



**TECHNICKÁ  
UNIVERZITA  
V KOŠICIACH**

Jozef BOCKO  
Štefan SEGLA  
Róbert HUŇADY

## **KMITANIE MECHANICKÝCH SÚSTAV**



**EDÍCIA VEDECKEJ A ODBORNEJ LITERATÚRY**  
Košice, 2016



---

© prof. Ing. Jozef BOCKO, CSc.  
prof. Ing. Štefan SEGLA, CSc.  
doc. Ing. Róbert HUŇADY, PhD.

## **Kmitanie mechanických sústav**

Lektori:

prof. Ing. Ján Vavro, PhD. – TrU A. Dubčeka  
prof. Ing. František Šimčák, CSc. – TU v Košiciach  
prof. Ing. Milan Žmindák, CSc. – ŽU v Žiline

**ISBN: 978-80-553-2629-0**  
**EAN: 9788055326290**

**OBSAH**

<b>PREDHOVOR</b>	<b>7</b>
<b>1. ÚVOD DO KMITANIA MECHANICKÝCH SÚSTAV</b>	<b>9</b>
1.1. Klasifikácia mechanických sústav	10
1.2. Veličiny popisujúce kmitavý pohyb	12
1.3. Vektorové vyjadrenie harmonického pohybu v komplexnej rovine	15
1.4. Zložené kmitanie	18
1.4.1. Skladanie kmitov rovnakého smeru	18
1.4.2. Skladanie kolmých kmitov	22
1.5. Harmonická analýza	24
1.6. Základné kroky v analýze kmitania mechanických sústav	27
1.7. Základné vlastnosti mechanickej sústavy	28
1.7.1. Tuhosť	28
1.7.2. Tlmenie	34
1.7.3. Hmotnosť a zotrvačnosť	36
<b>2. KMITANIE SÚSTAV S JEDNÝM STUPŇOM VOLNOSTI</b>	<b>38</b>
2.1. Voľné kmitanie netlmenej sústavy s 1° voľnosti	38
2.2. Kmitanie sústavy s 1° voľnosti s viskóznym tlmením	40
2.2.1. Voľné kmitanie	40
2.2.2. Vynútené kmitanie – Budenie harmonickou silou s konštantnou amplitúdou	46
2.2.3. Vynútené kmitanie – Budenie konštantnou silou	50
2.2.4. Vynútené kmitanie – Budenie silou s periodickým priebehom	51
2.2.5. Vynútené kmitanie – Budenie všeobecnou silou	53
2.2.6. Vynútené kmitanie – Kinematické budenie	55
2.3. Kmitanie sústavy s 1° voľnosti so suchým trením	59
2.3.1. Voľné kmitanie	59
2.3.2. Vynútené kmitanie – Budenie harmonickou silou	62
2.4. Kmitanie sústavy s 1° voľnosti s hysteréznym tlmením	64
2.4.1. Voľné kmitanie	64
2.4.2. Vynútené kmitanie – Budenie harmonickou silou	67
2.5. Funkcia frekvenčnej odozvy	68
2.5.1. Sústava s viskóznym tlmením	72
2.5.2. Sústava s hysteréznym tlmením	76
2.6. Funkcia impulznej odozvy	79
2.7. Laplaceova transformácia a jej využitie pri analýze kmitania	81
<b>3. ANALÝZA KMITANIA SÚSTAV S VIACERÝMI STUPŇAMI VOLNOSTI S VYUŽITÍM MATICOVÝCH METÓD</b>	<b>87</b>

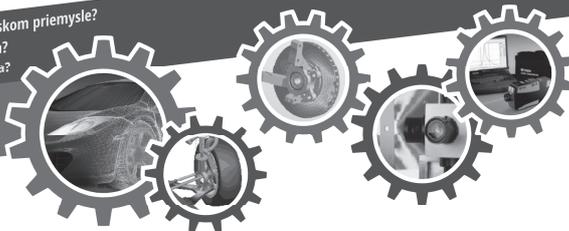
<b>3.1. Kmitanie netlmej sústavy s n° voľnosti</b>	<b>87</b>
3.1.1. Voľné kmitanie	88
3.1.2. Ortogonalita vlastných vektorov	91
3.1.3. Normovanie vlastných tvarov	93
3.1.4. Modálna transformácia	94
3.1.5. Funkcie frekvenčných odoziev sústavy	96
<b>3.2. Kmitanie sústavy s n° voľnosti s proporcionálnym tlmením</b>	<b>99</b>
3.2.1. Proporcionálne viskózne tlmenie	99
3.2.2. Proporcionálne hysterézne tlmenie	102
<b>3.3. Kmitanie sústavy s n° voľnosti s neproporcionálnym tlmením</b>	<b>103</b>
3.3.1. Všeobecný prípad viskózneho tlmenia	103
3.3.1.1. Ortogonalita vlastných vektorov	105
3.3.1.2. Normovanie vlastných vektorov na jednotkovú hmotnosť	107
3.3.1.3. Pravostranné a ľavostranné vlastné vektory	108
3.3.1.4. Modálna transformácia	108
3.3.1.5. Funkcie frekvenčných odoziev sústavy	109
3.3.2. Všeobecný prípad hysterézneho tlmenia	110
<b>4. KMITANIE JEDNOROZMERNÝCH KONTINUÍ</b>	<b>113</b>
<b>4.1. Dynamika strún, prútov, nosníkov a hriadel'ov</b>	<b>113</b>
4.1.1. Priečne kmitanie strún	113
4.1.2. Pozdĺžne kmitanie prútov	118
4.1.3. Torzné kmitanie hriadel'ov	119
4.1.4. Priehyb nosníka	122
<b>4.2. Vlastné frekvencie a vlastné tvary</b>	<b>124</b>
4.2.1. Systémy, ktoré sú opísané parciálnymi diferenciálnymi rovnicami druhého rádu	124
4.2.1.1. Axiálne kmitanie prúta	126
4.2.1.2. Torzné kmity hriadel'a	128
4.2.1.3. Kmitanie strún	130
4.2.2. Systémy opísané parciálnymi diferenciálnymi rovnicami štvrtého rádu: Nosníky pri priečnom kmitaní	137
<b>5. KMITANIE DVOJ A TROJROZMERNÉHO KONTINUA</b>	<b>142</b>
<b>5.1. Kmitanie membrán</b>	<b>142</b>
5.1.1. Obdĺžniková membrána	144
5.1.2. Kruhová membrána	146
<b>5.2. Vlny v pružnom médiu</b>	<b>148</b>
<b>6. MALÉ KMITY MECHANICKÝCH SÚSTAV</b>	<b>154</b>
<b>6.1. Pohybové rovnice malých kmitov</b>	<b>154</b>



<b>6.2. Priame odvodenie pohybových rovníc malých kmitov v maticovom tvare</b>	<b>157</b>
<b>6.3. Postup pri zostavovaní pohybových rovníc malých kmitov</b>	<b>158</b>
<b>7. VIBROIZOLÁCIA A UKLADANIE STROJOV</b>	<b>162</b>
<b>7.1. Mechanické sústavy s 1° voľnosti</b>	<b>162</b>
<b>7.2. Dynamický tlmič kmitov</b>	<b>165</b>
<b>7.3. Pružné uloženie strojov</b>	<b>169</b>
7.3.1. Rovinný model pružného uloženia stroja	170
7.3.2. Priestorový model pružného uloženia stroja	176
<b>7.4. Odpruženie vozidiel</b>	<b>178</b>
7.4.1. Druhy odpruženia vozidiel	179
7.4.2. Dynamické a matematické modely vozidiel	180
7.4.3. Kinematické budenie od vozovky	185
7.4.4. Aktívne systémy odpruženia vozidiel	188
7.4.5. Semiaktívne systémy odpruženia vozidiel	188
7.4.5.1. Riadenie pre zlepšenie komfortu jazdy (sky-hook riadenie)	189
<b>8. KMITANIE NELINEÁRNYCH DISKRÉTNÝCH SÚSTAV</b>	<b>191</b>
<b>8.1. Voľné kmitanie</b>	<b>192</b>
8.1.1. Pohyb vo fázovej rovine a singulárne body	196
<b>8.2. Približné analytické riešenie</b>	<b>198</b>
8.2.1. Metóda malého parametra	198
8.2.2. Metóda ekvivalentnej linearizácie	201
<b>8.3. Vynútené kmitanie</b>	<b>204</b>
8.3.1. Amplitúdová a fázová charakteristika	205
<b>8.4. Subharmonické a ultraharmonické kmitanie</b>	<b>207</b>
<b>8.5. Samobudené kmitanie</b>	<b>208</b>
<b>8.6. Relaxačné kmitanie</b>	<b>210</b>
<b>8.7. Parametrické kmitanie</b>	<b>211</b>
8.7.1. Parametrické kmitanie lineárnej sústavy	212
<b>9. STABILITA POHYBU</b>	<b>216</b>
<b>9.1. Definície a kritériá stability</b>	<b>216</b>
<b>LITERATÚRA</b>	<b>225</b>

Snívaš o práci v automobilovom alebo strojárskom priemysle?  
Chceš sa stať vysokokvalifikovaným odborníkom?  
Chceš rozvíjať svoj potenciál a baví ťa mechanika?

**Potom neváhaj a študuj  
APLIKOVANÚ MECHANIKU!**



#### PREČO ŠTUDOVAŤ APLIKOVANÚ MECHANIKU?

- o absolventov odboru je vysoký záujem,
- patria k vysokokvalifikovaným odborníkom,
- zastávajú najlepšie platené pozície na trhu práce,
- majú možnosť uplatnenia sa v mnohých oblastiach vývoja a výskumu,
- obstoja i v medzinárodnej konkurencii.



#### PONÚKAME TI

- úplné druhostupňové vysokoškolské vzdelanie,
- perspektívu pracovného uplatnenia v odbore,
- kvalitné štúdium,
- špičково vybavené laboratória a učebne,
- kvalifikovaných pedagógov,
- exkurzie, workshopy a semináre,
- diplomové práce v podnikoch,
- účasť na projektoch,
- možnosť absolvovať časť štúdia v zahraničí,
- možnosť odbornej praxe,
- možnosť pokračovať v doktorandskom štúdiu.

#### NAUČÍME ŤA

- ako správne aplikovať teoretické poznatky z mechaniky tuhých a poddajných telies,
- ako s využitím numerických a experimentálnych metód mechaniky riešiť rôzne technické problémy,
- ako využívať moderné softvérové prostriedky pre tvorbu a analýzu modelov mechanických sústav,
- ako navrhovať a konštruovať rozsiahle technické zariadenia, stroje a konštrukcie,
- ako sa orientovať vo vlastnostiach a použití technických materiálov,
- ako tvoriť a posudzovať technickú dokumentáciu,
- ako vykonávať výskum s vysokou mierou tvorivosti a samostatnosti.

#### PREDPOKLADY PRE ŠTÚDIUM

- dobré znalosti z oblasti mechaniky, matematiky, konštruovania a inžinierskych materiálov,
- praktické skúsenosti s aplikáciami CAD a CAE,
- schopnosť tvorivého a inovatívneho myslenia,
- technické zručnosti.

**ŠTUDOVAŤ APLIKOVANÚ MECHANIKU SA OPLATÍ!**

[www.sjf.tuke.sk/kamasi](http://www.sjf.tuke.sk/kamasi)



## PREDHOVOR

Fyzikálne deje v technike a v prírode sú často veľmi zložité a pri ich štúdiu je výhodné javy, ktoré možno študovať relatívne samostatne, vyčleňovať zo skúmania celého komplexného systému a pracovať s nimi zvlášť. Jednou z takýchto oblastí je sféra výskumu kmitania mechanických sústav.

Kmitanie hrá oddávna kľúčovú úlohu v strojárstve a zvyšovanie výkonu a rýchlosti strojov a procesov jeho dôležitosť len zväčšuje. Potlačenie a eliminácia nežiaduceho kmitania ide ruka v ruku s dokonalou znalosťou podstaty uvedeného fyzikálneho procesu, kde ide v princípe o neustále zmeny kinetickej a potenciálnej energie systému. Cieľom tejto učebnice je oboznámiť čitateľa s jednotlivými formami kmitania mechanických systémov, rovnicami, ktoré ich popisujú, spôsobmi ich riešenia a ich významnými charakteristikami. Čitateľovi predstavuje rôzne metódy a techniky, ktoré môžu poslúžiť pre modelovanie, analýzu, návrh, modifikáciu a znižovanie kmitania strojov a zariadení.

Publikácia je učebnicou rovnomenného predmetu vyučovaného v druhom stupni inžinierskeho štúdia v študijnom programe Aplikovaná mechanika a využitia bude i pri výučbe predmetu Riadené kmitanie v študijnom programe Mechatronika. Učebnica obsahuje informácie týkajúce sa kmitania strojných súčastí, t.j. problematiky, ktorá má významný vplyv na životnosť a kvalitu strojov a zariadení.

Autori ďakujú študentom Katedry aplikovanej mechaniky a strojného inžinierstva Strojníckej fakulty Technickej univerzity v Košiciach, menovite Ing. Tomášovi Kulovi a Bc. Adamovi Kaľavskému za elektronické spracovanie obrázkov. Poďakovanie patrí tiež Ing. Eve Dzurišovej a Alene Nudzíkovej za prepis textu časti publikácie.

Učebnica bola vypracovaná v rámci riešenia projektu Ministerstva školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky KEGA 054TUKE-4/2014 „Využitie moderných numerických metód mechaniky ako základu vedeckého konštruovania pre rozvoj vedomostnej bázy študentov druhého a tretieho stupňa vysokoškolského štúdia“.

Veríme, že učebnica bude vítanou pomôckou nielen pre študentov technických univerzít, ale i projektantov, konštruktérov a ostatných pracovníkov v praxi.

Košice, 12.9.2016

Autori