TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH
STROJNÍCKA FAKULTA

MATEMATIKA 2

Miriam Andrejiová, Zuzana Kimáková

2020

RECENZOVALI: doc. RNDr. Denisa Olekšáková, PhD.
RNDr. Anna Grinčová, PhD.

Predhovor

Matematika predstavuje univerzálnu vednú disciplínu a je významným prostriedkom, ktorý umožňuje riešiť mnohé úlohy a problémy z rôznych odborných a praktických oblastí. Poznatky z matematiky sa bežne aplikujú v technických, prírodovedných, ekonomických a spoločenských vedách.

Tento učebný text je určený pre poslucháčov prvého ročníka bakalárskeho štúdia Strojníckej fakulty Technickej univerzity v Košiciach. Rovnako dobre však môže poslúžiť poslucháčom Fakulty baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií a Fakulty materiálov, metalurgie a recyklácie Technickej univerzity v Košiciach.

Učebný text obsahuje podstatné teoretické poznatky z analytickej geometrie v priestore, integrálneho počtu funkcie jednej reálnej premennej (určitý integrál a jeho aplikácie), diferenciálneho počtu funkcie viac premenných a diferenciálnych rovníc.

Každá kapitola je členená na podkapitoly, pričom v teoretickej časti sú vysvetlené základné pojmy. Praktická časť obsahuje nielen riešené úlohy, ale aj úlohy, ktoré slúžia na precvičovanie a na overovanie získaných vedomostí.

Obom recenzentom doc. RNDr. Denise Olekšákovej, PhD. a RNDr. Anne Grinčovej, PhD. ďakujeme za starostlivé posúdenie tejto učebnej pomôcky. Ich cenné pripomienky, rady a odporúčania prispeli k zvýšeniu kvality tejto publikácie.

Košice, december 2020 Autori

Obsah

Kapitola 1

Základy analytickej geometrie v priestore

1.1 Vektory a operácie s vektormi

1.1.1 Orientovaná úsečka, vektor

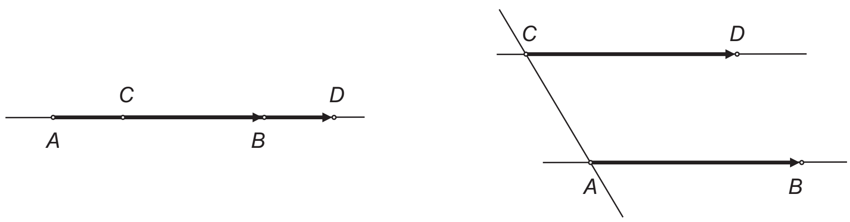
Dva rôzne body A, B určujú v priestore jedinú priamku. Časť priamky, ktorá sa nachádza medzi bodmi A a B nazývame *úsečkou* AB. Úsečku AB, v ktorej je stanovené, ktorý z jej krajných bodov je počiatočný a ktorý koncový bod, nazývame *orientovanou úsečkou*. Orientovanú úsečku s počiatočným bodom A a koncovým bodom B budeme označovať $\overrightarrow{AB}$.

Definícia 1.1. *Dĺžkou orientovanej úsečky* $\overrightarrow{AB}$ *rozumieme vzdialenosť bodov* A *a* B.

Hovoríme, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sú *súhlasne orientované* (Obr. 1.1), ak polpriamky AB, CD ležia na rovnobežných alebo totožných priamkach a zároveň

- jedna z polpriamok je časťou druhej alebo
- obe polpriamky ležia v tej istej polrovine určenej priamkou AC.

V opačnom prípade sa orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ nazývajú *nesúhlasne orientované*.



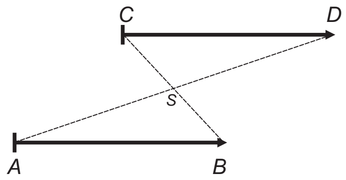
Obr. 1.1: Súhlasne orientované úsečky

Definícia 1.2. *Nenulovým vektorom nazývame množinu všetkých súhlasne orientovaných úsečiek rovnakej dĺžky* [1].

[1] Pojem nulového vektora zavádzame v definícii 1.4.

Ľubovoľná orientovaná úsečka, ktorá má zadanú dĺžku, orientáciu a smer, určuje geometrický vektor. Táto úsečka sa nazýva *umiestnenie vektora.* Ak sú dve orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ umiestnením toho istého vektora, potom hovoríme, že vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ sa rovnajú a píšeme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Definícia 1.3. *Dve orientované úsečky* $\overrightarrow{AB}$ *a* $\overrightarrow{CD}$ *určujú ten istý vektor práve vtedy, ak štvoruholník $ABDC$ je rovnobežníkom, t. j. ak sú stredy úsečiek AD a BC zhodné (Obr. 1.2).*



Obr. 1.2: Vektory

Poznámka 1.1. *Vektory označujeme malými písmenami* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, ... *alebo* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}, \ldots$

1.1.2 Súradnice vektora, veľkosť vektora

Každému bodu X v priestore môžeme jednoznačne priradiť usporiadanú trojicu reálnych čísel, ktoré nazývame jeho súradnicami. Zapisujeme $X = [\, x_1, x_2, x_3 \,]$.

Majme body A a B, pričom $A = [\, a_1, a_2, a_3 \,]$, $B = [\, b_1, b_2, b_3 \,]$. *Vzdialenosť dvoch bodov* A a B vypočítame podľa vzťahu

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \tag{1.1}$$

Pre *stred* S úsečky AB platí

$$S = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right]. \tag{1.2}$$

Ak je vektor $\vec{u}$ určený orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, kde $A = [\, a_1, a_2, a_3 \,]$ a $B = [\, b_1, b_2, b_3 \,]$, tak $\vec{u} = B - A$ a čísla $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$ nazývame *súradnicami vektora* $\vec{u}$. Zapisujeme $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Veľkosťou (absolútnou hodnotou, dĺžkou) vektora $\vec{u} = (\, u_1, u_2, u_3 \,)$ nazývame číslo

$$|\,\vec{u}\,| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,. \tag{1.3}$$

Veľkosť vektora $\vec{u}$ je daná dĺžkou orientovanej úsečky $\overrightarrow{AB}$, ktorá je umiestnením vektora $\vec{u}$. Platí

$$|\,\vec{u}\,| = |\,\overrightarrow{AB}\,| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,. \tag{1.4}$$

Definícia 1.4. *Vektor, ktorý má nulovú dĺžku, nazývame nulovým vektorom a označujeme symbolom* $\vec{0} = (\, 0, 0, 0 \,)$.

Definícia 1.5. *Vektor, ktorého veľkosť sa rovná jednej, nazývame jednotkovým vektorom.*

Ak $\vec{u} \neq \vec{0}$, potom jednotkový vektor vektora $\vec{u}$ je

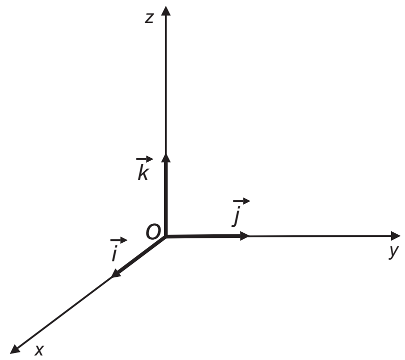
$$\vec{u}_0 = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}. \tag{1.5}$$

Pre každý vektor $\vec{u} = (\, u_1, u_2, u_3 \,)$ platí, že sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}, \tag{1.6}$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$ sú jednotkové vektory na súradnicových osiach x, y, z v pravouhlej súradnicovej sústave (Obr. 1.3). Súradnice jednotkových vektorov sú

$$\vec{i} = (\, 1, 0, 0 \,), \quad \vec{j} = (\, 0, 1, 0 \,), \quad \vec{k} = (\, 0, 0, 1 \,).$$



Obr. 1.3: Pravotočivý pravouhlý súradnicový systém

Uhly α, β, γ, ktoré zviera nenulový vektor $\vec{u} = (\, u_1, u_2, u_3 \,)$ s vektormi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ nazývame *smerovými uhlami vektor*a $\vec{u}$. Kosínusy týchto uhlov sa nazývajú *smerové kosínusy* a platí

$$\cos\alpha = \frac{u_1}{|\,\vec{u}\,|}, \quad \cos\beta = \frac{u_2}{|\,\vec{u}\,|}, \quad \cos\gamma = \frac{u_3}{|\,\vec{u}\,|}, \tag{1.7}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{1.8}$$

$$\vec{u}_0 = (\, \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \,)\,, \tag{1.9}$$

kde $\vec{u}_0$ je jednotkový vektor vektora $\vec{u}$.

Poznámka 1.2. *Smerové kosínusy vektora $\vec{u}$ určujú jednoznačne smer a orientáciu vektora.*

1.1.3 Vlastnosti vektorov. Operácie s vektormi

Pre dva vektory $\vec{a} = (\, a_1, a_2, a_3 \,)$, $\vec{b} = (\, b_1, b_2, b_3 \,)$ je definovaná rovnosť, súčet, rozdiel vektorov a súčin vektora s číslom nasledovne

1. *rovnosť vektorov*

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\, a_2 = b_2,\, a_3 = b_3, \tag{1.10}$$

2. *súčet vektorov*

$$\vec{a} + \vec{b} = (\, a_1 + b_1,\, a_2 + b_2,\, a_3 + b_3 \,)\,, \tag{1.11}$$

3. *rozdiel vektorov*

$$\vec{a} - \vec{b} = (\, a_1 - b_1,\, a_2 - b_2,\, a_3 - b_3 \,)\,, \tag{1.12}$$

4. *súčin vektora s číslom,* $k \in \mathbb{R}$

$$k\vec{a} = (\, ka_1,\, ka_2,\, ka_3 \,)\,. \tag{1.13}$$

Pre každé dva vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ platí

$$\begin{aligned} &\vec{u} + \vec{v} \quad \text{je vektor}, && \vec{u} - \vec{v} \quad \text{je vektor}, \\ &\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}, && \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \\ &\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Definícia 1.6. *Skalárnym súčinom* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ *vektorov* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *nazývame číslo (skalár), pre ktoré platí*

1. ak $\vec{a}$, $\vec{b}$ *sú nenulové vektory, potom*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,| \cos\varphi, \tag{1.14}$$

kde φ *je uhol vektorov* $\vec{a}$ *a* $\vec{b}$ $(\ 0 \le \varphi \le \pi\ )$,

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$ *ak*

a) $\vec{a} = \vec{0}$ *alebo* $\vec{b} = \vec{0}$ *alebo*

b) $\cos\varphi = 0$, *t. j. vektory* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *sú navzájom kolmé.*

Ak vektor $\vec{a} = (\, a_1,\, a_2,\, a_3 \,)$ a vektor $\vec{b} = (\, b_1,\, b_2,\, b_3 \,)$, tak

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\, a_1,\, a_2,\, a_3 \,) \cdot (\, b_1,\, b_2,\, b_3 \,) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \tag{1.15}$$

Pre ľubovoľné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ a pre každé číslo $k \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} &\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, && \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \\ &(\, k\,\vec{a}\,) \cdot \vec{b} = k\,(\, \vec{a} \cdot \vec{b}\,), && (\, \vec{a} + \vec{b}\,) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

Pre jednotkové vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ platí

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\,\vec{i}\,|\,|\,\vec{i}\,| \cos 0 = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0. \tag{1.16}$$

Z definície skalárneho súčinu vyplýva vzťah pre *uhol vektorov* $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Veta 1.1. *Pre veľkosť uhla* φ *nenulových vektorov* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *platí*

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{1.17}$$

Definícia 1.7. *Vektorovým súčinom* $\vec{a}\times\vec{b}$ *vektorov* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *(v tomto poradí) nazývame vektor* $\vec{v}=\vec{a}\times\vec{b}$, *pre ktorý platí*

1. $|\vec{v}|=|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, *kde* φ *je uhol vektorov* $\vec{a}$ *a* $\vec{b}$,
2. $\vec{v}$ *je kolmý na vektory* $\vec{a}$, $\vec{b}$,
3. *trojica vektorov* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ *je kladne orientovaná, t. j. vektory tvoria pravotočivý súradnicový systém.*

Poznámka 1.3. *Každý pravouhlý súradnicový systém, pre ktorý platí* $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, *nazývame pravotočivým súradnicovým systémom.*

Ak vektor $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ a vektor $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, tak

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\vec{i}(a_2b_3-a_3b_2)-\vec{j}(a_1b_3-a_3b_1)+\vec{k}(a_1b_2-a_2b_1). \tag{1.18}$$

Pre jednotkové vektory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ v pravotočivom pravouhlom systéme platí

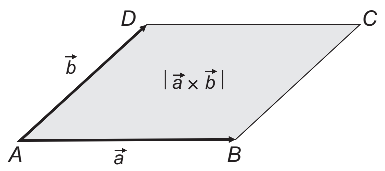
$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}, \tag{1.19}$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}. \tag{1.20}$$

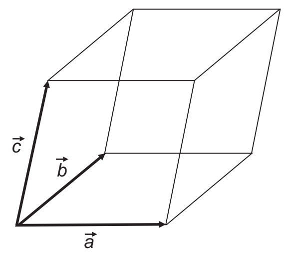
Pre ľubovoľné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ a pre každé číslo $k\in\mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
&\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a}), && k(\vec{a}\times\vec{b})=(k\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\vec{b}),\\
&\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}, && (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c},\\
&\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}.
\end{aligned}$$

Ak $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ a $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, tak $|\vec{a}\times\vec{b}|$ číselne predstavuje *obsah rovnobežníka* $ABCD$ určeného vektormi $\vec{a}$, $\vec{b}$ (Obr. 1.4).



Obr. 1.4: Obsah rovnobežníka



Obr. 1.5: Rovnobežnosten

Definícia 1.8. *Zmiešaným súčinom trojice vektorov* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *nazývame číslo* $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. *Ak* $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ *a* $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, *tak*

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{1.21}$$

Pre ľubovoľné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ platí

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}), \qquad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Poznámka 1.4. *Ak je zmiešaný súčin $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ kladný, tak systém vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ je pravotočivý.*

Absolútna hodnota zmiešaného súčinu $|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$ sa rovná *objemu rovnobežnostena*, ktorého tri rôznobežné hrany sú určené vektormi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (Obr. 1.5), t. j.

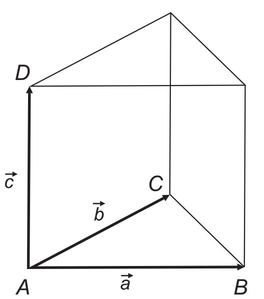
$$V = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|. \tag{1.22}$$

Objem trojbokého hranola zostrojeného nad vektormi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (Obr. 1.6) sa vypočíta podľa vzťahu

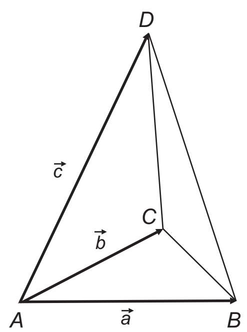
$$V = \frac{1}{2}|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|. \tag{1.23}$$

Objem štvorstena zostrojeného nad vektormi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (Obr. 1.7) sa vypočíta podľa vzťahu

$$V = \frac{1}{6}|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|. \tag{1.24}$$



Obr. 1.6: Trojboký hranol



Obr. 1.7: Štvorsten

Vektory $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$, $\ldots$, $\overrightarrow{a_n}$ sú *lineárne závislé*, ak existuje taká nenulová n-tica reálnych čísel k_1, k_2, k_3, $\ldots$, k_n, že platí

$$k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} + k_3\overrightarrow{a_3} + \cdots + k_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}. \tag{1.25}$$

Dva nenulové lineárne závislé vektory sú *rovnobežné (kolineárne)*. Tri nenulové, lineárne závislé vektory sú *komplanárne*, t. j. možno ich umiestniť v jednej rovine. Každé tri vektory v rovine a každé štyri vektory v priestore sú lineárne závislé.

Veta 1.2. *Dva vektory sú kolineárne práve vtedy, keď ich vektorový súčin je rovný nulovému vektoru.*

Veta 1.3. *Tri vektory sú komplanárne práve vtedy, keď ich zmiešaný súčin je rovný nule.*

Príklad 1.1. *Sú dané body* $A = [-2, 4, 1]$ *a* $B = [3, -2, -1]$.

a) Vypočítajme stred S *úsečky* AB.

b) Určme súradnice a veľkosť vektora $\vec{u}$, *ak* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Riešenie.

a) Súradnice stredu S úsečky AB určíme podľa vzťahu (1.2). Súradnice stredu úsečky AB sú aritmetickým priemerom súradníc bodov A a B. Platí

$$x_S = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_S = \frac{4+(-2)}{2} = 1, \quad z_S = \frac{1+(-1)}{2} = 0.$$

Pre stred S úsečky AB platí $S = \left[\frac{1}{2}, 1, 0\right]$.

b) Vypočítame súradnice vektora $\vec{u} = B - A = (5, -6, -2)$. Veľkosť vektora $\vec{u}$ vypočítame podľa vzťahu (1.3). Platí

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{5^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{65}.$$

Príklad 1.2. *Vypočítajme veľkosť vektorov*

a) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, *ak* $\vec{a} = (4, 5, 0)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$,

b) $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$, *ak* $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Riešenie.

a) Najprv určíme vektor $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (4, 5, 0) - (2, -1, 1) = (2, 6, -1)$. Veľkosť vektora $\vec{c}$ je

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-1)^2} = \sqrt{41}.$$

b) Určíme vektor $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} = (1, -2, 3) + 2(0, 3, 2) = (1, 4, 7)$. Veľkosť vektora $\vec{d}$ je

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{66}.$$

Príklad 1.3. *Vypočítajme skalárny súčin vektorov*

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$, *ak* $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (-3, 5, -1)$,

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, *ak* $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$,

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$, *ak* $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

Riešenie.

a) Pre skalárny súčin platí vzťah (1.15), t.j.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$

potom

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 1, 3) \cdot (-3, 5, -1) = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) = -4.$$

b) Ak poznáme veľkosť vektorov a uhol φ, ktorý zvierajú, ich skalárny súčin vypočítame podľa vzťahu (1.14)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi.$$

Potom

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3.$$

c) Najprv upravíme výraz $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$ pomocou vlastností skalárneho súčinu. Platí

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 3|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 =$$
$$= 3 \cdot 3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \cos\frac{\pi}{6} - 4^2 = 9 + 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 16 = 5.$$

Príklad 1.4. *Vypočítajme vektorový súčin* $\vec{s} \times \vec{t}$, *ak* $\vec{s} = (3, -5, 2)$, $\vec{t} = (1, 6, -4)$.

Riešenie. Pre vektorový súčin platí vzťah (1.18), odkiaľ dostaneme

$$\vec{s} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 14\vec{j} + 23\vec{k} = (8, 14, 23).$$

Príklad 1.5. *Vypočítajme obsah rovnobežníka, ak sú známe súradnice jeho troch vrcholov* $A = [1, 1, 1]$, $B = [-2, 3, 4]$, $C = [4, 3, 2]$.

Riešenie. Najprv určíme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Platí

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 2, 3), \quad \vec{c} = \overrightarrow{AC} = C - A = (3, 2, 1).$$

Vypočítame vektorový súčin $\vec{a} \times \vec{c}$ podľa vzťahu (1.18)

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 12\vec{j} - 12\vec{k} = (-4, 12, -12).$$

Pre obsah rovnobežníka $ABCD$ určeného vektormi $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + (-12)^2} = \sqrt{304} = 4\sqrt{19}\, j^2.$$

Príklad 1.6. *Zistime, či vektory* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *sú komplanárne, ak* $\vec{a} = (2, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 5, 2)$, $\vec{c} = (3, -10, 1)$.

Riešenie. Zmiešaný súčin vypočítame podľa vzťahu (1.21). Platí

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -10 & 1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0.$$

Pretože zmiešaný súčin vektorov je rôzny od nuly, vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nie sú komplanárne.

Príklad 1.7. *Objem štvorstena ABCD je $V = 5\, j^3$. Poznáme tri jeho vrcholy: $A = [\,2,\,1,\,-1\,]$, $B = [\,3,\,0,\,1\,]$, $C = [\,2,\,-1,\,3\,]$. Vypočítajme súradnice štvrtého vrchola D, ak vieme, že leží na osi o_y.*

Riešenie. Určíme vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Platí

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (\,1,\,-1,\,2\,),\quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (\,0,\,-2,\,4\,).$$

Bod D leží na osi o_y, teda $D = [\,0,\,y,\,0\,]$. Vektor $\vec{c}$ má súradnice

$$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = D - A = (\,-2,\,y-1,\,1\,).$$

Vypočítame zmiešaný súčin

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4y.$$

Objem štvorstena vypočítame podľa vzťahu (1.24). Platí

$$V = \frac{1}{6}|\,\vec{a}\cdot(\,\vec{b}\times\vec{c}\,)\,|,\quad \text{odkiaľ}\quad 5 = \frac{1}{6}|\,2-4y\,|.$$

Rovnica $|2-4y| = 30$ má dve riešenia $y_1 = 8$, $y_2 = -7$, teda štvrtý vrchol štvorstena $ABCD$ je $D_1 = [\,0,\,8,\,0]$ alebo $D_2 = [\,0,\,-7,\,0]$.

Úlohy

1.1 Sú dané vektory $\vec{a} = (\,7,\,3,\,-1\,)$, $\vec{b} = (\,-2,\,6,\,-3\,)$, $\vec{c} = (\,3,\,5,\,2\,)$. Určte vektory

a) $-\vec{a}$, **b)** $5\vec{b}$, **c)** $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, **d)** $3\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$, **e)** $\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$.

1.2 Vypočítajte stred úsečky AB, súradnice a veľkosť vektora $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, ak

a) $A = [\,1,\,2,\,3\,]$, $B = [\,3,\,-4,\,6\,]$, **b)** $A = [\,2,\,3,\,-2\,]$, $B = [\,5,\,3,\,-6\,]$,

c) $A = [\,-1,\,5,\,7\,]$, $B = [\,2,\,-3,\,9\,]$, **d)** $A = [\,3,\,-4,\,-5\,]$, $B = [\,-1,\,-5,\,7\,]$.

1.3 Dané sú body $A = [\,-1,\,2,\,0\,]$, $B = [\,3,\,2,\,1\,]$ a $C = [\,0,\,1,\,1\,]$. Nájdite súradnice vektora

a) $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CA}$, **b)** $2\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AC}$, **c)** $4\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AC}$.

1.4 Vypočítajte veľkosť nasledujúcich vektorov

a) $\vec{a} = (\,3,\,2,\,1\,)$, **b)** $\vec{t}+2\vec{s}$, kde $\vec{t} = (\,1,\,3,\,0\,)$, $\vec{s} = (\,9,\,1,\,1\,)$,

c) $3\vec{a}-2\vec{c}$, kde $\vec{a} = (\,0,\,2,\,14\,)$, $\vec{c} = (\,\sqrt{2},\,0,\,1\,)$.

1.5 Vypočítajte veľkosť vektora $\vec{a} = 3\vec{u}-5\vec{v}+\vec{w}$, ak $\vec{u} = 4\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$.

1.6 Vektor $\vec{a}$ zviera s osami o_x a o_y uhly $60°$ a $120°$. Aký uhol zviera s osou o_z?

1.7 Určte súradnice vektora $\vec{a}$, ak je daná jeho veľkosť a uhly, ktoré zviera so súradnicovými osami

a) $|\vec{a}| = 4$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$, **b)** $|\vec{a}| = 6$, $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$.

1.8 Dané sú tri za sebou idúce vrcholy rovnobežníka $ABCD$. Vypočítajte súradnice štvrtého vrchola D, ak

a) $A = [1, -2, 3]$, $B = [3, 2, 1]$, $C = [6, 4, 4]$,

b) $A = [-3, -2, 0]$, $B = [3, -3, 1]$, $C = [5, 0, 2]$.

1.9 Vypočítajte skalárny súčin $\vec{u} \cdot \vec{v}$, ak

a) $\vec{u} = (1, -3, 4)$, $\vec{v} = (5, 1, 2)$, **b)** $\vec{u} = (4, 2, -5)$, $\vec{v} = (2, 6, 4)$,

c) $\vec{u} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$.

1.10 Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\vec{a}$, $\vec{b}$, zvierajúcich uhol φ, ak

a) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = 0$, **b)** $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 8$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

c) $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

1.11 Pre vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$. Vypočítajte skalárne súčiny

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, **b)** $\vec{a}^2$, **c)** $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$, **d)** $(5\vec{a} - 4\vec{b})^2$.

1.12 Vypočítajte skalárny súčin $(\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot (2\vec{a} - \vec{c})$, ak $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5$,

$|\vec{c}| = 4$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = \pi$.

1.13 Sú dané vektory $\vec{a} = (4, -2, -4)$, $\vec{b} = (6, -3, 2)$. Vypočítajte

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, **b)** $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$, **c)** $(\vec{a} - \vec{b})^2$, **d)** $|2\vec{a} - \vec{b}|$, **e)** $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.

1.14 Vypočítajte uhol, ktorý zvierajú vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, ak

a) $\vec{a} = (4, -10, 1)$, $\vec{b} = (11, -8, -7)$, **b)** $\vec{a} = (4, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 1, 0)$.

1.15 Vypočítajte vonkajší uhol pri vrchole B trojuholníka ABC, ak

$A = [1, -1, 5]$, $B = [-2, -1, 1]$, $C = [5, -1, 2]$.

1.16 Určte súradnicu a_2 vektora $\vec{a}$ tak, aby vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ boli kolmé, ak

$\vec{a} = (9, a_2, -5)$, $\vec{b} = (-3, 4, -7)$.

1.17 Vypočítajte vnútorné uhly v trojuholníku ABC, ak

a) $A = [-1, -2, 4]$, $B = [-4, -2, 0]$, $C = [3, -2, 1]$,

b) $A = [6, 0, 2]$, $B = [8, -1, 4]$, $C = [4, -4, 6]$.

1.18 Vypočítajte $\vec{a} \times \vec{b}$, ak

a) $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = 2\vec{k}$, **b)** $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, **c)** $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

1.19 Vypočítajte $\vec{a} \times \vec{b}$, ak

a) $\vec{a} = (1, 3, -1)$, $\vec{b} = (5, -1, 4)$, **b)** $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (-6, 3, -9)$.

1.20 Určte vektor, ktorý je kolmý na vektor $\vec{a}$ a $\vec{b}$, ak

a) $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (3, 5, 1)$, **b)** $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

1.21 Sú dané vektory $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 1, -2)$. Vypočítajte

a) $\vec{a} \times \vec{b}$, **b)** $(3\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$, **c)** $(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

1.22 Vypočítajte $[\,\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})\,] + [\,\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})\,]$, ak

a) $\vec{a} = (2, 1, -3)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, **b)** $\vec{a} = (2, 0, 3)$, $\vec{b} = (-3, -1, 2)$.

1.23 Vypočítajte, pri akých hodnotách α, β vektor $\alpha\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ bude kolineárny s vektorom $\vec{a} \times \vec{b}$, ak $\vec{a} = (3, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 0)$.

1.24 Vypočítajte $|\vec{a} \times \vec{b}|$, ak

a) $\vec{a} = (1, 4, 1)$, $\vec{b} = (1, -2, -2)$, **b)** $\vec{a} = (2, -4, 1)$, $\vec{b} = (0, 3, -2)$.

1.25 Vypočítajte $|\vec{a} \times \vec{b}|$, ak

a) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, **b)** $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = \sqrt{12}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$,

c) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 15$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 90$.

1.26 Vypočítajte obsah rovnobežníka, ak jeho tri vrcholy sú

a) $A = [7, -5, 6]$, $B = [9, -4, 8]$, $C = [6, 0, 6]$,

b) $A = [1, 2, 0]$, $B = [3, 0, -3]$, $C = [5, 2, 6]$.

1.27 Vypočítajte obsah rovnobežníka a nájdite súradnice jeho štvrtého vrchola, ak jeho tri za sebou idúce vrcholy sú $A = [8, -4, 6]$, $B = [9, -4, 8]$ a $C = [6, 0, 6]$.

1.28 Vypočítajte obsah trojuholníka ABC, ak

a) $A = [1, 1, 3]$, $B = [3, -1, 6]$, $C = [5, 1, -3]$,

b) $A = [1, -2, 8]$, $B = [0, 0, 4]$, $C = [6, 2, 0]$.

1.29 Vypočítajte sínus uhla, ktorý zvierajú vektory $\vec{a}, \vec{b}$, ak

a) $\vec{a} = (-2, 2, -1)$, $\vec{b} = (-7, 6, 2)$, **b)** $\vec{a} = (2, 1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 2, 1)$.

1.30 Pre vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ platí $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$. Vypočítajte

a) $|\vec{a} \times \vec{b}|$, **b)** $|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})|$, **c)** $|(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})|$.

1.31 Vypočítajte zmiešaný súčin $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, ak

a) $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (3, -1, 2)$, $\vec{c} = (5, 3, 4)$,

b) $\vec{a} = (3, 4, -1)$, $\vec{b} = (-2, -3, 5)$, $\vec{c} = (7, 1, 2)$,

c) $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

1.32 Vypočítajte zmiešaný súčin $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, ak

a) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 7$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}$,

b) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 3$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{2\pi}{3}$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}$.

1.33 Zistite, či vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sú komplanárne, ak

a) $\vec{a} = (2, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, 2)$, $\vec{c} = (2, 2, 1)$,

b) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - 7\vec{k}$.

1.34 Pre akú hodnotu parametra λ, sú vektory $\vec{a} = (\lambda, 3, 1)$, $\vec{b} = (5, -1, 2)$, $\vec{c} = (-1, 5, 4)$ komplanárne?

1.35 Overte, že body A, B, C, D ležia v jednej rovine, ak

a) $A = [1, 2, -1]$, $B = [0, 1, 5]$, $C = [-1, 2, 1]$, $D = [2, 1, 3]$,

b) $A = [-1, 2, 1]$, $B = [-3, 1, 2]$, $C = [3, -2, 2]$, $D = [3, -4, 3]$.

1.36 Vypočítajte objem rovnobežnostena, určeného trojicou vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ak

a) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$,

b) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

1.37 Vypočítajte objem štvorstena $ABCD$, ak

a) $A = [1, 2, 3]$, $B = [-1, 0, 0]$, $C = [0, -2, 0]$, $D = [0, 0, -3]$,

b) $A = [2, -3, 5]$, $B = [0, 2, 1]$, $C = [-2, -2, 3]$, $D = [3, 2, 4]$.

1.38 Objem štvorstena $ABCD$ je $V = 29\,j^3$. Poznáme tri jeho vrcholy $A = [-1, 10, 0]$, $B = [0, 5, 2]$, $C = [6, 32, 2]$. Vypočítajte súradnice štvrtého vrchola D, ak leží na osi o_y.

1.39 Objem štvorstena $ABCD$ je $V = 2\,j^3$. Tri jeho vrcholy sú $A = [2, 1, 3]$, $B = [3, 3, 2]$, $C = [1, 2, 4]$. Vypočítajte súradnice štvrtého vrchola D, ak viete, že leží na osi o_z.

1.40 Vrcholy štvorstena sú umiestnené v bodoch A, B, C, D. Vypočítajte veľkosť výšky štvorstena prechádzajúcej vrcholom D, ak

a) $A = [1, 1, 1]$, $B = [2, 0, 2]$, $C = [2, 2, 2]$, $D = [3, 4, -3]$,

b) $A = [2, 1, 1]$, $B = [6, -2, 2]$, $C = [4, 3, 2]$, $D = [-6, 8, 7]$.

1.2 Rovina

Rovinu môžeme zadať rôznymi spôsobmi

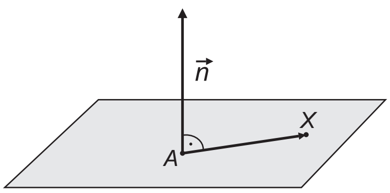
- bodom, ktorý leží v rovine a vektorom kolmým na rovinu,
- tromi rôznymi bodmi roviny, ktoré neležia na jednej priamke,
- bodom roviny a dvoma lineárne nezávislými vektormi, ktoré sú rovnobežné s rovinou,
- priamkou a bodom, ktorý na nej neleží.

V nasledujúcej časti uvedieme najdôležitejšie tvary rovnice roviny.

Definícia 1.9. *Nech je rovina určená bodom $A = [\,x_0,\, y_0,\, z_0\,]$ a normálovým vektorom $\vec{n}$, pričom normálovým vektorom rozumieme každý vektor, ktorý je kolmý na túto rovinu (Obr. 1.8). Rovnica*

$$(X - A) \cdot \vec{n} = 0, \tag{1.26}$$

kde bod $X = [\,x,\, y,\, z\,]$ je ľubovoľný bod danej roviny, sa nazýva normálová rovnica roviny.



Obr. 1.8: Rovina daná bodom A a normálovým vektorom $\vec{n}$

Poznámka 1.5. *Vektor $\overrightarrow{AX}$ leží v danej rovine a je kolmý na normálový vektor $\vec{n} = (\,a,\, b,\, c\,)$. Z definície skalárneho súčinu vyplýva $(X - A) \cdot \vec{n} = 0$.*

Ak v rovnici $(X - A) \cdot \vec{n} = 0$ vyjadríme skalárny súčin dvoch vektorov, dostaneme

$$(x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0) \cdot (a,\, b,\, c) = 0,$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

odkiaľ po úprave získame *všeobecnú rovnicu roviny*

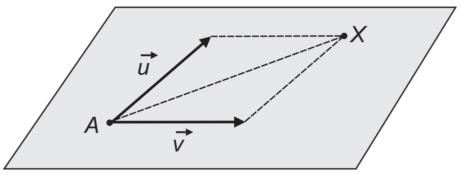
$$ax + by + cz + d = 0, \tag{1.27}$$

kde $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Definícia 1.10. *Nech je rovina určená bodom $A = [\,x_0,\, y_0,\, z_0\,]$ a dvoma lineárne nezávislými vektormi $\vec{u} = (\,u_1,\, u_2,\, u_3\,)$, $\vec{v} = (\,v_1,\, v_2,\, v_3\,)$, ktoré sú s rovinou rovnobežné (Obr. 1.9). Rovnica*

$$X = A + \vec{u}\,t + \vec{v}\,s, \quad t,\, s \in \mathbb{R}, \tag{1.28}$$

kde $X = [\,x, y, z\,]$ je ľubovoľný bod ležiaci v danej rovine sa nazýva parametrická rovnica roviny. Premenné t, s sú parametre.



Obr. 1.9: Rovina daná bodom A a dvoma lineárne nezávislými vektormi $\vec{u}$ a $\vec{v}$

Ak body vyjadríme pomocou súradníc, dostaneme *parametrické rovnice roviny* vyjadrené v tvare

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u_1 t + v_1 s, \\ y &= y_0 + u_2 t + v_2 s, \\ z &= z_0 + u_3 t + v_3 s, \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Nech je rovina určená troma bodmi $A = [\,x_1, y_1, z_1\,]$, $B = [\,x_2, y_2, z_2\,]$, $C = [\,x_3, y_3, z_3\,]$, ktoré neležia na jednej priamke, potom jej *parametrická rovnica* je

$$X = A + \overrightarrow{AB}\,t + \overrightarrow{AC}\,s, \quad t, s \in \mathbb{R}. \tag{1.30}$$

Ak body vyjadríme pomocou súradníc, dostaneme

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t + (x_3 - x_1)s, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t + (y_3 - y_1)s, \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t + (z_3 - z_1)s, \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Rovnicu roviny, ktorá je určená bodmi $A = [\,x_1, y_1, z_1\,]$, $B = [\,x_2, y_2, z_2\,]$, $C = [\,x_3, y_3, z_3\,]$, neležiacimi na jednej priamke, môžeme zapísať aj pomocou zmiešaného súčinu vektorov v tvare

$$(X - A) \cdot [(B - A) \times (C - A)] = 0 \tag{1.32}$$

alebo

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.33}$$

Definícia 1.11. *Rovnicu roviny v tvare*

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1, \tag{1.34}$$

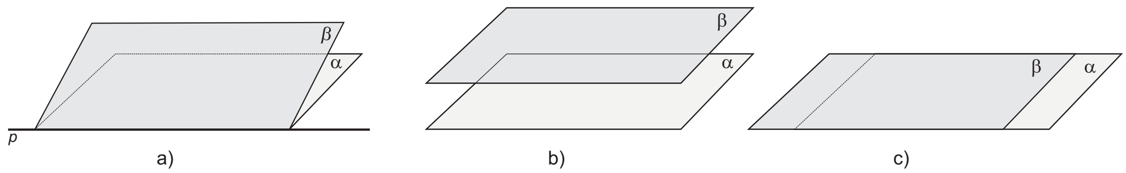
kde $p, q, r \neq 0$, nazývame úsekový tvar rovnice roviny. Nenulové čísla p, q, r nazývame úsekmi a sú určené priesečníkmi $P = [\,p, 0, 0\,]$, $Q = [\,0, q, 0\,]$, $R = [\,0, 0, r\,]$ roviny so súradnicovými osami o_x, o_y, o_z.

Veta 1.4. *Uhol dvoch rovín α a β, kde $\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ je uhol $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ ich normálových vektorov $\vec{n}_\alpha = (\,a_1, b_1, c_1\,)$, $\vec{n}_\beta = (\,a_2, b_2, c_2\,)$, pre ktorý platí*

$$\cos\varphi = \frac{|\,\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta\,|}{|\,\vec{n}_\alpha\,|\,|\,\vec{n}_\beta\,|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \tag{1.35}$$

Pri určovaní *vzájomnej polohy dvoch rovín* α a β berieme do úvahy množinu ich spoločných bodov, ktoré tvoria ich prienik.

- Ak sa roviny pretínajú v priamke p, tak roviny sú *rôznobežné* (ozn. $\alpha \times \beta$, Obr. 1.10a).
- Ak prienikom dvoch rovín α a β je prázdna množina, tak roviny sú *rovnobežné* (ozn. $\alpha \parallel \beta$, Obr. 1.10b).
- Ak prienikom dvoch rovín α a β je celá rovina, tak roviny sú *totožné* (ozn. $\alpha \equiv \beta$, Obr. 1.10c).



Obr. 1.10: Vzájomná poloha dvoch rovín

Veta 1.5. *Uvažujme dve roviny α a β, ktorých normálové vektory sú $\vec{n}_\alpha$ a $\vec{n}_\beta$. Potom*

- *roviny α a β sú rôznobežné, ak $\vec{n}_\alpha \neq k\vec{n}_\beta$ (resp. $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta \neq \vec{0}$) a $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, (roviny sa pretínajú v priamke p, t. j. $\alpha \cap \beta = p$)*
- *roviny α a β sú rovnobežné rôzne, ak $\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ (resp. $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \vec{0}$) a $\alpha \cap \beta = \emptyset$,*
- *roviny α a β sú totožné, ak $\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ (resp. $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \vec{0}$) a $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$.*

Veta 1.6. *Vzdialenosť bodu $A = [\,x_1, y_1, z_1\,]$ od roviny $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ vypočítame podľa vzorca*

$$d(A, \alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{1.36}$$

Príklad 1.8. *Napíšme všeobecnú rovnicu, parametrické rovnice a úsekový tvar rovnice roviny α, ktorá prechádza bodmi $A = [\,1, 0, 2\,]$, $B = [\,2, -1, 3\,]$, $C = [\,3, 2, 5\,]$.*

Riešenie. Označíme $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (\,1, -1, 1\,)$ a $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (\,2, 2, 3\,)$. Vektorový súčin týchto vektorov $\vec{u}, \vec{v}$ je rovný normálovému vektoru $\vec{n}_\alpha$ roviny α. Platí

$$\vec{n}_\alpha = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k} = (\,-5, -1, 4\,).$$

Do všeobecnej rovnice roviny (1.27) dosadíme normálový vektor $\vec{n}_\alpha = (\,-5, -1, 4\,)$ a súradnice ľubovoľného bodu ležiaceho v rovine, napríklad súradnice bodu A. Platí

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0, \\ & -5x & - & y & + & 4z & + & d & = & 0, \\ A \in \alpha: & -5 \cdot 1 & - & 1 \cdot 0 & + & 4 \cdot 2 & + & d & = & 0, \\ & & & & & & & d & = & -3. \end{array}$$

Všeobecná rovnica hľadanej roviny je $-5x - y + 4z - 3 = 0$ a po úprave má tvar

$$\alpha: \; 5x + y - 4z + 3 = 0.$$

Parametrické rovnice roviny dostaneme dosadením do rovníc (1.29)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & x_1 & + & u_1 t & + & v_1 s, \\ y & = & y_1 & + & u_2 t & + & v_2 s, \\ z & = & z_1 & + & u_3 t & + & v_3 s, \\ & & & & & & t, s \in \mathbb{R} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & + & t & + & 2s, \\ y & = & & - & t & + & 2s, \\ z & = & 2 & + & t & + & 3s, \\ & & & & & & t, s \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Úsekový tvar rovnice roviny získame úpravou zo všeobecnej rovnice roviny

$$\begin{array}{ccccccccc} 5x & + & y & - & 4z & = & -3, & / : (-3) \\ \frac{5}{-3}\,x & + & \frac{1}{-3}\,y & - & \frac{4}{-3}\,z & = & 1, & \\ \frac{x}{-\frac{3}{5}} & + & \frac{y}{-3} & + & \frac{z}{\frac{3}{4}} & = & 1, & \end{array}$$

kde $p = -\dfrac{3}{5}$, $q = -3$, $r = \dfrac{3}{4}$.

Príklad 1.9. *Vypočítajme uhol roviny α s rovinou β, ak $\alpha: 2x - y + 2z - 1 = 0$, $\beta: x - z + 3 = 0$.*

Riešenie. Označíme normálové vektory rovín α, β, t. j. $\vec{n}_\alpha = (2, -1, 2)$, $\vec{n}_\beta = (1, 0, -1)$. Dosadením do vzorca pre uhol dvoch rovín (1.35)

$$\cos\varphi = \frac{|\,\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta\,|}{|\,\vec{n}_\alpha\,| \,.\, |\,\vec{n}_\beta\,|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \,.\, \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\,,$$

dostaneme

$$\cos\varphi = \frac{|2 - 0 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \,.\, \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Roviny sú na seba kolmé.

Príklad 1.10. *Vypočítajme*

a) vzdialenosť bodu $A = [\,3, -1, 6\,]$ od roviny $\rho: 3x + 4y + 2z - 10 = 0$,

b) vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín $\alpha: 3x - 2y + 6z - 7 = 0$, $\beta: 3x - 2y + 6z - 35 = 0$.

Riešenie.

a) Ak do vzorca pre vzdialenosť bodu od roviny (1.36)

$$d(A, \rho) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

dosadíme súradnice bodu $A = [\,x_1, y_1, z_1\,] = [\,3, -1, 6\,]$ a normálový vektor roviny $\vec{n}_\rho = (\,a, b, c\,) = (\,3, 4, 2\,)$, dostaneme

$$d(A, \rho) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 6 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{7}{\sqrt{29}}.$$

b) Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín α, β určíme pomocou vzorca pre vzdialenosť bodu od roviny (1.36). Zvolíme v jednej z rovín ľubovoľný bod a vypočítame jeho vzdialenosť od druhej roviny. Táto vzdialenosť sa rovná vzdialenosti dvoch rovnobežných rovín.

Zvoľme, napríklad v rovine α bod C a vypočítame jeho vzdialenosť od roviny β. Bod $C = [\,x_1, y_1, z_1\,]$ nájdeme tak, že zvolíme dve jeho súradnice a tretiu dopočítame. Nech $y_1 = 1$, $z_1 = 0$. Rovnica roviny α je

$$\alpha: 3x - 2y + 6z - 7 = 0.$$

Keďže $C \in \alpha$, platí

$$3x_1 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 - 7 = 0 \Rightarrow x_1 = 3.$$

Bod C má súradnice $C = [\,3,\,1,\,0\,]$. Jeho vzdialenosť od roviny β vypočítame dosadením do vzorca (1.36)

$$d(C,\,\beta) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 - 35|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{28}{\sqrt{49}} = 4.$$

Pretože roviny α, β sú rovnobežné, každý bod roviny α, má rovnakú vzdialenosť od roviny β. Platí

$$d(\alpha,\,\beta) = d(C,\,\beta) = 4.$$

Príklad 1.11. *Určme vzájomnú polohu dvoch rovín α a β, ak*

$$\alpha: \quad 2x - 3y - z + 10 = 0, \qquad \beta: \quad \begin{aligned} x &= 6 + 5t + 2s, \\ y &= 2 + t + s, \\ z &= 13 + 7t + s, \quad t, s \in R. \end{aligned}$$

Riešenie. Najprv určíme normálové vektory rovín α a β

$$\vec{n}_\alpha = (\,2,\,-3,\,-1\,),\ \vec{n}_\beta = \vec{u} \times \vec{v}, \quad \text{kde} \quad \vec{u} = (\,5,\,1,\,7\,),\ \vec{v} = (\,2,\,1,\,1\,).$$

Platí

$$\vec{n}_\beta = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Keďže $\vec{n}_\alpha = (\,2,\,-3,\,-1\,)$, $\vec{n}_\beta = (\,-6,\,9,\,3\,)$, platí $\vec{n}_\beta = -3 \cdot \vec{n}_\alpha$ a teda roviny môžu byť rovnobežné alebo totožné.

Stačí už len zistiť, či nejaký bod B, ktorý leží v rovine β, leží aj v rovine α (totožné roviny), alebo v danej rovine neleží (rovnobežné roviny). Za bod $B \in \beta$ môžeme voliť napríklad bod $B = [\,6,\,2,\,13\,]$. Dosadením jeho súradníc do rovnice roviny α

$$\alpha: \quad 2x - 3y - z + 10 = 0$$

dostaneme

$$2 \cdot 6 - 3 \cdot 2 - 13 + 10 = 3 \neq 0.$$

Bod B neleží v rovine α a teda roviny α a β sú rovnobežné.

Príklad 1.12. *Určme vzájomnú polohu troch rovín α, β, γ ak*
$\alpha: 3x + y + z - 12 = 0, \quad \beta: 2x + 3y + z - 11 = 0, \quad \gamma: x - 2y + z - 3 = 0.$

Riešenie. Vzájomnú polohu troch rovín zistíme riešením sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & z & = & 12, \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 11, \\ x & - & 2y & + & z & = & 3. \end{array}$$

Sústavu môžeme riešiť napríklad pomocou Gaussovej eliminačnej metódy.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightleftharpoons \\ \\ \rightleftharpoons \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 3 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /-2R_1 \\ /-3R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /-R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Sústava lineárnych rovníc má práve jedno riešenie $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$. Roviny sú rôznobežné a pretínajú sa v jedinom spoločnom bode $P = [\,3,\,1,\,2\,]$.

Úlohy

1.41 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá je určená bodom A a normálovým vektorom $\vec{n}$, ak

a) $A = [\,0,\,0,\,0\,]$, $\vec{n} = (\,3,\,5,\,-1\,)$, **b)** $A = [\,3,\,2,\,-4\,]$, $\vec{n} = (\,2,\,0,\,7\,)$.

1.42 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A = [\,1,\,1,\,4\,]$ a je kolmá na priamku $x = -1 + 2t$, $y = 8 - 5t$, $z = 4t$, $t \in \mathbb{R}$.

1.43 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $A = [\,4,\,-1,\,2\,]$ a je kolmá na

a) os o_x, **b)** os o_y, **c)** os o_z.

Znázornite tieto roviny v pravouhlej súradnicovej sústave.

1.44 Sú dané body $A = [\,0,\,-1,\,3\,]$, $B = [\,1,\,3,\,5\,]$. Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom A a je kolmá na vektor $\overrightarrow{AB}$.

1.45 Napíšte všeobecnú rovnicu a parametrické rovnice roviny, ktorá prechádza bodmi M, N rovnobežne s vektorom $\vec{a}$, ak

a) $M = [\,3,\,4,\,-2\,]$, $N = [\,2,\,3,\,0\,]$, $\vec{a} = (\,0,\,2,\,1\,)$,

b) $M = [\,1,\,-2,\,-1\,]$, $N = [\,4,\,1,\,1\,]$, $\vec{a} = (\,5,\,3,\,4\,)$.

1.46 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi $K = [\,4,\,0,\,-2\,]$, $L = [\,5,\,1,\,7\,]$ a je rovnobežná s osou o_x.

1.47 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi $M = [\,1,\,2,\,2\,]$, $N = [\,2,\,3,\,4\,]$ a je rovnobežná s osou o_y.

1.48 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom A rovnobežne s vektormi $\vec{u}$, $\vec{v}$, ak

a) $A = [\,1,\,4,\,2\,]$, $\vec{u} = (\,2,\,-2,\,1\,)$, $\vec{v} = (\,3,\,-7,\,1\,)$,

b) $A = [\,3,\,-4,\,2\,]$, $\vec{u} = (\,1,\,-1,\,5\,)$, $\vec{v} = (\,2,\,-5,\,13\,)$.

1.49 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi

a) $A = [\,0,\,0,\,0\,]$, $B = [\,2,\,3,\,4\,]$, $C = [\,-3,\,1,\,5\,]$,

b) $K = [\,-1,\,0,\,2\,]$, $L = [\,3,\,-3,\,1\,]$, $M = [\,5,\,3,\,-1\,]$.

1.50 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi $A = [\,2,\,2,\,3\,]$, $B = [\,1,\,0,\,2\,]$ a je kolmá na rovinu $\alpha:\ x - 8y + z - 10 = 0$.

1.51 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $M = [\,0,\,-2,\,3\,]$ a osou o_x. Znázornite túto rovinu v pravouhlej súradnicovej sústave.

1.52 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $M = [\,-3,\,1,\,-2\,]$ a osou o_z. Znázornite túto rovinu v pravouhlej súradnicovej sústave.

1.53 Určte úseky, ktoré vytína rovina α na jednotlivých súradnicových osiach. Znázornite túto rovinu v pravouhlej súradnicovej sústave.

a) $\alpha:\ 2x + 4y + z - 4 = 0$, **b)** $\alpha:\ 2x - 3y - z + 12 = 0$, **c)** $\alpha:\ x + 3z - 6 = 0$.

1.54 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodom $M = [\,7,\,-5,\,1\,]$ a na súradnicových osiach vytína rovnaké kladné úseky.

1.55 Vypočítajte objem štvorstena ohraničeného súradnicovými rovinami a rovinou $3x - 6y + 4z - 24 = 0$.

1.56 Napíšte úsekový tvar rovnice roviny, ktorá prechádza bodmi

a) $A = [\,-1,\,8,\,0\,]$, $B = [\,4,\,1,\,1\,]$, $C = [\,2,\,-1,\,-1\,]$,

b) $K = [\,2,\,3,\,9\,]$, $L = [\,0,\,-1,\,4\,]$, $M = [\,10,\,5,\,1\,]$.

1.57 Vypočítajte uhol rovín ρ, σ

a) $\rho:\ \sqrt{2}x + y - z - 10 = 0$, $\sigma:\ \sqrt{2}x - y - z = 0$,

b) $\rho:\ 11x - 8y - 7z + 6 = 0$, $\sigma:\ 4x - 10y + z - 5 = 0$,

c) $\rho:\ 6x + 2y - 4z + 17 = 0$, $\sigma:\ 9x + 3y - 6z - 4 = 0$,

d) $\rho:\ 4x - 5y + 3z - 1 = 0$, $\sigma:\ x - 4y - z + 9 = 0$,

e) $$\rho:\ \begin{aligned} x &= 1 + s + 2t, \\ y &= -4 - t, \\ z &= -3 + s - t, \quad s, t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \qquad \sigma:\ 2x - 5y - 13z + 10 = 0.$$

1.58 Vypočítajte uhol roviny $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ s rovinou R_{yz}.

1.59 Bod $M = [\,-5,\,16,\,12\,]$ leží v dvoch rovinách, z ktorých jedna prechádza osou o_x, druhá osou o_y. Vypočítajte uhol týchto dvoch rovín.

1.60 Vypočítajte vzdialenosť roviny $15x - 10y + 6z - 190 = 0$ od počiatku súradnicovej sústavy.

1.61 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá má od počiatku súradnicovej sústavy vzdialenosť 6 jednotiek a na súradnicových osiach vytína úseky, pre ktoré platí $p : q : r = 1 : 3 : 2$.

1.62 Vypočítajte vzdialenosť bodu A od roviny α, ak

a) $A = [\,3,\,1,\,-1\,]$, $\alpha:\ 22x + 4y - 20z - 45 = 0$,

b) $A = [\,4,\,3,\,-2\,]$, $\alpha:\ 3x - y + 5z + 1 = 0$,

c) $A = [\,3,\,-1,\,6\,]$, rovina α prechádza bodmi $M = [\,1,\,-4,\,8\,]$, $N = [\,3,\,-5,\,2\,]$, $P = [\,7,\,0,\,4\,]$.

1.63 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá je rovnobežná s rovinou $x + 2y - 2z + 7 = 0$ a má od bodu $A = [\,4,\ 3,\ -2\,]$ vzdialenosť $d = 7$.

1.64 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá je rovnobežná s rovinou $2x + y - 4z + 5 = 0$ a má od bodu $A = [\,1,\ 2,\ 0\,]$ vzdialenosť $d = \sqrt{21}$.

1.65 Vypočítajte vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín

a) $4x + 3y - 5z - 8 = 0,\ \ 4x + 3y - 5z + 12 = 0,$

b) $11x - 2y - 10z + 15 = 0,\ \ 11x - 2y - 10z - 45 = 0.$

1.66 Vypočítajte objem kocky, ktorej dve protiľahlé steny ležia v rovinách

a) $2x + y - 2z - 6 = 0,\ \ 4x + 2y - 4z - 30 = 0,$

b) $2x - 2y + z - 1 = 0,\ \ 2x - 2y + z + 5 = 0.$

1.67 Na osi o_x určte bod, ktorý má od roviny $6x + 2y + 3z - 12 = 0$ vzdialenosť $d = 6$.

1.68 Na osi o_y určte bod, ktorý má od roviny $x + 2y - 2z - 2 = 0$ vzdialenosť $d = 4$.

1.69 Na osi o_z určte bod, ktorý má rovnakú vzdialenosť od rovín $x + 4y - 3z - 2 = 0$, $5x + z + 8 = 0$.

1.70 Na osi o_z určte bod, ktorý má rovnakú vzdialenosť od bodu $M = [\,2,\ -2,\ 6\,]$ a od roviny $x + y + z - 2 = 0$.

1.71 Určte množinu všetkých bodov rovnako vzdialených od rovín

a) $3x + 2y - z + 3 = 0,\ \ 3x + 2y - z - 1 = 0,$

b) $4x + 5y - 3z - 1 = 0,\ \ 8x + 10y - 6z - 4 = 0.$

1.72 Určte množinu všetkých bodov, ktoré majú od roviny

a) $\alpha:\ 2x - 2y - z - 6 = 0$ vzdialenosť $d = 7$,

b) $\beta:\ 3x - 6y - 2z + 14 = 0$ vzdialenosť $d = 3$.

1.73 Určte vzájomnú polohu rovín α, β , ak

a) $\alpha:\ x - 2y + 3z - 4 = 0,\qquad \beta:\ 2x - 3y + 3z - 9 = 0,$

b) $\alpha:\ 2x - 3y - z + 7 = 0,\qquad \beta:\ \begin{aligned} x &= 2 + t + 3s,\\ y &= 1 + s,\\ z &= 8 + 2t + 3s,\ \ t, s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$

c) $\alpha:\ 12x - 5y - 4z + 1 = 0,\qquad \beta:\ \begin{aligned} x &= 2 - t,\\ y &= -t + s,\\ z &= 1 + 2t + 4s,\ \ t, s \in \mathbb{R}, \end{aligned}$

d) $\alpha:\ \begin{aligned} x &= -1 - t_1 - 2s_1,\\ y &= 1 + 2t_1 + s_1,\\ z &= 2 + s_1,\ \ t_1, s_1 \in \mathbb{R}, \end{aligned}\qquad \beta:\ \begin{aligned} x &= -3t_2 - 4s_2,\\ y &= 2 - s_2,\\ z &= 3 + 2t_2 + 3s_2,\ \ t_2, s_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$

1.74 Určte vzájomnú polohu rovín ABC, DEF, ak

a) $A = [\,1,\,1,\,1\,]$, $B = [\,2,\,1,\,3\,]$, $C = [\,-1,\,2,\,2\,]$, $D = [\,0,\,2,\,-2\,]$, $E = [\,-1,\,3,\,1\,]$, $F = [\,-3,\,3,\,-3\,]$,

b) $A = [\,0,\,0,\,1\,]$, $B = [\,1,\,1,\,1\,]$, $C = [\,2,\,2,\,2\,]$, $D = [\,7,\,5,\,5\,]$, $E = [\,4,\,3,\,3\,]$, $F = [\,5,\,4,\,4\,]$.

1.75 Určte vzájomnú polohu rovín α, β, γ , ak

a) $\alpha : 5x + 8y - z - 7 = 0$, $\beta : x + 2y + 3z - 1 = 0$, $\gamma : 2x - 3y + 2z - 9 = 0$,

b) $\alpha : 2x - y + 5z - 4 = 0$, $\beta : 5x + 2y - 13z + 23 = 0$, $\gamma : 3x - z + 5 = 0$,

c) $\alpha : x - 4y - 2z + 3 = 0$, $\beta : 3x + y + z - 5 = 0$, $\gamma : 3x - 12y - 6z + 7 = 0$,

d) $\alpha : x + y + z - 6 = 0$, $\beta : 2x + y + 3z - 18 = 0$, $\gamma : 3x + 2y + 4z - 12 = 0$,

e) $\alpha : x + 2y + 3z - 10 = 0$, $\beta : 3x + 6y + 9z + 4 = 0$, $\gamma : 5x + 10y + 15z - 7 = 0$.

1.76 Určte číslo a tak, aby sa roviny α, β, γ pretínali, ak

$\alpha : x - 3y + z - 2 = 0$, $\beta : x - y - z = 0$, $\gamma : x - 4y + 2z + a = 0$.

1.77 Napíšte všeobecnú rovnicu roviny, ktorá prechádza bodmi A, B a priesečníkom rovín ρ, σ, ω, ak

a) $A = [\,0,\,0,\,0\,]$, $B = [\,3,\,-2,\,4\,]$,

$\rho : x + 2y + 2z - 3 = 0$, $\sigma : 4x - 2y - 5z - 5 = 0$, $\omega : 6x - y + 3z - 1 = 0$,

b) $A = [\,0,\,0,\,0\,]$, $B = [\,7,\,1,\,2\,]$,

$\rho : x + 2y + z - 5 = 0$, $\sigma : 2x + 3y + z - 1 = 0$, $\omega : 2x + y + 3z - 11 = 0$.

1.3 Priamka v priestore

Priamka v priestore môže byť určená viacerými spôsobmi

- bodom a smerovým vektorom,
- dvoma rôznymi bodmi,
- ako priesečnica dvoch rovín.

V nasledujúcej časti uvedieme najdôležitejšie tvary rovnice priamky.

Definícia 1.12. *Ak je daný bod $A = [\,x_0,\,y_0,\,z_0\,]$ priamky p a vektor $\vec{s} = (\,s_1,\,s_2,\,s_3\,)$, ktorý určuje smer priamky p, tzv.* smerový vektor, *tak každý bod $X = [\,x,\,y,\,z\,]$ priamky p spĺňa parametrické rovnice priamky*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + s_1 t, \\ y &= y_0 + s_2 t, \\ z &= z_0 + s_3 t, \end{aligned} \tag{1.37}$$

kde parameter $t \in \mathbb{R}$.