

Diferenciálne rovnice. Sústavy diferenciálnych rovníc.

1 Diferenciálne rovnice prvého rádu

V nasledujúcich úlohách riešte diferenciálne rovnice.

1. $\frac{1}{x}y' = \frac{1}{x^2 + 1}$

2. $\sin x \cos y + \frac{dy}{dx} \operatorname{tg} y \cos x = 0$

3. $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^3 + x^2y^3$.

4. $y\sqrt{1+x^2} - xy + (1+x^2)y' = 0, \quad y(0) = 1$

5. Riešte diferenciálne rovnice so separovateľnými premennými

a) $xyy' = 1 + y^2$

b) $yy' + x = 1$

c) $1 - 2x - y^2y' = 0$

d) $2y - x^3y' = 0$

e) $y' - xy^2 - y^2 - xy - y = 0$

f) $2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2)$

g) $(1+e^x)yy' = e^x$

h) $y \ln y + xy' = 0$

6. Nájdite riešenia nasledujúcich diferenciálnych rovníc spĺňajúca dané počiatočné podmienky.

a) $y' \sin x - y \cos x = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

b) $\frac{x}{1+y} - \frac{yy'}{1+x} = 0, \quad y(0) = 1$

c) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}y' = 0, \quad y(0) = 1$

d) $\sin y \cos x y' = \cos y \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

7. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$ pri počiatočnej podmienke $y(e) = 1$

8. $y' = \frac{x(1-y^2)}{y(1-x^2)}$ pri počiatočnej podmienke

a) $y(2) = 2,$

b) $y(0) = -\frac{1}{2},$

c) $y(0) = 1,$

9. Závislosť teploty T ochladzujúceho sa telesa s hmotnosťou m na čase t je vyjadrená diferenciálnou rovnicou

$$mKdT = -\alpha(T - T_P)dt,$$

kde K je konštantná tepelná kapacita telesa, α ($\alpha > 0$) je koeficient úmernosti a T_P je teplota prostredia. Nech v čase $t = 0$ je teplota telesa $T + T_0$. Určte:

a) teplotu telesa v čase $t_1 > 0$,

b) dobu, za ktorú klesne teplota telesa z hodnoty T_0 na hodnotu $T_1 > T_0$.

10. $xyy' = 1 - x^2$

11. $y' \operatorname{tg} x - y = a$, a je konštanta

12. $\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$

13. $e^{-s} \left(1 + \frac{ds}{dt} \right) = 1$

14. $y' = 10^{x+y}$

15. $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$

16. $y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$

17. $(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$, $y(1) = 1$.

18. $x - y + xy' = 0$

19. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

20. $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$

21. $xy' = y \ln \frac{x}{y}$

22. $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$

23. $xy' = y \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right)$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$

24. $(y^2 - 3x^2) y' + 2xy = 0$, $y(1) = 1$

25. $y + \sqrt{x^2 + y^2} = xy'$, $y(1) = 0$

26. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

27. $x dy - y dx = y dy$

28. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

29. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

30. $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$, $y(1) = 0$

31. $y' + 2xy = 4x$

32. Riešte Cauchyho úlohu $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$, $y(0) = 4$

33. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$

34. Určte závislosť dráhy s od času t ak je rýchlosť systému popísaná diferenciálnou rovnicou

$$\frac{dv}{dt} + kv = g$$

35. $y' + 2y = 4x$

36. $y' + 3y = x$

37. $y' + y = \cos x, \quad y(0) = 1$
38. $y' + y \cot x = \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
39. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
40. $y' + 2y = e^{-x}$
41. $xy' + y = 1 + \ln x$
42. $y' + \frac{2y}{x} = x^3$
43. $y' + \frac{xy}{1 + x^2} = \frac{1}{x(1 + x^2)}$
44. $xy' + y = x \sin x$
45. $y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x$
46. $y' + y = 2x^2 - 2x + 1$
47. $y' - 2y = 3e^{2x}$
48. $2y dx + (y^2 - 6x) dy = 0$
49. $y' = \frac{1}{2x - y^2}$
50. Riešme Bernoulliho diferenciálnu rovnicu $y' + 2\frac{y}{x} = -x^4 e^x y^3$.
51. Riešme Bernoulliho diferenciálnu rovnicu $y' + \frac{y}{x} = ay^2 \ln x, \quad a \neq 0$, ak $y(e) = 1$.
52. Riešme Bernoulliho diferenciálnu rovnicu $xy' + 2y = x^5 y^2$
53. Riešme Bernoulliho diferenciálnu rovnicu $y' + y = x\sqrt{y}$
54. Riešme Bernoulliho diferenciálnu rovnicu $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$
55. Riešme Bernoulliho diferenciálnu rovnicu $y' + \frac{y}{2x \ln x} = \frac{\cos x}{2y \ln x}$

2 Diferenciálne rovnice vyšších rádov

56. $y'' - 4y' = 0$
57. $y'' - 2y' + y = 0$
58. $y'' + y = 0$
59. $y'' + y' - 6y = 0$
60. $y'' - 5y' + 6y = 0$
61. $y'' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{9}y = 0$
62. $y'' + 4y' + 4y = 0$
63. $y'' - 6y' + 13y = 0$
64. $y'' + 4y' + 5y = 0$ pre $y(0) = 1$ a $y'(0) = 1$
65. $y''' - y'' = 0$
66. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$

67. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$
68. $y'' - y = 0$
69. $y'' - 4y' + 3y = 0$
70. $3y'' - 2y' - 8y = 0$
71. $y''' - y' = 0$
72. $y'' - 4y' + 13y = 0$
73. $9y'' - 6y' + y = 0$
74. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
75. $y''' - 3y' + 2y = 0$
76. $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0$
77. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 15$
78. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
79. $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$
80. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
81. $4y'' + 12y' + 9y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$
82. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2$
83. $y''' - y'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3$
84. $4y'' + y = 0, \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = 3$
85. $2y'' - 5y' - 7y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$
86. $y'' - 7y' + 6y = e^x$
87. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$
88. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
89. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$
90. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, kde funkcia $f(x)$ je a) $10e^{-x}$, b) $3e^{2x}$, c) $2\sin x$, d) $e^x(3 - 4x)$, e) $3x + 5\sin 2x$
91. $y'' + y = f(x)$, kde funkcia $f(x)$ je a) $2x^3 - x + 2$, b) $-8\cos 3x$, c) $\cos x$, d) $\sin x - 2e^{-x}$, e) $\cos x \cos 2x$
92. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$
93. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$
94. $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$
95. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$
96. $y'' - y = \frac{e^x}{1 + e^x}$
97. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$

98. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$
99. $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$
100. $y'' - 7y' + 10y = -e^{2x}(6x + 7)$
101. $y'' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{9}y = e^{\frac{x}{3}}$
102. $y'' - 7y' + 10y = 8e^{2x} \sin x$
103. $y'' + 4y = \cos 2x$
104. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$
105. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin 2x$
106. $y'' - 7y' + 10y = (9x^2 + 6x - 3)e^{5x}$
107. $3y'' - 4y' = -32x^3 + 84x + 5$
108. $y'' - 7y' + 10y = 20e^{5x} \cos x$
109. $2y'' - 8y' + 10y = 3e^{2x} \cos 2x$
110. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$
111. $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$
112. $y'' + 4y = 2 \cos x + \sin x$
113. $y'' + y' = 4x^2 e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
114. $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
115. $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
116. $y'' + y = -\cot^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
117. Kmitajúci systém s jedným stupňom voľnosti je možné popísať rovnicou

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = 0$$

pre tlmené kmitanie;

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + ky(t) = 0$$

pre netlmené kmitanie;

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$$

pre vynútené kmitanie,

pričom m, k, b sú konštanty.

V jednotlivých prípadoch určte závislosť výchylky od času.

118. $y''' + 9y' = 0$
119. $y^{(4)} = 8y'' - 16y$

3 Sústavy diferenciálnych rovníc

V nasledujúcich úlohách riešte sústavy diferenciálnych rovníc.

$$\begin{aligned} 120. \quad & x'_1 = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ & x'_2 = x_1 + x_3 \\ & x'_3 = 6x_1 - 6x_2 + 5x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 121. \quad & y'_1 = -7y_1 + y_2 \\ & y'_2 = -2y_1 - 5y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 122. \quad & x'_1 = 2x_1 - x_2 \\ & x'_2 = x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 123. \quad & y'_1 = y_1 + y_2 \\ & y'_2 = -2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

$$124. \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} X$$

$$125. \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X$$

$$126. \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} X$$

$$127. \quad \dot{X} = AX, \quad \text{kde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$128. \quad \dot{X} = AX, \quad \text{kde} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$129. \quad \dot{X} = AX, \quad \text{kde} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$130. \quad \dot{X} = AX, \quad \text{kde} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 131. \quad & x'_1 = x_1 + x_2 \\ & x'_2 = 4x_1 + x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 132. \quad & y'_1 = 4y_1 - y_2 - 36x \\ & y'_2 = -2y_1 + y_2 - 2e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 133. \quad & y'_1 = 3y_1 + 2y_2 + 4e^{5x} \\ & y'_2 = y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 134. \quad & y'_1 = 2y_1 + 3y_2 + 5x \\ & y'_2 = 3y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 135. \quad & y'_1 = y_2 + \operatorname{tg}^2 x - 1 \\ & y'_2 = -y_1 + \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

$$136. \quad \dot{Y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} x^2 e^{2x} \\ x e^{2x} \end{pmatrix}$$

137. Riešme nasledujúce systémy diferenciálnych rovníc eliminačnou metódou

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad y_1'(x) &= 2y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= 3y_1(x) + 4y_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad y_1'(x) &= y_1(x) - 3y_2(x) \\ y_2'(x) &= 3y_1(x) + y_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad y_1'(x) &= y_2(x) - y_1(x) \\ y_2'(x) &= y_2(x) + 3y_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad y_1'(x) &= y_1(x) + 5y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) - 3y_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad y_1'(x) &= y_2(x) - y_1(x) + e^x \\ y_2'(x) &= y_1(x) - y_2(x) + e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad y_1'(x) &= -4y_2(x) + \cos 2x \\ y_2'(x) &= -4y_1(x) + \sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad y_1'(x) &= 4y_1(x) - y_2(x) - 5x + 1 \\ y_2'(x) &= y_1(x) + 2y_2(x) + x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad y_1'(x) &= y_2(x) - \cos x \\ y_2'(x) &= -y_1(x) + \sin x \end{aligned}$$

138. Riešme nasledujúce systémy diferenciálnych rovníc použitím vlastných čísel a vlastných vektorov

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad y_1'(x) &= 7y_1(x) + 6y_2(x) \\ y_2'(x) &= 2y_1(x) + 6y_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad y_1'(x) &= 8y_2(x) - y_1(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x) + y_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad y_1'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_2(x) - y_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad y_1'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) &= -4y_1(x) + 4y_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad y_1'(x) &= 2y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x) + 4y_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad y_1'(x) &= -3y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad y_1'(x) &= y_1(x) + 3y_2(x) \\ y_2'(x) &= -3y_1(x) + y_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad y_1'(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= -5y_1(x) - y_2(x) \end{aligned}$$

139. Riešme nasledujúce systémy nehomogénnych diferenciálnych rovníc

a)
$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 3y_1(x) + 2y_2(x) + e^x \\ y_2'(x) &= y_1(x) + 2y_2(x) + e^{-x} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + 2y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_1(x) - 5 \sin x \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -2y_2(x) + 3 \\ y_2'(x) &= 2y_1(x) - x \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 2y_1(x) + 3y_2(x) + 8e^x \\ y_2'(x) &= 3y_1(x) + 2y_2(x) + 5x \end{aligned}$$