyle\iint_I \frac{1}{5(2x-3y)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle -2, -1\rangle$.

1.17 $\displaystyle\iint_I 3e^{3x+y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, $I = \left\langle 0, \tfrac{1}{3}\right\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.

1.18 $\displaystyle\iint_I \cos(x + 3y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, $I = \left\langle 0, \tfrac{\pi}{2}\right\rangle \times \left\langle 0, \tfrac{\pi}{3}\right\rangle$.

1.19 $\displaystyle\iint_I \left(x^2 y + 1\right) \ln x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, $I = \langle 1, e\rangle \times \langle -1, 1\rangle$.

1.20 $\displaystyle\iint_I \frac{y}{(xy+3)^3}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, $I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$.

V nasledujúcich úlohách vypočítajte dvojné integrály na danej oblasti.

1.21 $\displaystyle\iint_M \frac{3y}{x^3+2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, ak oblasť M je určená nerovnosťami $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$.

1.22 $\displaystyle\iint_M xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, ak oblasť M je určená nerovnosťami $0 \le x \le 1$, $-x \le y \le 4x - x^2$.

1.23 $\displaystyle\iint\limits_M \frac{1}{3+e^{5x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je určená nerovnosťami $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le e^{5x}$.

1.24 $\displaystyle\iint\limits_M \frac{2}{x^5\sqrt{x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je určená nerovnosťami $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le \frac{x}{2}$.

1.25 $\displaystyle\iint\limits_M \frac{1}{\cos^2 y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je určená nerovnosťami $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le x$.

1.26 $\displaystyle\iint\limits_M \frac{1}{xy^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je určená nerovnosťami $e \le x \le e^2$, $1 \le y \le \ln x$.

1.27 $\displaystyle\iint\limits_M e^y\,(7-4x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je určená nerovnosťami $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 3x$.

1.28 $\displaystyle\iint\limits_M x^2\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je určená nerovnosťami $0 \le y \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le x \le \sin y$.

1.29 $\displaystyle\iint\limits_M \sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je určená nerovnosťami $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y$.

1.30 $\displaystyle\iint\limits_M e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je určená nerovnosťami $1 \le y \le 2$, $0 \le x \le y^2$.

1.31 $\displaystyle\iint\limits_M (2xy-3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je obdĺžnik s vrcholmi $[-1,1]$, $[2,1]$, $[2,3]$, $[-1,3]$.

1.32 $\displaystyle\iint\limits_M \frac{1}{(x+4y+1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je obdĺžnik s vrcholmi $[1,1]$, $[3,1]$, $[3,2]$, $[1,2]$.

1.33 $\displaystyle\iint\limits_M \left(3x^2y-2x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je trojuholník s vrcholmi $[0,0]$, $[1,1]$, $[1,2]$.

1.34 $\displaystyle\iint\limits_M \cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je trojuholník s vrcholmi $[0,0]$, $[\pi,0]$, $[0,\pi]$.

1.35 $\displaystyle\iint\limits_M (2-y)\,x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je ohraničená krivkami $y=x^3$, $y=4x$ v I. kvadrante.

1.36 $\displaystyle\iint\limits_M \left(x^2y+3\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je ohraničená krivkami $y=\sqrt{x}$, $y=3\sqrt{x}$, $x=4$.

1.37 $\displaystyle\iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je ohraničená krivkami $xy=1$, $y=x$, $y=\frac{x}{4}$ v I. kvadrante.

1.38 $\displaystyle\iint\limits_M \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je ohraničená krivkami $2y = x^2$, $4x - 2y + 3 = 0$.

1.39 $\displaystyle\iint\limits_M x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je ohraničená grafmi funkcií $y = x^2 + 3x$, $y = 2x^2 - 10$.

1.40 $\displaystyle\iint\limits_M (2x-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je ohraničená grafmi funkcií $y = x^2 - 4x - 2$, $y = -x^2 + 4$.

1.41 $\displaystyle\iint\limits_M \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je ohraničená krivkami $y = x$, $y = \sqrt{3}\,x$, $x = 1$, $x = 2$.

1.42 $\displaystyle\iint\limits_M (4x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je ohraničená grafmi funkcií $y = x+1$, $y = 1-x$, $y = 0$.

1.43 $\displaystyle\iint\limits_M x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je ohraničená krivkami $y = \ln x$, $x - y = 1$, $y = -1$.

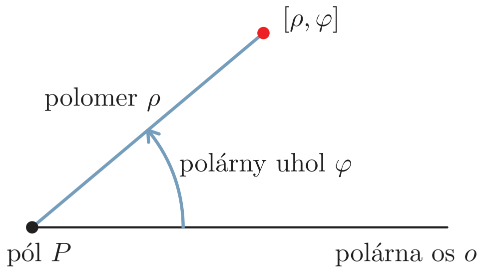
1.44 $\displaystyle\iint\limits_M xe^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je ohraničená krivkami $y = x$, $y = 0$, $x = 2$.

1.45 $\displaystyle\iint\limits_M 5\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, ak oblasť M je ohraničená krivkami $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $y = e$.

1.2 Transformácie dvojného integrálu

Na výpočet dvojných integrálov sa často používa substitúcia, ktorá je založená na transformácii súradníc, napríklad použitím polárnych súradníc namiesto pravouhlých súradníc.

Polárny súradnicový systém (P, ρ, φ) je dvojrozmerný súradnicový systém, v ktorom je každý bod roviny určený *vzdialenosťou* od pevne zvoleného bodu (*pólu* P) a *uhlom* vzhľadom na pevne zvolený smer (*polárnu os* o). Vzdialenosť ρ od pólu sa nazýva *polárna súradnica* alebo *polomer*, a uhol φ sa nazýva *uhlová súradnica* alebo *polárny uhol*, pozri Obr. 1.11.

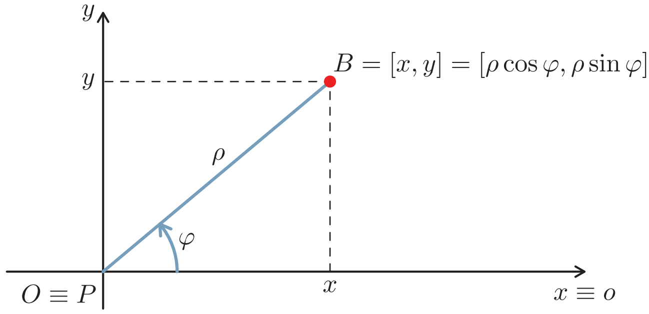


Obr. 1.11: Polárna súradnicová sústava.

Ak pravouhlá súradnicová sústava (O, x, y) a polárna súradnicová sústava (P, ρ, φ) v rovine sú navzájom pridružené, tak vzťah medzi pravouhlými súradnicami x, y a polárnymi súradnicami ρ, φ bodu B je daný rovnicami

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, pozri Obr. 1.12.



Obr. 1.12: Vzťah medzi pravouhlými súradnicami a polárnymi súradnicami.

Polárna transformácia. Zobrazenie $\phi : \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ definované rovnicami (1.1) nazývame *polárnou transformáciou priestoru* $\mathbb{E}_2$. Poznamenávame, že súradnicové sústavy (O, x, y) a (P, ρ, φ) sú navzájom pridružené, ak

1. $P \equiv O$, t. j. pól P je totožný s bodom $O = [0, 0]$,
2. polárna os o splýva s kladnou časťou osi x,
3. kladný zmysel otáčania v rovine je definovaný tak, že otočením osi x o uhol $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dostaneme os y.

Pre Jakobián zobrazenia ϕ definovaného rovnicami (1.1) platí

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right) = \\ = \rho. \tag{1.2}$$

Ak zobrazenie $\phi : M^* \to M$ je definované rovnicami (1.1), M^* je uzavretá merateľná oblasť a funkcia $f(x, y)$ je spojitá na oblasti $M = \phi(M^*)$, tak platí

$$\iint\limits_{M} f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint\limits_{M^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi. \tag{1.3}$$

Táto transformácia sa zvyčajne používa, ak oblasť M je kruh alebo časť kruhu so stredom v bode $[0, 0]$.