TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH
STROJNÍCKA FAKULTA

MATEMATIKA 1

Miriam Andrejiová, Zuzana Kimáková

2020

RECENZOVALI: doc. RNDr. Denisa Olekšáková, PhD.
RNDr. Anna Grinčová, PhD.

Predhovor

Tieto skriptá sú určené študentom prvého ročníka bakalárskeho štúdia Strojníckej fakulty Technickej univerzity v Košiciach, rovnako dobre však môžu poslúžiť poslucháčom Fakulty baníctva, ekológie, riadenia a geotechnológií a Fakulty materiálov, metalurgie a recyklácie TUKE. Skriptá by mali slúžiť jednak ako učebná pomôcka na cvičenia z predmetu Matematika I, jednak aj pre samostatnú prípravu študentov. V učebnom texte sú uvedené podstatné teoretické poznatky potrebné k riešeniu úloh, riešené príklady a úlohy na riešenie týkajúce sa lineárnej algebry, funkcie jednej premennej a jej diferenciálneho a integrálneho počtu. V riešených príkladoch sú vysvetlené riešenia niektorých typických a dôležitých úloh. Obsah skrípt je dostatočným základom pre štúdium a úspešné absolvovanie predmetu Matematika I v 1. semestri bakalárskeho štúdia.

Obom recenzentom doc. RNDr. Denise Olekšákovej, PhD. a RNDr. Anne Grinčovej, PhD. ďakujeme za dôsledné posúdenie tejto učebnej pomôcky. Ich cenné pripomienky, rady a odporúčania prispeli k zvýšeniu kvality tejto publikácie.

Košice, december 2020 Autori

Obsah

Kapitola 1

Lineárna algebra

1.1 Pojem n-tice a operácie s n-ticami

Nech n je prirodzené číslo, $n \geq 2$. Usporiadanú skupinu n reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazývame *n-ticou* a čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazývame *zložkami* alebo *súradnicami* n-tice. Číslo a_i je i-ta súradnica n-tice $\overline{a}$. Používame označenie $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Ak $n = 2$, hovoríme o dvojici, pre $n = 3$ hovoríme o trojici atď. Pre n-ticu používame tiež označenie n-členný alebo *n-zložkový vektor*.

Dve n-tice $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ považujeme za *sebe rovné* a píšeme $\overline{a} = \overline{b}$, ak $a_i = b_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, t. j. $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots,\ a_n = b_n$.

Súčtom n-tíc $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ rozumieme n-ticu $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ a označujeme

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Existuje jediná n-tica $\overline{x}$ taká, že $\overline{a} = \overline{b} + \overline{x}$. Túto n-ticu $\overline{x}$ nazývame *rozdielom n-tíc* $\overline{a}$ a $\overline{b}$ a označujeme $\overline{x} = \overline{a} - \overline{b}$. Teda rozdielom n-tíc $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ rozumieme n-ticu $(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$ a označujeme

$$\overline{a} - \overline{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n).$$

Súčinom n-tice $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ s číslom α rozumieme n-ticu $(\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$ a označujeme

$$\alpha\overline{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Nulovou n-ticou rozumieme n-ticu $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Je zrejmé, že $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$.

Opačnou n-ticou k n-tici $\overline{a}$ nazývame n-ticu $-\overline{a}$, pre ktorú platí, že $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$. Je zrejmé, že

$$-\overline{a} = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n).$$

Pre ľubovoľné n-tice $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ a ľubovoľné reálne čísla α, β platia nasledujúce pravidlá (vlastnosti operácií s n-ticami).

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (komutatívny zákon).
2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ (asociatívny zákon).
3. Existuje jediná n-tica $\overline{y}$ taká, že $\overline{a} + \overline{y} = \overline{0}$.
4. $\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}$ (asociatívny zákon).

5. $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$,

   $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$ (distributívne zákony).

6. Rovnosť $\alpha\overline{a} = \overline{0}$ platí vtedy a len vtedy, ak $\alpha = 0$ alebo $\overline{a} = \overline{0}$.

1.2 Lineárna kombinácia a lineárna závislosť n-tíc

Hovoríme, že n-tica $\overline{a}$ je *lineárnou kombináciou* n-tíc $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$,...,$\overline{a}_k$, ak existujú čísla α_1, α_2, ..., α_k také, že platí

$$\overline{a} = \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \cdots + \alpha_k\overline{a}_k.$$

S pojmom lineárnej kombinácie úzko súvisí pojem lineárnej závislosti, resp. lineárnej nezávislosti.
Hovoríme, že n-tice $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ sú *lineárne závislé*, ak existujú také čísla α_1, α_2, ..., α_k, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly, že platí

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \cdots + \alpha_k\overline{a}_k = \overline{0}.$$

Ak n-tice $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ nie sú lineárne závislé, hovoríme, že sú *lineárne nezávislé*. Teda n-tice $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ sú lineárne nezávislé, ak rovnosť

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + \cdots + \alpha_k\overline{a}_k = \overline{0}$$

nastáva len pre $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Veta 1.1. *n-tice $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_k$ sú lineárne závislé vtedy a len vtedy, ak je niektorá z nich lineárnou kombináciou ostatných.*

Príklad 1.1. *Zistime, pre aké čísla x, y, z platí rovnosť* $(2x + y, 1 + z, 8 - x) = (0, 2, 4y + z)$.

Riešenie.
Z podmienky rovnosti n-tíc platí

$$2x + y = 0, \quad 1 + z = 2, \quad 8 - x = 4y + z.$$

Z prvých dvoch rovníc vyjadríme $y = -2x,\ z = 1$ a dosadíme do tretej rovnice. Dostaneme

$$\begin{aligned} 8 - x &= 4 \cdot (-2x) + 1, \\ 7x &= -7, \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Potom $y = -2 \cdot (-1) = 2$. Trojice sa rovnajú pre $x = -1,\ y = 2,\ z = 1$.

Príklad 1.2. *Zistime, či je n-tica $\overline{a}$ lineárnou kombináciou n-tíc $\overline{b}$, $\overline{c}$, ak*

a) $\overline{a} = (1, -5)$, $\overline{b} = (2, -1)$, $\overline{c} = (1, 1)$,

b) $\overline{a} = (1, 1, -2)$, $\overline{b} = (2, 0, 1)$, $\overline{c} = (-1, 1, 3)$.

Riešenie.

a) Dvojica $\overline{a}$ je lineárnou kombináciou dvojíc $\overline{b}$, $\overline{c}$ práve vtedy, ak existujú čísla α_1, α_2 také, že platí

$$\overline{a} = \alpha_1\overline{b} + \alpha_2\overline{c}.$$

Po dosadení dostaneme

$$(1,-5) = \alpha_1(2,-1) + \alpha_2(1,1),$$

$$(1,-5) = (2\alpha_1, -\alpha_1) + (\alpha_2, \alpha_2)\,,$$

$$(1,-5) = (2\alpha_1 + \alpha_2,\ -\alpha_1 + \alpha_2)\,.$$

Z definície rovnosti n-tíc vyplýva

$$\begin{aligned} 1 &= \ 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ -5 &= -\alpha_1 + \alpha_2. \end{aligned}$$

Vyriešme sústavu lineárnych rovníc dosadzovacou metódou. Vyjadríme napr. z prvej rovnice $\alpha_2 = 1 - 2\alpha_1$ a dosadíme do druhej. Dostaneme

$$\begin{aligned} -5 &= -\alpha_1 + 1 - 2\alpha_1, \\ 3\alpha_1 &= \quad 6, \\ \alpha_1 &= \quad 2. \end{aligned}$$

Potom $\alpha_2 = 1 - 2\alpha_1 = 1 - 2 \cdot 2 = -3$. Sústava lineárnych rovníc má práve jedno riešenie $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$. Dvojica $\overline{a}$ je lineárnou kombináciou dvojíc $\overline{b}$, $\overline{c}$ a platí $\overline{a} = 2\overline{b} - 3\overline{c}$.

b) Trojica $\overline{a}$ je lineárnou kombináciou trojíc $\overline{b}$, $\overline{c}$ práve vtedy, ak existujú čísla α_1, α_2 také, že platí

$$\overline{a} = \alpha_1\overline{b} + \alpha_2\overline{c}.$$

Po dosadení dostaneme

$$(1,1,-2) = \alpha_1(2,0,1) + \alpha_2(-1,1,3),$$

$$(1,1,-2) = (2\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2)\,.$$

Z definície rovnosti n-tíc vyplýva

$$\begin{aligned} 1 &= 2\alpha_1 - \alpha_2, \\ 1 &= \qquad\ \ \alpha_2, \\ -2 &= \ \alpha_1 + 3\alpha_2. \end{aligned}$$

Z prvých dvoch rovníc dostaneme $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Dosadením do tretej rovnice vyplýva $-2 \neq 4$. Sústava nemá riešenie a teda $\overline{a}$ nie je lineárnou kombináciou trojíc $\overline{b}$, $\overline{c}$.

Príklad 1.3. *Zistime, či sú n-tice $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ lineárne závislé.*

a) $\overline{a} = (-1,3)$, $\overline{b} = (1,1)$, $\overline{c} = (-5,3)$,

b) $\overline{a} = (1,0,0)$, $\overline{b} = (2,1,1)$, $\overline{c} = (-1,3,2)$.

Riešenie.

a) Dvojice $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sú lineárne závislé, ak existujú čísla α_1, α_2, α_3 také, že aspoň jedno je rôzne od nuly a platí

$$\alpha_1\overline{a} + \alpha_2\overline{b} + \alpha_3\overline{c} = \overline{0}.$$

Po dosadení dostaneme

$$\alpha_1(-1,3) + \alpha_2(1,1) + \alpha_3(-5,3) = (0,0),$$

$$(-\alpha_1, 3\alpha_1) + (\alpha_2, \alpha_2) + (-5\alpha_3, 3\alpha_3) = (0,0),$$

$$(-\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3,\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = (0,0).$$

Z definície rovnosti n-tíc vyplýva

$$\begin{aligned} -\alpha_1 + \alpha_2 - 5\alpha_3 &= 0, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sústavu rovníc môžeme riešiť napríklad sčítacou metódou. Odčítaním prvej rovnice od druhej dostaneme

$$4\alpha_1 + 8\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_3.$$

Z prvej rovnice pre neznámu α_2 platí

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 5\alpha_3 = -2\alpha_3 + 5\alpha_3 = 3\alpha_3.$$

Sústava lineárnych rovníc má nekonečne veľa riešení. Riešením je každá usporiadaná trojica $(-2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3)$, teda napríklad aj trojica $(-2, 3, 1)$.
Našli sme nenulovú trojicu čísel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ktorá spĺňa podmienku $\alpha_1\overline{a} + \alpha_2\overline{b} + \alpha_3\overline{c} = \overline{0}$ a teda dvojice $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sú lineárne závislé.

b) Podobne ako v predchádzajúcej úlohe zisťujeme, či existujú čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ také, že aspoň jedno je rôzne od nuly a platí

$$\alpha_1\overline{a} + \alpha_2\overline{b} + \alpha_3\overline{c} = \overline{0}.$$

Ak také čísla existujú, trojice $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sú lineárne závislé. V opačnom prípade sú lineárne nezávislé. Riešime rovnicu

$$\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(2,1,1) + \alpha_3(-1,3,2) = (0,0,0),$$

$$(\alpha_1, 0, 0) + (2\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, 3\alpha_3, 2\alpha_3) = (0,0,0),$$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_2 + 3\alpha_3,\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = (0,0,0).$$

Z definície rovnosti dvoch trojíc dostaneme sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Jediným riešením je trojica čísel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$ a teda trojice $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sú lineárne nezávislé.

Príklad 1.4. *Nájdime všetky hodnoty λ, pre ktoré možno n-ticu $\overline{x}$ vyjadriť ako lineárnu kombináciu n-tíc $\overline{a}$, $\overline{b}$, ak $\overline{a} = (1, 0, 5)$, $\overline{b} = (2, 3, -7)$, $\overline{x} = (3, 6, \lambda)$.*

Riešenie.

Trojica $\overline{x}$ je lineárnou kombináciou trojíc $\overline{a}, \overline{b}$ práve vtedy, ak existujú čísla α_1, α_2 také, že platí

$$\alpha_1\overline{a} + \alpha_2\overline{b} = \overline{x}.$$

Po dosadení dostaneme

$$\alpha_1(1, 0, 5) + \alpha_2(2, 3, -7) = (3, 6, \lambda),$$

$$(\alpha_1, 0, 5\alpha_1) + (2\alpha_2, 3\alpha_2, -7\alpha_2) = (3, 6, \lambda),$$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2, 3\alpha_2, 5\alpha_1 - 7\alpha_2) = (3, 6, \lambda).$$

Z definície rovnosti n-tíc vyplýva

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 3, \\ 3\alpha_2 &= 6, \\ 5\alpha_1 - 7\alpha_2 &= \lambda. \end{aligned}$$

Z prvých dvoch rovníc vyplýva $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$. Po dosadení z tretej rovnice dostaneme $\lambda = -5 - 14 = -19$. Trojica $\overline{x} = (3, 6, \lambda)$ je lineárnou kombináciou trojíc $\overline{a}$, $\overline{b}$ pre $\lambda = -19$ a platí

$$\overline{x} = -\overline{a} + 2\overline{b}.$$

Úlohy

V úlohách 1.1 – 1.4 zistite, pre aké čísla x, y, z platí rovnosť.

1.1 $(3x, 3 - y, 5) = (7 - 4x, 5 - 2y, \frac{z}{3} + 10)$

1.2 $(2 + x, 1 + z, 3 + 2y) = (2, 2z + 3, 5)$

1.3 $(x + y, 2 - z, 5, 4 - 2x) = (3z, 1 + x, 5, 6)$

1.4 $(x + y - 1, y + z, z - x) = (4, z - 4, y + 2)$

V úlohách 1.5 – 1.7 vypočítajte $\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} - \overline{b}$, $\alpha \cdot \overline{a}$, ak

1.5 $\overline{a} = (2, 7, 3)$, $\overline{b} = (1, -5, 0)$, $\alpha = -2$

1.6 $\overline{a} = (-3, 0, 6)$, $\overline{b} = (-2, 5, 1)$, $\alpha = \frac{1}{3}$

1.7 $\overline{a} = (\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, -1)$, $\overline{b} = (\frac{1}{3}, 2, \frac{3}{2})$, $\alpha = -\frac{3}{2}$

1.8 Dané sú n-tice $\overline{a} = (-4, -2, 7, -1)$, $\overline{b} = (-2, 0, 3, -1)$, $\overline{c} = (-1, 1, 1, -1)$. Utvorte lineárnu kombináciu $2\overline{a} + \overline{b} - 4\overline{c}$.

1.9 Dané sú n-tice $\overline{a} = (4, 3, -6)$, $\overline{b} = (2, 5, 1)$, $\overline{c} = (-1, 2, 8)$. Utvorte lineárnu kombináciu $\frac{1}{3}\overline{a} - \frac{2}{5}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}$.

1.10 Dané sú n-tice $\overline{a} = (3, -4, 1)$, $\overline{b} = (2, 5, 3)$. Vypočítajte n-ticu $\overline{x}$, pre ktorú platí $4\overline{x} = 2\overline{a} + 3\overline{b}$.

1.11 Dané sú n-tice $\overline{a} = (1, 2, 3)$, $\overline{b} = (-1, 0, 2)$, $\overline{c} = (2, -3, 4)$. Vypočítajte n-ticu $\overline{x}$, pre ktorú platí $2(\overline{a} - \overline{x}) - 3(2\overline{b} + \overline{x}) = 2(\overline{c} - 2\overline{x})$.

V úlohách 1.12 – 1.19 zistite, či sú dané n-tice závislé alebo nezávislé.

1.12 $\overline{a} = (1, 2, 3)$, $\overline{b} = (3, 6, 9)$

1.13 $\overline{a} = (2, -1, 6)$, $\overline{b} = (-6, 3, 18)$

1.14 $\overline{a} = (2, -1, 1)$, $\overline{b} = (1, 0, 1)$, $\overline{c} = (2, 1, 0)$
1.15 $\overline{a} = (1, 0, 1)$, $\overline{b} = (-3, 2, -1)$, $\overline{c} = (2, 1, 3)$
1.16 $\overline{a} = (1, -2, 2)$, $\overline{b} = (3, -3, 6)$, $\overline{c} = (5, -2, 0)$
1.17 $\overline{a} = (1, 2, 3, -1)$, $\overline{b} = (2, 1, -1, 3)$, $\overline{c} = (1, 5, 10, -6)$
1.18 $\overline{a} = (3, 5, 1, 6)$, $\overline{b} = (0, 0, 0, 0)$, $\overline{c} = (1, -1, 2, 0)$
1.19 $\overline{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\overline{b} = (1, -1, -1, 1)$, $\overline{c} = (1, -1, 1, -1)$, $\overline{d} = (1, 1, -1, -1)$

V úlohách 1.20 – 1.24 nájdite všetky hodnoty $\lambda \in \mathbb{R}$, pre ktoré možno n-ticu $\overline{x}$ vyjadriť ako lineárnu kombináciu n-tíc $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.
1.20 $\overline{a} = (2, 3, 5)$, $\overline{b} = (3, 7, 8)$, $\overline{c} = (1, -6, 1)$, $\overline{x} = (7, -2, \lambda)$
1.21 $\overline{a} = (3, 2, 5)$, $\overline{b} = (2, 4, 7)$, $\overline{c} = (5, 6, \lambda)$, $\overline{x} = (1, 3, 5)$
1.22 $\overline{a} = (3, 2, 6)$, $\overline{b} = (7, 3, 9)$, $\overline{c} = (5, 1, 3)$, $\overline{x} = (\lambda, 2, 5)$
1.23 $\overline{a} = (1, 3, 5)$, $\overline{b} = (2, -1, 8)$, $\overline{c} = (-1, 11, -1)$, $\overline{x} = (8, 3, \lambda)$
1.24 $\overline{a} = (1, 2, -1)$, $\overline{b} = (3, 1, 0)$, $\overline{c} = (2, 3, 5)$, $\overline{x} = (7, \lambda, -1)$

1.3 Matice

Nech m a n sú dve prirodzené čísla. Schému $m \cdot n$ čísel zostavenú do m riadkov a n stĺpcov nazývame *maticou o m riadkoch a n stĺpcoch* alebo maticou typu $m \times n$. Pre maticu typu $m \times n$ používame označenie

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Poznámka 1.1. *Matice budeme označovať veľkými latinskými písmenami* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}, \dots$

Čísla a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, nazývame *prvkami matice* $\boldsymbol{A}$. Prvý index i označuje poradie riadku, druhý index j poradie stĺpca.
Jednotlivé riadky matice $\boldsymbol{A}$ možno chápať ako n-tice čísel, napr. i-ty riadok $(1 \leq i \leq n)$ chápeme ako n-ticu $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$.
Nulovou maticou nazývame maticu $\mathbf{0}$, ktorej všetky prvky sú nulové, t. j.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ak je matica $\boldsymbol{A}$ typu $n \times n$, t. j. má rovnaký počet riadkov a stĺpcov, hovoríme, že $\boldsymbol{A}$ je *štvorcová matica stupňa n.*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, teda prvky a_{ii} pre $i = 1, 2, \dots, n$, nazývame *prvky hlavnej diagonály matice* $\boldsymbol{A}$.

Ak $m \neq n$, maticu nazývame *obdĺžnikovou maticou.*

Matica typu $m \times 1$ sa nazýva *stĺpcová matica.*

Matica typu $1 \times n$ sa nazýva *riadková matica.*

Štvorcová matica, ktorej všetky prvky neležiace na hlavnej diagonále sú rovné nule, sa nazýva *diagonálna matica.*

Diagonálna matica

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

ktorej prvky hlavnej diagonály sú jednotky, sa nazýva *jednotkovou maticou.*

Nech matica $\boldsymbol{A}$ je matica typu $m \times n$. Maticu

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(typu $n \times m$) nazývame *transponovanou maticou* k matici $\boldsymbol{A}$. Ako je vidieť, i-ty riadok matice $\boldsymbol{A}^T$ je rovný i-temu stĺpcu matice $\boldsymbol{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$, a j-ty stĺpec matice $\boldsymbol{A}^T$ je rovný j-temu riadku matice $\boldsymbol{A}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

1.4 Operácie s maticami

Dve matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sa *rovnajú*, ak sú rovnakého typu $m \times n$ a platí

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{pre } i = 1, 2, 3, \dots m, \; j = 1, 2, 3, \dots n.$$

Píšeme $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

Súčtom dvoch matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ rovnakého typu $m \times n$ rozumieme maticu $\boldsymbol{C}$ typu $m \times n$, ak platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \text{pre } i = 1, 2, 3, \dots, m, \; j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Píšeme $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Súčinom matice $\boldsymbol{A}$ typu $m \times n$ s číslom α rozumieme maticu $\boldsymbol{C}$ typu $m \times n$, ak platí

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \quad \text{pre } i = 1, 2, 3, \dots, m, \; j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Píšeme $\boldsymbol{C} = \alpha \cdot \boldsymbol{A}$.

Poznámka 1.2. *Maticu* $(-1) \cdot \boldsymbol{A}$ *označujeme* $-\boldsymbol{A}$ *a nazývame ju opačná matica k matici* $\boldsymbol{A}$.

Poznámka 1.3. *Súčet* $\boldsymbol{A} + (-1) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ *nazývame rozdiel matice* $\boldsymbol{A}$ *a matice* $\boldsymbol{B}$.

Nech matica $\boldsymbol{A}$ je typu $m \times n$ a matica $\boldsymbol{B}$ typu $n \times r$. *Súčinom matíc* $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ (v danom poradí) rozumieme maticu $\boldsymbol{C}$ typu $m \times r$, kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

pre $i = 1, 2, 3, \ldots, m,\ j = 1, 2, 3, \ldots, r$. Prvok c_{ij} získame ako súčet súčinov sebe zodpovedajúcich prvkov i-teho riadku matice $\boldsymbol{A}$ a j-teho stĺpca matice $\boldsymbol{B}$. Píšeme $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.
Z definície súčinu $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ je zrejmé, že počet stĺpcov matice $\boldsymbol{A}$ musí byť rovný počtu riadkov matice $\boldsymbol{B}$. Ak je $m \neq r$, tak súčin $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ neexistuje. Súčin matíc nie je komutatívny, t. j. vo všeobecnosti neplatí $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.
Pre ľubovoľné matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ typu $m \times n$ a ľubovoľné reálne čísla α, β platia pravidlá (vlastnosti operácií s maticami).

1. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ (komutatívny zákon pre súčet),
2. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ (asociatívny zákon pre súčet),
3. $\alpha(\beta \boldsymbol{A}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{A}$ (asociatívny zákon pre násobenie matice s číslami),
4. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{A}$ (distributívny zákon),
5. $\alpha(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \alpha\boldsymbol{A} + \alpha\boldsymbol{B}$ (distributívny zákon),
6. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$, kde $\boldsymbol{0}$ je nulová matica typu $m \times n$,
7. $\boldsymbol{A} + (-1)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

Nech $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ sú matice a α je ľubovoľné reálne číslo. Nasledujúce pravidlá platia za predpokladu, že uvedené operácie majú zmysel.

1. $\alpha(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\alpha\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot (\alpha\boldsymbol{B})$,
2. $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$,
3. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$,
4. $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}$,
5. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$,
6. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

Príklad 1.5. *Nech* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Vypočítajme*
a) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, *b)* $-4\boldsymbol{B}$, *c)* $3\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{A}$.

Riešenie.

Matica $\boldsymbol{A}$ a matica $\boldsymbol{B}$ sú rovnakého typu (typu 3×3), preto existuje súčet matíc $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ a $3\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{A}$.

a) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+1 & 4+1 & 2+1 \\ 3+2 & 1+0 & -1+1 \\ 2+1 & -3+2 & 0+3 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

b) $-4\boldsymbol{B}=-4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -8 & 0 & -4 \\ -4 & -8 & -12 \end{pmatrix}.$

c) $3\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}=3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ -1 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$

Príklad 1.6. *Nájdime maticu $\boldsymbol{X}$, ktorá spĺňa rovnicu $3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$, ak $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{0}$ je nulová matica.*

Riešenie.

Matice $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{0}$ musia byť rovnakého typu ako matica $\boldsymbol{A}$, t. j. typu 2×2. Platí

$$\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Riešime maticovú rovnicu $3\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$. Po dosadení dostaneme

$$3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4x_{11} & 4x_{12} \\ 4x_{21} & 4x_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z rovnosti matíc vyplývajú nasledujúce rovnice

$$-6-4x_{11}=0,\quad 3-4x_{12}=0,\quad 9-4x_{21}=0,\quad 15-4x_{22}=0,$$

odkiaľ

$$x_{11}=-\frac{3}{2},\quad x_{12}=\frac{3}{4},\quad x_{21}=\frac{9}{4},\quad x_{22}=\frac{15}{4}.$$

Pre maticu $\boldsymbol{X}$ platí

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{15}{4} \end{pmatrix}.$$

Príklad 1.7. *Nech* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. *Vypočítajme* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^T - 2\boldsymbol{B}$.

Riešenie.

K matici $\boldsymbol{A}$ vytvoríme transponovanú maticu $\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Násobením matice $\boldsymbol{B}$ číslom 2 získame maticu $2\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & -10 \end{pmatrix}$.

Matice $\boldsymbol{A}^T$ a $2\boldsymbol{B}$ sú matice rovnakého typu 2×3, platí

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^T - 2\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Príklad 1.8. *Vypočítajme súčin matíc* $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ *a ak existuje, aj súčin* $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Riešenie.

a) $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sú matice typu 2×2, počet stĺpcov matice $\boldsymbol{A}$ je rovnaký ako počet riadkov matice $\boldsymbol{B}$. Výsledná matica $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ bude typu 2×2. Platí

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ (-7) \cdot 4 + 2 \cdot 2 & (-7) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}.$$

Súčin matíc $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ existuje, teda

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-7) & 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-7) & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Matica $\boldsymbol{A}$ je typu 2×3, matica $\boldsymbol{B}$ typu 3×1, počet stĺpcov matice $\boldsymbol{A}$ je rovnaký ako počet riadkov matice $\boldsymbol{B}$. Výsledná matica $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ bude typu 2×1. Platí

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \\ 4 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Matica $\boldsymbol{B}$ je typu 3×1, matica $\boldsymbol{A}$ typu 2×3, počet stĺpcov matice $\boldsymbol{B}$ nie je rovnaký ako počet riadkov matice $\boldsymbol{A}$, a teda súčin matíc $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ neexistuje.

Príklad 1.9. *Vypočítajme* $\boldsymbol{A}^2$, *ak* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Riešenie.

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2+9 & 2+4-6 & 3-2+3 \\ -1-2-3 & -2+4+2 & -3-2-1 \\ 3+2+3 & 6-4-2 & 9+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ -6 & 4 & -6 \\ 8 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Úlohy

V úlohách 1.25 – 1.27 nájdite transponovanú maticu k matici.

1.25 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **1.26** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **1.27** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

V úlohách 1.28 – 1.29 vypočítajte, pre aké čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí daná rovnosť.

1.28 $\begin{pmatrix} 3x-2y & 7 \\ -1 & 2-5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4 & 7 \\ -1 & y-1 \end{pmatrix}$

1.29 $\begin{pmatrix} -3 & 5x & 2 \\ 11 & 3z-5 & 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4-2y & 2 \\ 11 & -4 & 8-7x \end{pmatrix}$

1.30 Vypočítajte $3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.31 Vypočítajte $2\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B}$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.32 Vypočítajte $\boldsymbol{A} - \frac{1}{2}\boldsymbol{B}$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

1.33 Vypočítajte $2\boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{B}$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

1.34 Vypočítajte $3\boldsymbol{A} + \frac{2}{5}\boldsymbol{B}$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -2 & 3 \\ \frac{2}{5} & -4 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 15 & -\frac{27}{2} \\ -2 & 5 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

1.35 Vypočítajte $\boldsymbol{B} - 2\boldsymbol{A}^T$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.36 Vypočítajte $\boldsymbol{B}^T - \frac{1}{4}\boldsymbol{A}^T$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & -2 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1.37 Vypočítajte maticu $\boldsymbol{X}$, ktorá spĺňa podmienku $3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$, ak $\boldsymbol{0}$ je nulová matica a $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.38 Vypočítajte maticu $\boldsymbol{X}$, ktorá spĺňa podmienku $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$, ak $\boldsymbol{E}$ je jednotková matica a $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

V úlohách 1.39 – 1.60 vypočítajte súčin matíc.

1.39 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.40 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.41 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

1.42 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.43 $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

1.44 $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

1.45 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

1.46 $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{8} \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

1.47 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

1.48 $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

1.49 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{3}{4} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1.50 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & \frac{1}{7} \\ 5 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -1 \\ \frac{2}{7} & -2 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$

1.51 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1.52 $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

1.53 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.54 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1.55 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

1.56 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

1.57 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & -9 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

1.58 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$

1.59 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.60 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

V úlohách 1.61 – 1.63 vypočítajte $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, ak

1.61 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$

1.62 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 7 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

1.63 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

V úlohách 1.64 – 1.66 vypočítajte $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$, ak

1.64 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

1.65 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

1.66 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

1.67 Vypočítajte $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$

1.68 Vypočítajte $\frac{1}{2}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.69 Vypočítajte $\boldsymbol{A}^2$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.70 Vypočítajte $\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{B}$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.71 Vypočítajte $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}^2$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

1.72 Vypočítajte $\boldsymbol{B}^2$, ak $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}^2$.

1.73 Vypočítajte $\boldsymbol{C}^2 - \boldsymbol{D}^2$, ak $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1.74 Vypočítajte $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^2$, ak $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 7 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 5 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

1.5 Hodnosť matice

Definícia 1.1 *Nech $\boldsymbol{A}$ je matica typu $m \times n$.* Hodnosťou matice $\boldsymbol{A}$ *rozumieme číslo $h(\boldsymbol{A})$ také, že*

- *v matici existuje h lineárne nezávislých riadkov,*
- *každých $h + 1$ riadkov je lineárne závislých.*

Ak všetkých m riadkov je lineárne nezávislých, tak $h(\boldsymbol{A}) = m$.

Zjednodušene môžeme povedať, že hodnosť matice je maximálny počet lineárne nezávislých riadkov.

Ak má matica m riadkov, môže mať hodnosť najviac m, t. j. $h(\boldsymbol{A}) \leq m$. Ak $h(\boldsymbol{A}) = m$, všetky riadky matice $\boldsymbol{A}$ sú lineárne nezávislé.

Určiť hodnosť matice podľa definície je však komplikované, preto ukážeme iný spôsob určovania hodnosti. Najprv však uvedieme niekoľko úprav matíc, ktoré nemenia jej hodnosť, tzv. *elementárne riadkové operácie.*

Hodnosť matice sa nezmení, ak

- vzájomne vymeníme dva riadky matice,
- vynásobíme ľubovoľný riadok nenulovým číslom,
- pripočítame k niektorému riadku lineárnu kombináciu ostatných riadkov (špeciálne, ak pripočítame ľubovoľný násobok niektorého riadku k inému riadku),
- pridáme alebo vynecháme riadok, ktorý je lineárnou kombináciou ostatných riadkov.

Definícia 1.2 *Hovoríme, že matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m,n}$ a $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m,n}$ sú riadkovo ekvivalentné, ak maticu $\boldsymbol{B}$ možno dostať z matice $\boldsymbol{A}$ pomocou konečného počtu elementárnych riadkových operácií.*

Definícia 1.3 *Hovoríme, že matica $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m,n}$ je stupňovitá matica (matica s ustupujúcimi hlavnými prvkami), ak sú splnené podmienky*

- *pre každé i, j také, že $j < i$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, platí $a_{ij} = 0$, t. j. všetky prvky matice ležiace pod hlavnou diagonálou sú nulové,*
- *pre každé i, $1 \le i \le m-1$ platí: ak a_{ij} je prvý nenulový prvok (v smere zľava doprava) v i-tom riadku (tzv. vedúci prvok i-teho riadku), tak pre každé k také, že $i+1 \le k \le m$, platí $a_{kj} = 0$, t. j. pod každým vedúcim prvkom ležia iba nuly.*

Pri praktickom zisťovaní hodnosti matice $\boldsymbol{A}$ postupujeme tak, že elementárnymi úpravami, ktoré nemenia hodnosť matice upravíme maticu $\boldsymbol{A}$ na stupňovitý tvar, t. j. v upravenej matici pod hlavnou diagonálou budú nulové prvky

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3k} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Veta 1.2. *Hodnosť matice je rovná počtu nenulových riadkov riadkovo ekvivalentnej stupňovitej matice.*

Príklad 1.10. *Vypočítajme hodnosť matice* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Riešenie.

Elementárnymi úpravami, ktoré nemenia hodnosť matice, upravíme maticu $\boldsymbol{A}$ na stupňovitý tvar. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /-2R_1 \\ /-5R_1 \\ /-7R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /-2R_2 \\ /-2R_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \rightleftharpoons \\ \rightleftharpoons \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ je rovná počtu nenulových riadkov riadkovo ekvivalentnej stupňovitej matice, teda $h(\boldsymbol{A}) = 3$.

Príklad 1.11. *Vypočítajme hodnosť matice* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Riešenie.

Elementárnymi úpravami upravíme maticu $\boldsymbol{A}$ na stupňovitý tvar. Aby sme získali na mieste prvku a_{11} jednotku, vymeníme navzájom 1. a 2. riadok.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightleftharpoons \\ \rightleftharpoons \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /-2R_1 \\ /-2R_1 \\ /-3R_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & -2 & 0 & -9 \\ 0 & -3 & 2 & -16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /-2R_2 \\ /-3R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ je rovná počtu nenulových riadkov riadkovo ekvivalentnej stupňovitej matice, teda $h(\boldsymbol{A}) = 3$.

Príklad 1.12. *Vypočítajme hodnosť matice* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Riešenie.

Žiadny prvok matice nie je rovný jednotke. Na získanie jednotkového prvku využijeme elementárne úpravy, ktoré nemenia hodnosť matice. Následne maticu $\boldsymbol{A}$ upravíme na stupňovitý tvar. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /-R_1 \\ /-2R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightleftharpoons \\ \rightleftharpoons \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /-2R_1 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /+R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ je $h(\boldsymbol{A}) = 2$.

Príklad 1.13. *Vypočítajme hodnosť matice* $\boldsymbol{A}$*, ak*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & -24 & 19 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.

Podobne ako v predchádzajúcom príklade, vhodnou úpravou získame jednotkový prvok a výmenou riadkov ho umiestnime na miesto prvku a_{11}. Maticu $\boldsymbol{A}$ upravíme nasledovne.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & -24 & 19 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /-R_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \\ 3 & 8 & -24 & 19 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightleftharpoons \\ \rightleftharpoons \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & -24 & 19 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /-3R_1 \\ /-3R_1 \\ /-2R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 5 & 30 & -25 \\ 0 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 20 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /:5 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 20 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /-8R_2 \\ /-2R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -48 & 38 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \rightleftharpoons \\ \rightleftharpoons \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -48 & 38 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ /+6R_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

V matici upravenej na stupňovitý tvar sú štyri nenulové riadky, teda $h(\boldsymbol{A}) = 4$.

Úlohy

V úlohách 1.75 – 1.100 určte hodnosť matice.

1.75 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

1.76 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

1.77 $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 11 & -3 \end{pmatrix}$

1.78 $\begin{pmatrix} -6 & -3 & 9 \\ 2 & 4 & 10 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

1.79 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.80 $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 14 \end{pmatrix}$

1.81 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

1.82 $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & -2 & -7 \end{pmatrix}$

1.83 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1.84 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

1.85 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

1.86 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$

1.87 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

1.88 $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 \\ 9 & -2 & -1 & 7 \\ 9 & 9 & 8 & 9 \\ -1 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

1.89 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.90 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

1.91 $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

1.92 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 13 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

1.93 $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 0 & -5 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}$

1.94 $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

1.95 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.96 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.97 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 2 \\ 9 & -9 & 6 & -16 & 2 \end{pmatrix}$

1.98 $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1.99 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$

1.100 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$